uspořádané dvojice: $\boxed{(x,y)}$, $\{\{x\},\{x,y\}\}$
$\{x,y\}$ $(7,5)$ (Diskrétka, pondělí)

<u>Kartézský součin</u> $A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

uspoř. k-tice $(x_1, \dots, x_k)$ (a,b,c) $(a,(b,c))$? $((a,b),c)$?

$A^k := \underbrace{A \times A \times \_\_ \times A}_{k}$

$(A \times B) \times C$
$A \times (B \times C)$
$A \times B \times C$

RELACE

$x \in X$ $y \in Y$ → $\boxed{\text{relace}}$ → ANO/NE

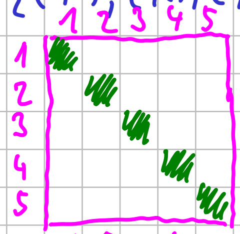
(binární)
<u>Df:</u> Relace mezi množinami X, Y je podmnožina $X \times Y$.

<u>Df:</u> Relace na množině X je podmnožina X^2.

<u>Příklady</u> na $\{1,2,3,4,5\}$

① $x = y$ $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

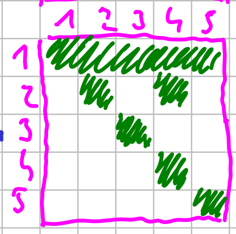
Δ_X



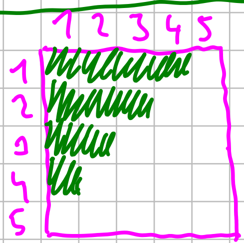
$(x,y) \in =$

značení: pro R relace mezi X, Y
$xRy \equiv (x,y) \in R$

② $x \backslash y$
x je dělitelem čísla y

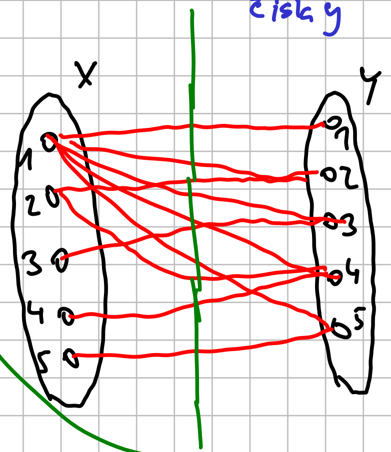


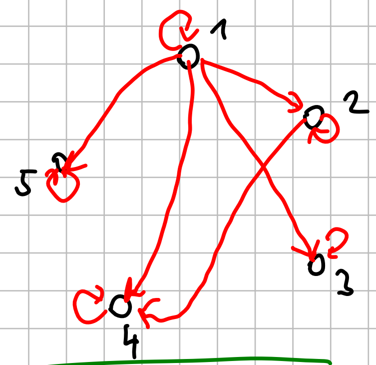
③ $x + y \leq 5$



④ $\emptyset$ prázdná relace

⑤ $X \times Y$ univerzální relace



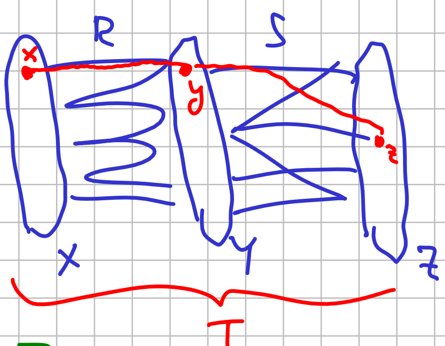


OPERACE

- <u>inverze relace</u>
  R je mezi X, Y
  R^{-1} je mezi Y, X
  $R^{-1} := \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$

- <u>diagonální relace</u>
  $\Delta_X := \{(x,x) \mid x \in X\}$

<u>Skládání:</u> R relace mezi X a Y
S relace mezi Y a Z
$\rightarrow T = R \circ S$ relace mezi X a Z.



$xTz \equiv \exists y \in Y : xRy \;\&\; ySz$

$R \circ \Delta_Y = R$
$\Delta_X \circ R = R$

FUNKCE (zobrazení)

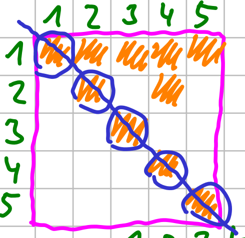
$x \in X$ → $\boxed{f}$ → $y \in Y$

(x,y)
(x,y')

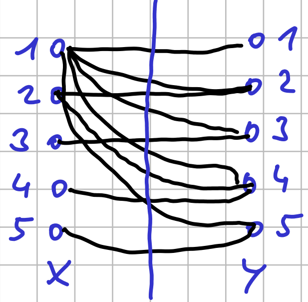
$f : X \to Y$

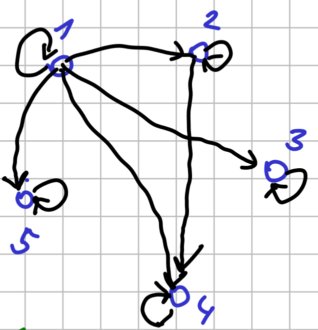
<u>Df:</u> Funkce z množiny X do množiny Y je relace A mezi X, Y t.ž. $\forall x \in X \; \exists! \, y \in Y : xAy$.

② $x \mid y$

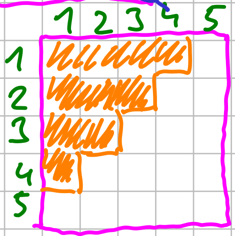


$\{1,2,3,4,5\}$





③ $x + y \leq 5$



$(x,y) \in R$

xRy

$(1,1) \in = \quad 1 = 1$

④ $\emptyset$ prázdná relace

⑤ $\{1,2,3,4,5\}^2$ universální relace

OPERACE S RELACEMI

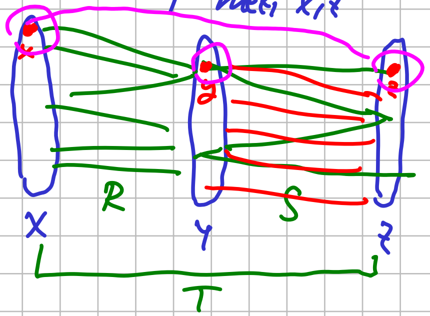
Inverze R je relace mezi X, Y

↳ R^{-1} je relace mezi Y, X

$R^{-1} := \{ (y,x) \mid (x,y) \in R \}$

Skládání: R mezi X,Y, S mezi Y,Z

T mezi X,Z $\quad T = R \circ S$



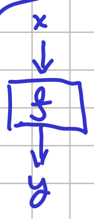
$R \circ \Delta_Y = R$

$xTz \equiv \exists y \in Y : xRy \;\&\; ySz.$

Diagonála Δ_X na X

$\Delta_X := \{ (x,x) \in X \}$

FUNKCE (zobrazení)



$f : X \to Y$

Df: Funkce z množiny X do množiny Y je relace A mezi X a Y t.ž. $\forall x \in X \; \exists! y \in Y : xAy$.

(x,y)

$(1,2)$
$(1,4)$
$(1,?)$

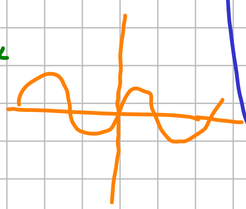
značení: $f(x) \dots y : xfy$

$f[S] := \{ f(x) \mid x \in S \}$

Příklady: ① $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1] \quad (\to \mathbb{R})$

$x \mapsto \sin x$

$x \mapsto a \cdot \sin \varphi x$



② $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, +1\}$

pro $x<0$ $\quad x=0 \quad$ pro $x>0$

③ $|A| : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (kardinalita) (mohutnost)

⓪ $f(x) = x$ identita $\quad \Delta_X$

④ $f(\underset{\in A}{a}, \underset{\in B}{b}) \in Y \quad A \times B \to Y$

SKLÁDÁNÍ FUNKCÍ

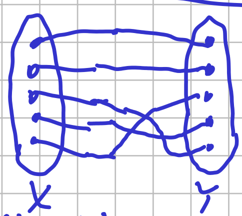
$f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$

Pak $f \circ g : X \to Z$

Pokud $h = f \circ g \quad h(x) = g(f(x))$

$g \circ f$?

VLASTNOSTI FUNKCÍ



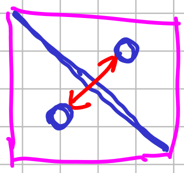
f^{-1} je funkce z Y do X

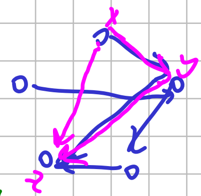
Df: Funkce $f : X \to Y$ je:

- prostá (injektivní) $\equiv \nexists x, x' \in X : x \neq x' \;\&\; f(x) = f(x')$
- na Y (surjektivní) $\equiv \forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y$
- vzájemně jednoznačná (bijektivní) (1-1) $\equiv \forall y \in Y \; \exists! x \in X : f(x) = y$

Df: Relace R na X je:

- **reflexivní** $\equiv \forall x \in X: xRx$
  $\Delta_X \subseteq R$
- **symetrická** $\equiv \forall x,y \in X: xRy \Rightarrow yRx$
  $R = R^{-1}$
- **antisymetrická** $\equiv \forall x,y \in X: xRy \ \&\ yRx \Rightarrow x=y$
- **tranzitivní** $\equiv \forall x,y,z \in X: xRy \ \&\ yRz \Rightarrow xRz$
  $R \circ R \subseteq R$





$x=y \ \&\ y=z \Rightarrow x=z$

$x<y \ \&\ y<z \Rightarrow x<z$

EKVIVALENCE

Df: Relace R na X je **ekvivalence** $\equiv$ R je reflexivní & symetrická & tranzitivní.

- rovnost čísel
- rovnost mod k
- geom. podobnost
- geom. shodnost
- „stejně velké množiny"

xRy

$\exists$ mezi nimi bijekce

Ekvivalenční třída prvku $x \in X$:

$R[x] = \{y \in X \mid xRy\}$

$xRy \Leftrightarrow x \in R[y]$

$\Leftrightarrow y \in R[x]$

Věta: ① $\forall x \in X \quad R[x] \neq \emptyset \qquad xRx \Rightarrow x \in R[x]$ (refl.)

② $\forall x,y \in X$: buď $R[x] = R[y]$ nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$

③ $\{R[x] \mid x \in X\}$ určuje ekvivalenci R jednoznačně.

Dk: ① ✓

② Dokážeme: pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] = R[y]$.

$\exists t \in R[x] \cap R[y]$

Chceme: $R[x] \subseteq R[y]$

tedy: $\forall a \in R[x]: a \in R[y]$

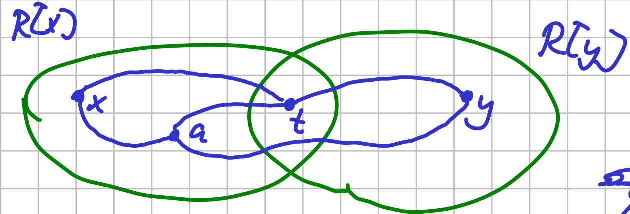
aRx $\quad xRt$, tRx $\quad yRt$, tRy

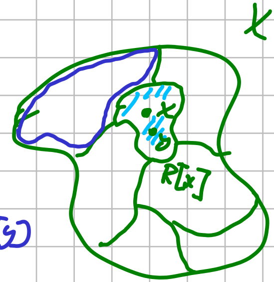
aRt

aRy

$a \in R[y]$

podobně: $R[y] \subseteq R[x]$





Df: Množinový systém $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ je **rozklad** množiny X $\equiv$

① $\forall A \in \mathcal{S}: A \neq \emptyset$

② $\forall A,B \in \mathcal{S}: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

③ $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = X$.

$xRy \Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{S}: \{x,y\} \subseteq A$.

$\sum_{x \in A} 1 = \dots$

mezi X a Y → mezi Y a X (inverze)