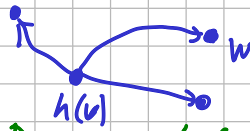
Dijkstrův algoritmus



1. $\forall v$ $h(v) \leftarrow +\infty$, $s(v) \leftarrow$ Nevidený
I $h(u) \leftarrow 0$, $s(u) \leftarrow$ Otevřený
2. Dokud existují otevřené vrcholy: — O(n) — ≤ n průchodů
3. $v \leftarrow$ otevřený s min. $h(v)$
4. Pro všechny hrany vw:
5. Pokud $h(v) + \ell(v,w) < h(w)$: — O(1)
6. $h(w) \leftarrow h(v) + \ell(v,w)$
7. $s(w) \leftarrow$ Otevřený — na každou hranu celkem max. jednou — O(m)
8. $s(v) \leftarrow$ Zavřený — E — I/D — $\forall$ vrchol zavřen max. jednou

Zatím víme: Funguje (skončí s $h(v) = d(u,v)$ pro všechny $v \in V$) kdykoli délky hran jsou přiroz. čísla.

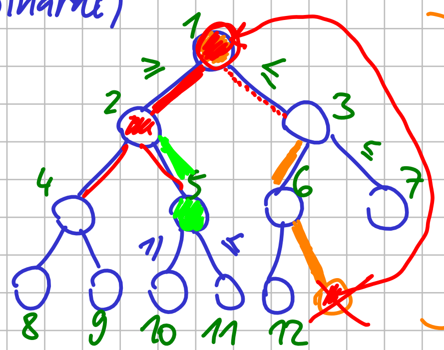
Časová složitost:
$O(n^2)$

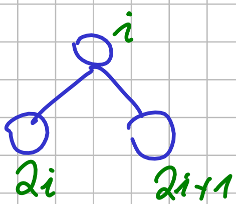
$O(n \cdot T_{Insert} + n \cdot T_{ExtMin} + m \cdot T_{Decrease})$

Pole $O(n \cdot 1 + n \cdot n + m \cdot 1) = O(n^2)$

Chceme DS pro dynamické minimum
- pamatuje si otevřené vrcholy a jejich ohodnocení
- Operace:
  - $O(\log n)$ $\leq n$ — ExtractMin – najde a smaže vrchol s min. ohodnocením
  - $O(\log n)$ $\leq n$ — Insert – vloží nový vrchol
  - $O(\log n)$ $\leq m$ — Decrease – sníží ohodnocení vrcholu

Halda (binární)





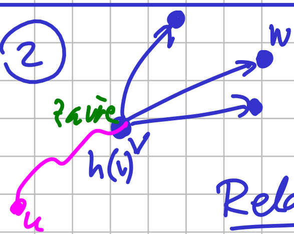
→ složitost: $O(n \cdot \log n + n \cdot \log n + m \log n)$
$O((n+m)\log n)$ ... mezi $n \log n$ a $n^2 \log n$
vyplatí se pro řídké grafy
pomalé pro husté ☹

$\exists$ Fibonacciho halda:
Insert, Decrease ~ $O(1)$
ExtractMin ~ $O(\log n)$
→ Dijkstra v $O(n \log n + m)$

---

① $\forall v$ má ohodnocení $h(v)$
zpočátku $+\infty$ (kromě $h(u)=0$)
konverguje k $d(u,v)$

②



snažím se $h(w)$ snížit na $h(v) + \ell(v,w)$ & otevřu w

Relaxace

③ Stavy, alespoň se nezachytil otevřený ⇔ od předch. relax. se změnilo $h(v)$ [nebo od startu alg.]

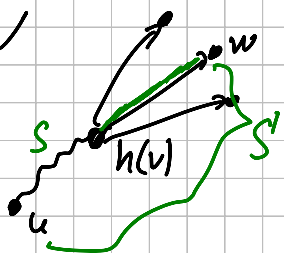
Relaxační alg:
1. $\forall v$ $h(v) \leftarrow +\infty$, $s(v) \leftarrow$ Nevidený
   $h(u) \leftarrow 0$, $s(u) \leftarrow$ Otevřený
2. Dokud $\exists v$ otevřený:
   Relaxuj v.

Dijkstra: vybere v otevřený s min. $h(v)$

Pro grafy, které nemohou mít zápor. hrany:

Invariant O: $\forall v$ ① $h(v)$ nikdy neroste
② pokud je $h(v)$ konečné, pak je rovno délce nějakého uv-sledu.

Dk: indukcí: ① ✓
② inic. OK
Relaxace:



$h(v) = \ell(S)$
$h(v) + \ell(v,w) = \ell(S')$

Lemma D (dosažitelnost):

Pokud se algoritmus zastavil, pak pro každý $v \in V$:

v je dosažitelný z u

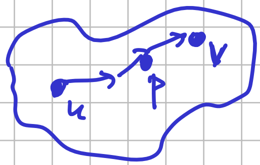
$\Updownarrow$

v je zavřený

$\Updownarrow$ triv.

$h(v)$ je konečné.

Viz korektnost BFS/DFS



Lemma V (vzdálenost)

Pokud se alg. zastavil, pak $\forall v \in V$ $h(v) = d(u,v)$.

Dk: ① pokud v není dosažitelný, pak $h(v) = +\infty = d(u,v)$.

② jinak vše konečné…

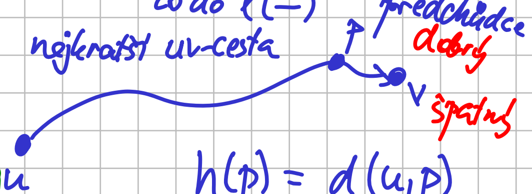
díky Inv. O: $h(v) \geq d(u,v)$.

Kdyby bylo $h(v) > d(u,v)$. $\longrightarrow$ v je špatný

Replay: Vybereme v špatný

t.ž. nejkratší uv-cesta má nejméně hran

co do $\ell(-)$



$h(p) = d(u,p)$ na konci

- někdy jsme toto $h(p)$ museli nastavit
- tehdy jsme p otevřeli
- později jsme p zavřeli $\rightarrow$ relaxovali
- po relaxaci $h(v) \leq \underbrace{h(p)}_{d(u,p)} + \ell(p,v)$

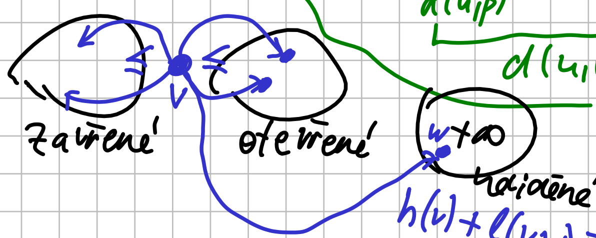
$\underbrace{\qquad\qquad}_{d(u,v)}$ ↯ Spor

Pro Dijkstrův alg. na grafech s $\ell \geq 0$:

Invariant M (monotonie):

Kdykoliv je o otevřený vrchol a z zavřený, pak: ① $h(z) \leq h(o)$

② $h(z)$ se nezmění



Dk: Indukcí podle výpočtu.

a) zpočátku ✓

b) při relaxaci: platí $h(z) \leq h(v) \leq h(o)$

- nově nastavené $h(w) \geq h(v)$
- zavřeným vrcholům se $h(w)$ nezmění

Věta: Dijkstrův alg. zavírá vrcholy v pořadí podle vzdálenosti od u (v grafu bez zápor. hran)

každý dosažitelný právě jednou,

$h(v)$ v okamžiku zavření je rovno $d(u,v)$.

Bellmanův-Fordův alg.

- Relax. alg.
- otevřené vrcholy ve frontě
  ↳ zavírá nejstarší z otevřených vrcholů

\# fází $\leq n$

po nejvýše $n-1$ fázích platí $h(v) \leq d(u,v)$

$\Rightarrow$ n-tá fáze nic neotevře

Věta: B-F spočítá vzdálenosti $d(u,-)$ v čase $O(n \cdot m)$ pro libovolný graf bez zápor. cyklů.

Df: Fáze výpočtu:

$F_0 :=$ otevření u

$F_i :=$ zavírání vrcholů otevř. v F_{i-1} a otevírání jejich následníků

Invariant: Na konci fáze F_i $\forall v \in V$ $h(v) \leq$ délka nejkratšího uv-sledu o max. i hranách.

může být $+\infty$

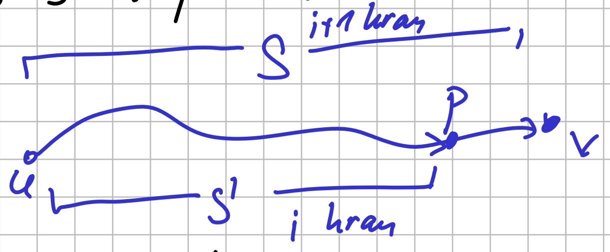
Dk Inv.: indukcí podle i

a) pro $i=0$ ✓

b) Na konci $(i+1)$-té fáze vrchol v, nejkr. uv-sled S

→ pokud S má $\le i$ hran → tvrzení platilo i v předch. fázi

→ S má právě i hran:



Podle IP na konci F_i máme $h(p) \le \ell(S')$

nastaveno nejvýše v F_i, tedy p otevřen → nejpozději v F_{i+1} p zavřen, tedy relaxován:

$$h(v) \le \underbrace{\underbrace{h(p)}_{\le \ell(S')} + \ell(p,v)}_{\le \ell(S)}$$