

## Doporučené příklady k Teorii množin, LS 2022/2023

### 1. přednáška, 16. 2. 2023

1. Napište „množina  $x$  je prázdná“ (přesněji „množina  $x$  nemá žádné prvky“) formulí základního jazyka teorie množin.
2. Dokažte  $((x \subseteq y) \wedge (y \subset z)) \rightarrow x \subset z$ .

### 2. přednáška, 23. 2. 2023

3. Napište „množina  $x$  je jednoprvková“ formulí základního jazyka teorie množin.
4. Dokažte, že „množina všech množin“ neexistuje (s využitím axiomu vydělení).
5. Dokažte  $(\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$  (s využitím axiomu dvojice).
6. Rozepište trojici  $(a, b, c)$  jako množinu jen pomocí složených závorek.
7. Nechť  $a$  je libovolná množina. Co lze říct o množinách

(a)  $\bigcup \mathcal{P}(a)$ ,

(b)  $\mathcal{P}(\bigcup a)$ ?

8. Ukažte, že axiom fundovanosti (spolu s ostatními axiomy) zakazuje existenci množin, které jsou prvky sama sebe, a obecněji existenci konečných cyklů v relaci náležení (tj. množin  $y_1, y_2, \dots, y_n$  takových, že  $y_1 \in y_2 \wedge y_2 \in y_3 \wedge \dots \wedge y_{n-1} \in y_n \wedge y_n \in y_1$ ).

### 3. přednáška, 2. 3. 2023

9. Předpokládejme, že  $A, B$  jsou třídivé proměnné zastupující třídivé termy  $\{x; \varphi(x)\}, \{y; \psi(y)\}$ , kde  $\varphi(x), \psi(x)$  jsou formule základního jazyka teorie množin. Rozepište formuli  $A \subset B$  v základním jazyce teorie množin.
10. Předpokládejme, že  $a$  je neprázdná množina. Musí být  $\bigcap a$  množina?
11. Rozhodněte, zda pro univerzální třídu  $V$  platí  $\mathcal{P}(V) = V$ .
12. Ukažte, že pro třídu  $X$  obecně neplatí  $X \times X^2 = X^3$  (zvolte např.  $X = \{\emptyset\}$ ).

#### 4. přednáška, 9. 3. 2023

13. Ověřte, že pro libovolnou relaci  $R$  a relaci identity  $\text{Id}$  je  $R \circ \text{Id} = \text{Id} \circ R = R$ .
14. Ověřte, že pro libovolné množiny  $x, y$  a relaci náležení  $E$  platí

$$(x, y) \in E \circ E \leftrightarrow x \in \bigcup y.$$

15. Ověřte, že pro každou neprázdnou množinu  $x$  a neprázdnou třídu  $Y$  platí

$$\bigcup \bigcup \bigcup^x Y = x \cup Y.$$

16. Je některá z relací  $E, \text{Id}$  uspořádáním, případně ostrým uspořádáním?

#### 5. přednáška, 16. 3. 2023

17. Napište definici „uspořádání  $R$  na třídě  $A$  je *dobré*“ jako formuli (s využitím zavedených zkratk a rozšíření jazyka).
18. Najděte nějaké množiny  $x$ , na nichž je relace náležení ostré uspořádání, a navíc uspořádání  $E \cup \text{Id}$  je na  $x$  dobré.

#### 6. přednáška, 30. 3. 2023

19. Uvažujme potenční množinu  $\mathcal{P}(x)$  množiny  $x$  uspořádanou relací  $\subseteq$ . Ověřte, že pro každou podmnožinu  $A \subseteq \mathcal{P}(x)$  platí  $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$ .
20. Dokažte, že každá neklesající funkce z  $[0, 1]$  do  $[0, 1]$  (ne nutně spojitá) má pevný bod. Můžete napodobit důkaz lemmatu o monotónním zobrazení mezi potenčními množinami.
21. Ověřte, že funkce  $g : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  definovaná jako  $g((m, n)) = 2^m \cdot 3^n$  je prostá, a že funkce  $h : \omega \times \omega \rightarrow \omega$  definovaná jako  $h((m, n)) = 2^m \cdot (2n + 1) - 1$  je bijekce mezi  $\omega \times \omega$  a  $\omega$ . (Symbolem  $\omega$  označujeme množinu  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Přirozená čísla a operace s nimi chápeme zatím intuitivně.)
22. Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty pro „intuitivně“ chápané množiny  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{Q}$  dokažte, že  $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$ . (Racionální čísla např. můžeme reprezentovat jako celočíselné zlomky v základním tvaru).
23. Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty dokažte, že úsečka  $[0, 1]$  a čtverec  $[0, 1] \times [0, 1]$  mají stejnou mohutnost. Využijte např. desetinný rozvoj reálných čísel (která zatím chápeme intuitivně).
24. Pokuste se definovat „ $x$  je konečná množina“ (aspoň dvěma různými způsoby; např. pomocí uspořádání nebo zobrazení).
25. Napište formuli pro  $\text{Fin}(x)$  podle Tarského definice konečnosti (každá neprázdná podmnožina  $\mathcal{P}(x)$  má maximální prvek vzhledem k inkluzi).

## 7. přednáška, 6. 4. 2023

26. Ověřte, že v každé lineárně uspořádané množině jsou každé dvě její dolní podmnožiny porovnatelné inkluzí.
27. Necht'  $R$  je lineární uspořádání na množině  $A$ ,  $S$  je lineární uspořádání na množině  $B$  a  $F, G$  jsou počátková vnoření z  $A$  do  $B$  vzhledem k  $R$  a  $S$ . Musí nutně platit  $F \subseteq G$  nebo  $G \subseteq F$ ?
28. Ověřte, že je-li  $R$  třída zobrazení lineárně uspořádaná inkluzí (tedy tvoří řetězec vzhledem k  $\subseteq$ ), pak  $\bigcup R$  je opět zobrazení.
29. Ověřte, že v každé uspořádané množině je sjednocení systému libovolně mnoha dolních množin dolní množina.
30. Ověřte jednoznačnost ve větě o porovnávání dobrých uspořádání: tedy pokud  $A$  a  $B$  jsou dobře uspořádané množiny, pak zobrazení  $F$ , které je izomorfismem  $A$  a dolní množiny  $B$  nebo izomorfismem dolní množiny  $A$  a  $B$ , je určeno jednoznačně.

## 8. přednáška, 13. 4. 2023

31. Dokažte, že pro každou konečnou množinu  $x$  a každé zobrazení  $f$  s definičním oborem  $x$  platí  $\text{Rng}(f) \preceq x$ . Můžete použít např. princip indukce pro konečné množiny.
32. Dokažte, že každou konečnou množinu  $x$  lze dobře uspořádat. Můžete opět postupovat indukcí pro konečné množiny.

## 9. přednáška, 20. 4. 2023

33. Dokažte, že množina  $\omega$  všech přirozených čísel je dedekindovsky nekonečná. (Např. stačí ukázat, že funkce následníka je prostá, ale jejím oborem hodnot není celá  $\omega$ .)
34. Dokažte princip silné indukce pro přirozená čísla: Je-li  $X \subseteq \omega$  podmnožina splňující 1)  $0 \in X$  a 2)  $(\forall n \in \omega)(n \subseteq X \rightarrow n \in X)$ , pak  $X = \omega$ . Můžete využít, že náležení je dobré ostré uspořádání na  $\omega$ .
35. Dokažte, že pro každé zobrazení  $f$  s definičním oborem  $\omega$  platí  $\text{Rng}(f) \preceq \omega$ . Využijte existence dobrého uspořádání na  $\omega$ .

## 10. přednáška, 27. 4. 2023

36. Nechť  $A$  je nespočetná,  $B$  spočetná a  $C$  konečná množina. Dokažte, že množiny  $A \cup C$  a  $A - C$  jsou nespočetné, zatímco  $B \cup C$  a  $B - C$  jsou spočetné.
37. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině  $\omega \times \omega$  je dobré.
38. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině  $\omega \times 2$  je izomorfní s uspořádáním  $\in$  na množině  $\omega$ .
39. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině  $2 \times \omega$  není izomorfní s uspořádáním  $\in$  na množině  $\omega$ .
40. Ověřte, že maximo-lexikografické uspořádání na množině  $\omega \times \omega$  je izomorfní s uspořádáním  $\in$  na množině  $\omega$ .

## 11. přednáška, 4. 5. 2023

41. (Pokrytí racionálních čísel intervaly)  
Nechť  $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$  je množina všech racionálních čísel mezi 0 a 1. Je-li  $I = (a, b)$  otevřený interval, jeho délku definujeme jako  $d(I) = b - a$ .
  - (a) Dokažte (indukcí), že pokud  $n \in \mathbb{N}$  a  $I_1, I_2, \dots, I_n$  jsou otevřené intervaly splňující  $A \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$ , pak pro součet jejich délek platí

$$\sum_{k=1}^n d(I_k) \geq 1.$$

Využijte hustoty  $\mathbb{Q}$ , tj. mezi každými dvěma různými reálnými čísly je aspoň jedno racionální.

- (b) Dokažte, že pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje nekonečná posloupnost otevřených intervalů  $I_1, I_2, \dots$  taková že  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$  a

$$\sum_{i=1}^{\infty} d(I_k) < \varepsilon.$$

Využijte spočetnosti množiny  $\mathbb{Q}$ .

12. přednáška, 11. 5. 2023

42. Ukažte, že následující dvě definice spojitosti funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  v bodě  $a$  jsou ekvivalentní:

(a)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(x \in (a - \delta, a + \delta) \rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon))$

(b) Je-li  $(a_1, a_2, \dots)$  posloupnost splňující  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , pak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a).$$

V důkaze implikace (b)  $\Rightarrow$  (a) najděte krok, kde využíváte axiom výběru.

43. Ověřte, že sjednocení libovolného řetězce prostých zobrazení (vzhledem k inkluzi) je prosté zobrazení.

44. Pomocí principu maximality dokažte: je-li  $(A, \leq)$  uspořádaná množina, pak pro každý řetězec  $B \subseteq A$  existuje řetězec  $C$  splňující  $B \subseteq C \subseteq A$ , který je s touto vlastností maximální v inkluzi.

45. Dokažte, že princip maximality je ekvivalentní variantě principu maximality, kde se předpokládá, že každý řetězec má supremum (místo pouhé horní meze).

46. Odvoďte princip dobrého uspořádání z principu maximality. (Uvažujte dobrá uspořádání na podmnožinách a porovnejte je relací „rozšiřování“.)

13. přednáška, 18. 5. 2023

47. Dokažte, že třída  $X$  je tranzitivní právě tehdy, když  $\bigcup X \subseteq X$ .
48. Dokažte, že je-li  $X$  tranzitivní třída, pak náležení je tranzitivní na  $X$  právě tehdy, když každý prvek  $x \in X$  je tranzitivní množina.
49. Dokažte, že pro každá dvě ordinální čísla  $x, y$  platí  $x \in y \leftrightarrow x \subset y$ . (Pro zpětnou implikaci stačí dokázat, že  $x$  je nejmenší prvek  $y - x$ .)
50. Dokažte, že je-li  $X$  tranzitivní vlastní třída, dobře ostře uspořádaná náležením, pak  $X = \mathbf{On}$ .
51. Dokažte, že každá neprázdna podtřída  $\mathbf{On}$  má nejmenší prvek vzhledem k  $\in$ . Můžete předpokládat, že  $\in$  je lineární ostré uspořádání na  $\mathbf{On}$ .
52. Uvažujme potenční třídu  $\mathcal{P}(X)$  třídy  $X$  uspořádanou relací  $\subseteq$ . Ověřte, že pro každou neprázdnu část  $A \subseteq \mathcal{P}(X)$  platí  $\inf_{\subseteq} A = \bigcap A$ , a podobně pro každou část  $A \subseteq \mathcal{P}(X)$  platí  $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$ .
53. Dokažte, že  $\omega = \sup_{<} \omega$  v uspořádání  $(\mathbf{On}, <)$ . (Hlavní krok je odvození identity  $\bigcup \omega = \omega$ ).

Bonusová otázka

54. \* Existuje nespočetný ordinál? Pokud ano, lze jeho existenci dokázat v ZF, tj. bez axiomu výběru?