Algovize

Luděk Kučera

12. ledna 2008

1 Diskrétní Fourierova transformace

Scéna: *Kreslení funkce*

Cílem prvních několika scén je pouze naučit se applet ovládat. V první scéně je znázorněno okno, ve kterém je graf funkce. Toto okno budeme nazývat *funkční okno*. Graf je možno myší překreslit; vyzkoušejte si to.

Scéna: *Zadávání funkce vzorcem*

Funkci, jejíž graf je znázorněn v okně, je možno zadat i vzorcem, zapsaným do pole pro zadávání vzorce. Jako příklad je možno uvést funkce `sin(2*PI*x)`, `cos(2*PI*x)+exp(x-1)`, `sgn(x-0.5)`, `abs(x-0.5)+log(1+x)` (další použitelné funkce jsou tg, cotg, ln, sqrt). Podrobně je syntax popsána v příloze [příloha ještě není hotova]. Pro jednoduchost je kalkulátor upraven tak, že pokud je výraz pro některé x nedefinován (například po dělení nulou, logaritmus nebo odmocnina záporného čisla a podobně), nahradí jej nulou.

V řadě příkladů bude pro lepší zobrazení grafu funkce nutné změnit měřítko x-ové nebo y-ové osy změnou čísel v polích $x1$, $x2$ (levý a pravý okraj okna na ose x), $y1$, $y2$ (dolní a horní okraj okna na ose y).

Scéna: *Sinusoidy*

Nejdůležitější funkce ve Fourierově analýze jsou funkce odvozené z funkce sinus, z nichž některé si zobrazíme v této scéně. I když si myslím, že vlastnosti těchto funkcí dobře znáte, nebude na škodu si scénu rychle projít.

Základní sinusoidy jsou funkce $\sin(2\pi x)$ a $\cos(2\pi x)$, které jsou periodické s periodou 1. Proto je funkční okno upraveno na zobrazování hodnot zobrazovaných funkcí pro $x \in [0, 1]$.

Na obrazovce je zobrazeno další okno, které budeme z důvodů, které se stanou zřejmými později, nazývat *spektrální okno* a které budeme zatím používat velmi omezeným způsobem:

V dolní části spektrálního okna je řada checkboxů, jeden z nich je zvolen. Klepnutím na jiný checkbox jej zvolíte a tím se automaticky vypne checkbox, který byl zvolen před tím. Zvolený checkbox udává charakter funkce, která bude zobrazena ve funkčním okně.

Na začátku je zvolen modrý checkbox a ve funkčním okně se zobrazuje často používaná konstantní funkce $f(x) = 1$.

Zvolte nyní červený checkbox s označením 1. Zobrazí se sinusovka $f(x) = c\sin(2\pi x)$ a je-li zvolen zelený checkbox s označením 1, zobrazí se kosinusovka $f(x) = \cos(2\pi x)$. Obě tyto funkce mají periodu 1 odpovídající šířce funkčního okna.

Nyní zvolte nejprve červená a potom zelený checkbox označený 2. Zobrazí se sinusovka $f(x) = c\sin(2\dot{2}\pi x)$ respektive kosinusovka $f(x) = \cos(2\dot{2}\pi x)$. Jsou podobné dvěma předcházejícím funkcím, ale jejich perioda je poloviční, neboli jejich frekvence je dvojnásobná. Plná šíře funkčního okna zobrazuje dvě periody těchto funkcí.

Zbývající checkboxy ve spektrálním okně slouží pro zobrazení sinusovek a kosinusovek vyšších frekvencí. Klepnutím na červený nebo zelený čtvereček s označením k se zobrazí sinusovka $f(x) =$

$c\sin(2\dot{k}\pi x)$ respektive kosinusovka $f(x) = \cos(2\dot{k}\pi x)$. Opět mají podobný průběh jako základní funkce $\sin(2\pi x)$ a $\cos(2\pi x)$, ale periodu k-krát menší neboli frekvenci k=krát větší.

Výška červeného, zeleného nebo modrého sloupce ve spektrálním okně může být měněna zachycením za jeho horní okraj (nebo dolní okraj, vyčnívá-li pod osu x) a tažením; tím se mění amplituda zobrazované funkce. Zkuste si znovu volit sinusovky a kosinusovky různých frekvencí (a konstantní funkci) a měnit jejich amplitudy.

Scéna: *Lineární kombinace sinusoid*

Scéna je jednoduché, ale důležité cvičení na používání spektrálního okna. V předchozí scéně bylo možné volit jedinou funkce a měnit její amplitudu. V této scéně je možné zvolit několik funkcí více (třeba i všechny) a ve funkčním oknu se zobrazí jejich *součet*.

V řadě případů bude asi potřeba si pro lepší zobrazení funkce změnit měřítko osy y (změny na ose x se v této scéně provádět nedají).

Ve skutečnosti jsou v této scéně na začátku zvoleny *všechny* čtverečky ve spektrálním okně, ale amplitudy jsou až na jednu voleny rovny 0 (což je ekvivalentní nezvolení čtverečku).

Měňte amplitudy v různých sloupcích spektrálního okna jako při mixování zvuku a pozorujte, jak se mění odpovídající součtová funkce ve funkčním okně.

Libovolný sloupec ve spktrálním okně se dá “vypnout” kliknutím myší; odpovídající (ko)sinusovka pak nepřispívá k součtu ve spektrálním okně. Vypnutí má stejný účinek jako snížení amplitudy na 0.

Velmi doporučuji u této scény zůstat co nejdéle; volbou různých množin funkcí a především volbou jejich různých amplitud je možno vytvořit velmi bohatý soubor odvozených funkcí a pro další porozumění diskrétní Fourierově transformaci velmi pomůže, budete-li jich umět vytvořit co nejvíce, včetně funkcí velmi kuriózních a “divoce” se měnících.

Scéna: *Vzorkování spojité funkce*

Zapomeňme na chvíli na omezené rozlišení obrazovky a představujme si, že osa x ve funkčním okně je kontinuum všech reálných čísel. Pro popis funkce nakreslené nad takovou osou bychom potřebovali nekonečné množství údajů a pokud by funkce například představovala akustický nebo elektrický signál, musela by se každá hodnota odečíst v nekonečně malém časovém okamžiku, což pochopitelně není možné.

Při digitálním zpracování signálů se proto signál obvykle *vzorkuje*, což znamená, že se odečítá je v některých okamžicích, které následují po sobě s konstantními časovými rozestupy. Pokud je perioda signálu 1 a během ní provedeme n vzorků, pak je odečítáme v okamžicích $x_0, \ldots, x_{n-1}$, kde $x_\ell = \ell/n$ pro $\ell = 0, \ldots, n-1$.

Vzorkovací body jsou ve funkčním okně znázorněny svislými čárami a hodnoty funkce v těchto bodech jsou zvýrazněny malými kolečky. Počet vzorkovacích bodů lze změnit na ovladači (pole [**Hodnota** N]), ale měl by být malé sudé číslo. Vzhledem k pravidelnosti jejich rozmístění je tento údaj dostatečný pro jejich rozmístění.

Scéna: *Spektrální analýza*

Ve funkčním okně jsou zobrazeny dvě funkce. Funkce znázorněná černě (na začátku sinusovka) může být překreslena myší nebo změněna zadáním vzorce nové funkce, jak bylo popsáno v prvních dvou scénách této kapitoly. Je také možno měnit frekvenci vzorkování a měříka os.

Druhá funkce ve funkčním okně, znázorněná červeně, odpovídá amplitudám ve spektrálním okně způsobem, který byl popsán ve scéně o lineárních kombinacích sinusovek. Ve funkčním okně ji nelze překreslit.

Pro danou černou funkci jsou amplitudy ve spektrálním okně určovány Algovizí tak, aby jim odpovídající červená funkce se shodovala s černou *ve všech* vzorkovacích bodech. Je zřejmé, že nelze volit amplitudy tak, aby se červená funkce shodovala s černou všude; černý graf má daleko větší počet stupňů volnosti než soubor amplitud ve spektrálním okně, ale hlavní výsledek diskrétní Fourietovy analýzy říká, že shodu ve vzorkovacích bodech je možno zajistit pro *každou* periodickou černou funkci.

Soubor amplitud ve spektrálním okně se nazývá *spektrum* černé funkce. To je také důvod názvu spektrálního okna, kde jsou tyto hodnoty zobrazovány.

Měňte černou funkci a pozorujte její spektrum, vypočtené Algovizí a odpovídající červenou funkci. Zkuste si hlavně příklady funkcí, které se prudce (skokem) mění. U nich dochází k typickému průběhu rozdílové funkce, který je dobře znám z chování elektrických obvodů: pokud se hodnota černá funkce skokem změní a pak zůstává konstantní, červená funkce v reakci na skok "překmitne" za hodnotu černé funkce a pak se k její nové hodnotě přibližuje způsobem připomínajícím tlumené kmity kolem nové hodnoty černé funkce s tím, že ke shodě obou funkcí dochází ve vzorkovacích bodech. Analogie však není úplná: chování červené funkce je "časově reverzibilní" a rozdílová funkce se rozkmitá i v přípravě na skok dříve než k němu dojde.

Scéna: *Hledání spektra*

Tato scéna je patrně nejdůležitější a přináší mimořádně obtížné cvičení. Je třeba udělat to, co dělala v předchozí scéně Algovize: aproximovat černou funkci, která je nakreslena ve funkčním oknu, ve vzorkovacích bodech červenou funkcí. Výšky sloupečků ve spektrálním okně, představující amplitudy jednotlivých harmonických, je možno měnit tahem myši jak to již bylo vysvětleno dříve a cílem je dosáhnout toho. Tato scéna je další, ve které byste měli strávit hodně času a zkoušet aproximace nejrůznějších černých funkcí.

Tak například změna konstantní složky je posouvá červenou funkci nahoru a dolů a je ji třeba nastavit tak, aby střední hodnota černé i červené funkce přes celou periodu byla stejná. Základní sinová složka posouvá hodnoty červené funkce v první čtvrtině periody nahoru a hodnoty v 3. čtvrtině periody o stejnou hodnotu dolů, zatímco na začátku a konci periody a v její polovině jsou hodnoty červené funkce na této harmonické nezávislé. Na druhé straně základní kosinová složka nechává hodnoty v 1. a 3. čtvrtině stejné a mění hodnoty na začátku periody a v její polovině o stejnou velikost v opačných směrech. Vyšší harmonické, pokud mají menší amplitudu, umožňují dosáhnout jemného zvlnění průběhu.

Vzhledem k obtížnosti úlohy by bylo překvapivé, kdyby začátečník našek správně úplné spektrum. Je proto možno požádat o pomoc - nastavení správné amplitudy pro jednu složku spektra klepnutím na čtverec označený '?' pod příslušným sloupcem ve spektrálním okně.

Důležitým, ale obtížným úkolem je umět vytvořit spektrum černé funkce, která se objeví při vstupu do scény a mění svou hodnotu skokem v polovině funkčního okna (a na jeho konci se vrací zpět).

Scéna: *Spektrální komprese*

Tato scéna je stejná jako předchozí, liší se ale poněkud v ovládání a i svým cílem. Ve spektrálním oknu je možno některé sloupce, tj. složek spektra, deaktivovat klepnutím na čtvereček pod sloupcem. Vypnuté sloupce pak nepřispívají do lineární kombinace, která je uvedena v popisu předchozí scény. To pochopitelně vede k tomu, že červená lineární kombinace sinusoid se již výchozí černé funkci ani ve vzorkovacích bodech. Je ale možno pozorovat, že pokud se anulují vysoké harmonické, tedy sloupce určující amplitudy sinusoid s vysokou frekvencí, zůstává celkový charakter funkce změněn jen málo. Pokud například funkce popisuje akustický signál, pak odebráním vysokých harmonických se může mírně změnit barva tónu, ale signál není zásadně změněn; například řeč je i nadále srozumitelná a hudba působí stejným dojmem.

Podobného principu se používá i i u známé obrazové komprese JPEG, kde se provede spektrální rozklad dat, méně důležité harmonické se potlačí nebo omezí a pak se z upraveného spektra zrekonstruuje upravený obraz, který je mnohdy velmi obtížné odlišit od původního. Přitom ale je množství informace obsažené ve spektru sníženo a proto dochází k datové kompresi. Na druhé straně je ovšem známo, že v některých případech, například v místě, kde se stýkají dvě jasné a monochromatické a barevně rozlišené plochy, mohou vznikat artefakty, které jsou způsobeny podobnými jevy jako jsou překmity, které byly popsány v minulé scéně.

Standardní JPEG je sice založen na kosinové transformaci, která je poněkud odlišná od zde popsaného způsobu vytváření spektra, ale rozdíl je spíše formální a zaměřený na snadnější provádění výpočtů a základní podstata obou transformací je stejná.