Rozděl a panuj

Minule: Mergesort $T(n) = 2\cdot T(n/2) + \Theta(n)$, $T(1) = \Theta(1)$ $\Big\}$ $T(n) = \Theta(n \log n)$

Násobení čísel o n cifrách (desítkových BÚNO)

↳ školní alg.: $\Theta(n^2)$

Nápad:

X: $\overbrace{A}^{n/2}\ \overbrace{B}^{n/2}$ $\qquad X = A\cdot 10^{n/2} + B$

Y: $C\ D$ $\qquad Y = C\cdot 10^{n/2} + D$

BÚNO $n = 2^k$

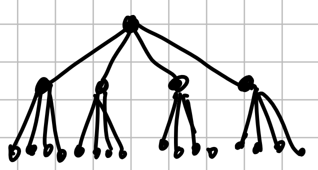
$$X\cdot Y = AC\cdot \overbrace{10^n}^{O(n)} \overbrace{+}^{O(n)} (AD + BC)\cdot \overbrace{10^{n/2}}^{O(n)} \overbrace{+}^{O(n)} BD$$

4 součiny $\frac{n}{2}$-cif. čísel

$T(n) = 4\cdot T(n/2) + n$

$T(1) = 1$

strom rekurze



#PP	velikost PP
1	n
4	$n/2$
4^2	$n/4$
⋮	⋮
4^i	$n/2^i$
$4^{\log_2 n}$	1

i: 0 → $\log_2 n$ hloubka; listy

$4^{\log_2 n} = (2^2)^{\log_2 n} = 2^{2\log_2 n} = (2^{\log_2 n})^2 = n^2$ ↯

Trik:

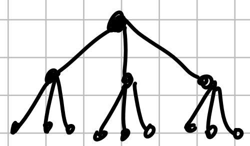
$(A+B)(C+D) = AC + AD + BC + BD$

$-AC - BD = AD + BC$

Stačí 3 násobení $\frac{n}{2}$-cif. čísel

$T(n) = 3T(n/2) + n$

$T(1) = 1$



#PP	velikost PP	čas na PP	čas na hladinu
1	n	n	$1\cdot n$
3	$n/2$	$n/2$	$3\cdot\frac{n}{2}$
3^2	$n/4$	$n/4$	$3^2\cdot\frac{n}{4}$
⋮	⋮	⋮	⋮
3^i	$n/2^i$	$n/2^i$	$3^i\cdot\frac{n}{2^i}$
	1		Σ

0 → $\log_2 n$

Geom. řady:

$s = q^0 + q^1 + \ldots + q^k$

$q\cdot s = q^1 + q^2 + \ldots + q^k + q^{k+1}$

$qs - s = q^{k+1} - 1$

$s(q-1)$

$$\boxed{s = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}}$$

pro nekonečnou: $\frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2 n} 3^i\cdot\frac{n}{2^i} = n\cdot\sum_{i=0}^{\log_2 n}\underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)}_{q}^i = \frac{q^{k+1}-1}{q-1} = \Theta(q^k) = \Theta\Big(\underbrace{\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\log_2 n}}_{\frac{3^{\log_2 n}}{n}}\Big)$$

$$= \Theta\left(n\cdot\frac{3^{\log_2 n}}{n}\right) = \Theta\big(\underbrace{3^{\log_2 n}}\big)$$

$$2^{\log_2 3\cdot\log_2 n} = (\underbrace{2^{\log_2 n}}_{n})^{\log_2 3} = n^{\log_2 3} \doteq n^{1.59}$$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{1.59})$$

Implementace:
- pro dost malý vstup zastavíme rekurzi a přepneme na brute-force alg.
- vyšší základ soustavy … třeba 2^{32}

Umí se: $O(n^{1+\varepsilon})$ pro každé $\varepsilon > 0$ (dělením na více částí)

závisí na ε

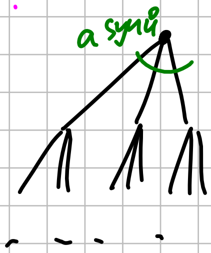
$O(n \log n)$ pomocí Fourierovy transformace (ADS2)

$O(n)$ F.t. + triky navíc

Rekurence obecně

$$T(n) = \underset{\#\text{ pp.}}{a}\cdot T(n/\underset{\text{faktor zmenšení}}{b}) + \underset{\text{lokální práce}}{\Theta(n^c)}, \quad T(1)=1$$

prozatím: $n = b^k$



na i-té hladině: a^i podproblémů velikosti $\frac{n}{b^i}$ } hloubka $= \log_b n$

čas na pp: $\left(\frac{n}{b^i}\right)^c$ $\longrightarrow$ čas na hladinu $a^i\cdot\left(\frac{n}{b^i}\right)^c$

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_b n} a^i\cdot\left(\frac{n}{b^i}\right)^c = n^c \sum_{i=0}^{\log_b n} \underbrace{\left(\frac{a}{b^c}\right)}_{q}^i = n^c\cdot\sum_{i=0}^{\log_b n} q^i$$

$$a^i\cdot\left(\frac{n}{b^i}\right)^c = \frac{a^i\cdot n^c}{b^{ic}} = n^c\cdot\left(\frac{a}{b^c}\right)^i$$

① $q = 1$ $\quad T(n) = n^c\cdot(\underbrace{\log_b n}_{\frac{\log n}{\log b}\sim\log n} \cancel{+1})\cdot 1 = \Theta(n^c\cdot\log n)$ $\quad$ např. Mergesort $a=2\ \ b=2\ \ c=1$

② $q < 1$ $\quad \sum_{i=0}^{\log_b n} q^i \le \sum_{i\ge 0} q^i = \frac{1}{1-q} = \Theta(1)$

$$T(n) = \Theta(n^c)$$

③ $q > 1$ $\quad \sum_{i=0}^{\log_b n} q^i = \frac{q^{\log_b n \cancel{+1}} \cancel{-1}}{\cancel{q-1}} \doteq q^{\log_b n} = \left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n} = \frac{a^{\log_b n}}{b^{c\cdot\log_b n}}$

$a^{\log_b n} = b^{\log_b a\cdot\log_b n} = (b^{\log_b n})^{\log_b a} = n^{\log_b a}$ $\quad$ zatím jsme nepotkáme

$b^{c\cdot\log_b n} = (b^{\log_b n})^c = n^c$

$$= \frac{n^{\log_b a}}{n^c}$$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$ $\quad$ např. násobení

Věta (Master Theorem, kuchařka na rekurence)

Rekurence $T(n) = a\cdot T(\lceil n/b\rceil) + \Theta(n^c)$, $T(1) = 1$ } pro $a\ge 1$, $b>1$, $c\ge 0$

má řešení:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^c\log n) & \text{pro } \left(\frac{a}{b^c}\right) = 1 \\ \Theta(n^c) & <1 \\ \Theta(n^{\log_b a}) & >1 \end{cases}$$

K Dk zbývá: případy, kdy n není mocnina b...

n^+ ... nejbližší vyšší mocnina b k n

n^- ... nejbližší nižší ...

$n^- \le n \le n^+ \qquad n^- \sim n^+$

$\left(\frac{n}{b}\right)^- \le \left\lceil\frac{n}{b}\right\rceil \le \left(\frac{n}{b}\right)^+$

$T(n^-) \le T(n) \le T(n^+)$

Násobení čtvercových matic — Strassenův alg.

podle def. $\Theta(n^3)$

BÚNO $n = 2^k$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_{X} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix}}_{Z}$$

(bloky velikosti $n/2 \times n/2$)

$I = AP + BR$, podobně pro J, K, L … 8 součinů matic řádu $\frac{n}{2}$

$$T(n) = 8\,T(n/2) + \Theta(n^2)$$

↳ kuchařka $a=8,\ b=2,\ c=2$, $\left(\frac{a}{b^c}\right) = 2$ → $\Theta(n^{\overbrace{\log_2 8}^{3}})$

Strassenův trik: 7 násobení stačí

$$T(n) = 7\cdot T(n/2) + \Theta(n^2)$$

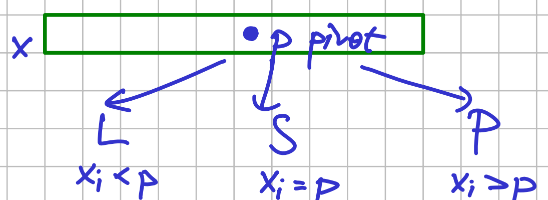
$a=7,\ b=2,\ c=2$ → $\Theta(n^{\overbrace{\log_2 7}^{\doteq 2.807}})$

Umí se: $\Theta(n^{2.373})$ Le Gall 2014

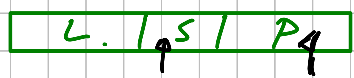
hypotéza: $O(n^{2+\varepsilon})$ pro každé $\varepsilon > 0$

Selekce – hledání k-tého nejmenšího prvku z x_1 —— x_n (např. medián)

QuickSelect



kdybych setřídil…



rekurzivní alg.:
- pokud $k \le |L|$: k-tý nejmenší v L
- pokud $|L| < k \le |L| + |S|$: je to pivot
- jinak: $(k - |L| - |S|)$-tý nejmenší v P

① nejlepší případ: p = medián

$|L|, |P| \le n/2$

$T(n) = T(n/2) + \Theta(n)$ $a=1,\ b=2$ $c=1$ $\xrightarrow{\text{kuchařka}}$ $q<1$, $T(n) = \Theta(n)$

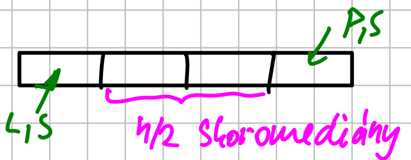
$n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \ldots = \Theta(n)$

② nejhorší: $p = \min$, $k = n$

$|L| = 0 \quad |S| = 1 \quad |P| = n-1$

$T(n) = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = \Theta(n^2)$

③



$|L|, |P| \le \frac{3}{4}n$ $T(n) = T(\frac{3}{4}n) + \Theta(n)$

$n + (\frac{3}{4})n + (\frac{3}{4})^2 n + \ldots = \Theta(n)$

④ randomizované hledání skoromediánu:

1. vyberu p náhodně
2. spočítám $x_i < p$, $x_i > p$
3. pokud p není skoromedián, restart.

$\Big\}\ \Theta(n)$

Věta: $E[\text{čas. složitost}] = \Theta(n)$

stačí: $E[\#\text{pokusů}] = \Theta(1)$

👁 $\Pr[\text{pokus uspěje}] \geq 1/2$

$\Downarrow$

$\mathbb{E}[\#\text{ pokusů}] \leq 2$

Lemma (o čekání):

Pokud pokus uspěje s pravděpodobností p, pak $\mathbb{E}[\#\text{ pokusů do 1. úspěchu}] = \frac{1}{p}$.

Dk: $\mathbb{E} = \sum_{n\geq 0} n \cdot \underbrace{\Pr[\#\text{ pokusů} = n]}_{(1-p)^{n-1}\cdot p}$

nebo: $\mathbb{E} = 1 + (1-p)\mathbb{E}$

$p \cdot \mathbb{E} = 1$

$\Rightarrow \mathbb{E} = 1/p$

5) volíme pivota náhodně

Rozdělíme běh na fáze.

Fáze končí výběrem skoromediánu.

👁 $\Pr[\text{fáze skončí}] \geq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\text{pokusů ve fázi}] \leq 2$

👁 fáze zmenší n aspoň $\frac{3}{4}$-krát

$\mathbb{E}[\text{čas na fázi}] = \Theta(n)$

$\sum$ přes fáze

$\Theta(n + \frac{3}{4}n + (\frac{3}{4})^2 n + \dots) = \Theta(n)$