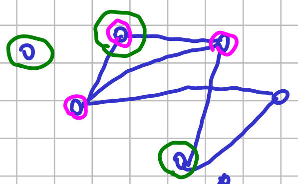
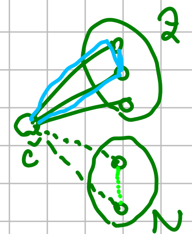
6 lidí v autobuse



Vždy: $\exists$ △ nebo $\exists$ (tečkovaný △)

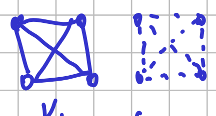
Dk:



buď $|Z| \geq 3$

nebo $|N| \geq 3$

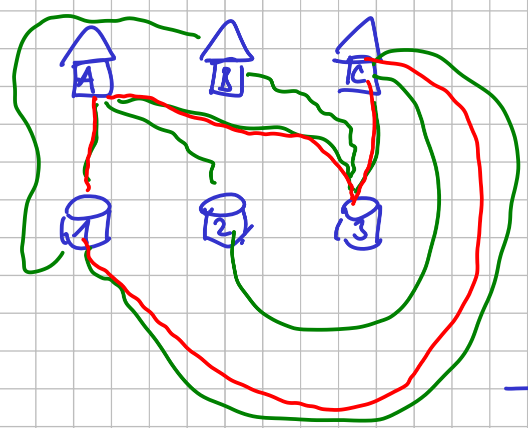
BTW

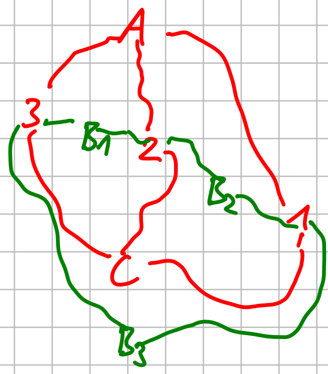


≥ 18 lidí

(Ramseyovy věty)

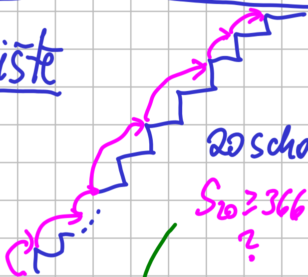
Rozvadění sousedé





→ rovinné kreslení grafů

Schodiště



20 schodů

$S_{20} \geq 366$?

S_n ≔ # způsobů, jak vyskákat schodiště výšky n 1-skoky a 2-skoky

$n = 1+2+2+1$

$S_{20} = 10946$

S_0 · 1

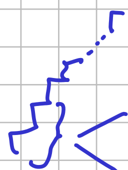
S_1 1

S_2 1+1, 2 — 2

S_3 1+1+1, 1+2, 2+1 — 3

S_4 5

$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$



1-skok → $n-1$ S_{n-1}

2-skok → $n-2$ S_{n-2}

0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 …

→ Fibonacciho čísla

$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$S_n = F_{n+1}$

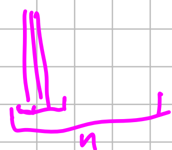
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$\doteq 1.618$ $\qquad$ $\doteq -0.618$ → 0

$$\boxed{F_n \doteq \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot 1.618^n}$$

→ Lineární rekurence

→ čárové kódy



Matematika

$b \backslash a \equiv \exists c: a = b \cdot c$

⇔

- definice
- tvrzení → věta ← důkaz
- axiomy
  - $\forall x \forall y: x+y = y+x$
  - ⋮

Důkaz sporem

- Chceme dokázat φ

  ↓

  vyvrátit $\neg\varphi$

Věta: Prvočísel je nekonečně mnoho.

Dk: Sporem: kdyby p_1 — p_n byla všechna prvočísla.

$Q := p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

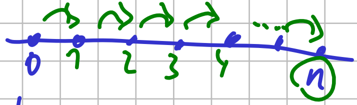
$(Q+1) \bmod p_i = 1 \Rightarrow Q+1$ není dělitelné žádným prvočíslem

& $Q+1$ je větší než všechna p_i

$\Rightarrow Q+1$ by také muselo být prvočíslo. ↯

Důkaz indukcí

$\{0,1,2,\dots\}$



Chceme: $\forall n \in \mathbb{N}: \varphi(n)$

Jak: $\varphi(0)$

$\forall n \in \mathbb{N}: \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1)$ krok

Proč indukce funguje?

- kdyby $\exists n: \neg\varphi(n)$ (sporem)

... uvažme nejmenší $n: \neg\varphi(n)$

... a co $n-1$?

$n=0$: $\varphi(0)$ ↯

$n>0$: $\varphi(n-1) \xRightarrow{\text{krok}} \varphi(n)$ ↯

Příklad:

Věta: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{2^0+2^1+2^2+\dots+2^n = 2^{n+1}-1}_{\varphi(n)}$$

Dk: (1) $\varphi(0)$ $\quad 2^0 = 2^1 - 1$

$1 = 2 - 1$

(2) IP: $2^0+\dots+2^n = 2^{n+1}-1$

$\varphi(n)$

Chceme: $\varphi(n+1)$ $\quad \underbrace{2^0+\dots+2^n}_{\text{podle IP } 2^{n+1}-1}+2^{n+1} = 2^{n+2}-1$

$2^{n+1}-1+2^{n+1} = 2^{n+2}-1$

NOTACE

čísla

$\lfloor x \rfloor$ $\lceil x \rceil$

dolní horní

celá část

$\lfloor 1.35 \rfloor = 1$

$\lceil 1.35 \rceil = 2$

$\lfloor 1 \rfloor = \lceil 1 \rceil = 1$

$\lfloor -1.5 \rfloor = -2$

$x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$1+2+3+\dots+n$

$2+4+\dots+n$?

$2^1+2^2+\dots+2^k$

$1+\dots+n$

Suma

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+\dots+n^3$$

$$\sum_{i\in\{1,3,5\}} i \qquad \sum_{\substack{i:\ 1\le i\le n \\ \& \ i \text{ prvočíslo}}} \frac{1}{i}$$

$$\sum_{i=2}^{1} i \qquad \sum_{\substack{i:\ i<2 \\ \& \ i \text{ prvočíslo}}} i$$

prázdná suma $:= 0$ $\quad 0+x=x$

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(i)\right) + f(n)$$

0

produkty

$$\prod_{i=1}^{n} i = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n}_{n!}$$

$$\prod_{i=1}^{0} i := 1 \qquad 1\cdot x = x$$

MNOŽINY

$\{1,2,5\} = \{1,2,1,1,5,2\}$

$\{\} = \emptyset$ $\quad \{\emptyset\} \neq \emptyset$

$\{☺, ☹\}$ $\quad \{\emptyset, \{1\}\}$

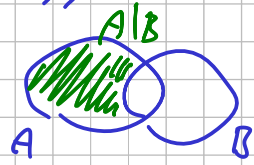
$|A| = \#$ prvků množiny A

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

Operace: $x \in A$ $\quad A \subseteq B$ $\quad (\equiv \forall x: (x\in A \Rightarrow x \in B))$

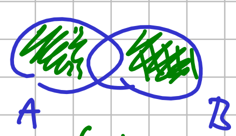
$A\cap B$ $\quad A \cup B$ $\quad A\setminus B := \{x\in A \mid x \notin B\}$

rozdíl



symetrická diference

$A \triangle B$



$(A\setminus B) \cup (B\setminus A)$

potence množiny $\quad 2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$

$\mathcal{P}(A)$

$|2^A| = 2^{|A|}$

$A = \{1,2\}$

$2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

$\{x\in\mathbb{N} \mid x \bmod 7 = 1\}$

výběr podmnožiny

$\{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

přejmenování

Věta: Neexistuje množina všech množin.

Dk: Sporem… kdyby existovala M

$$K := \{ x \in M \mid x \notin x \}$$

množina všech krotkých množin

Je K krotká?

je: $K \notin K$

$K \in K$

↯

není: $K \in K$

$K \notin K$

↯

$x \in x$? divoké množiny

$x \notin x$ krotké