Doporučené příklady k Teorii množin, LS 2020/2021

1. přednáška, 2. 3. 2021

1. Napište „množina x je prázdná“ (přesněji „množina x nemá žádné prvky“) formulí základního jazyka teorie množin.
2. Dokažte $((x \subseteq y) \wedge (y \subset z)) \rightarrow x \subset z$.

2. přednáška, 9. 3. 2021

3. Napište „množina x je jednoprvková“ formulí základního jazyka teorie množin.
4. Dokažte, že „množina všech množin“ neexistuje (s využitím axiomu vydělení).
5. Dokažte $(\forall z)(x \in z \leftrightarrow y \in z) \rightarrow x = y$ (s využitím axiomu dvojice).
6. Rozepište trojici (a, b, c) jako množinu jen pomocí složených závorek.
7. Nechť a je libovolná množina. Co lze říct o množinách
   (a) $\bigcup \mathcal{P}(a)$,
   (b) $\mathcal{P}(\bigcup a)$?

3. přednáška, 16. 3. 2021

8. Ukažte, že axiom fundovanosti (spolu s ostatními axiomy) zakazuje existenci množin, které jsou prvky sama sebe, a obecněji existenci konečných cyklů v relaci náležení (tj. množin $y_1, y_2, \ldots, y_n$ takových, že $y_1 \in y_2 \wedge y_2 \in y_3 \wedge \cdots \wedge y_{n-1} \in y_n \wedge y_n \in y_1$).
9. Předpokládejme, že A, B jsou třídové proměnné zastupující třídové termy $\{x; \varphi(x)\}, \{y; \psi(y)\}$, kde $\varphi(x), \psi(x)$ jsou formule základního jazyka teorie množin. Rozepište formuli $A \subset B$ v základním jazyce teorie množin.
10. Předpokládejme, že a je neprázdná množina. Musí být $\bigcap a$ množina?

4. přednáška, 23. 3. 2021

11. Ukažte, že pro třídu X obecně neplatí $X \times X^2 = X^3$ (zvolte např. $X = \{\emptyset\}$).

12. Ověřte, že pro libovolnou relaci R a relaci identity Id je $R \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ R = R$.

13. Ověřte, že pro libovolné množiny x, y a relaci náležení E platí $(x, y) \in E \circ E \leftrightarrow x \in \bigcup y$.

14. Ověřte, že pro každou neprázdnou množinu x a neprázdnou třídu Y platí $\bigcup\bigcup\bigcup {}^{x}Y = x \cup Y$.

5. přednáška, 30. 3. 2021

15. Napište definici „uspořádání R na třídě A je *dobré*“ jako formuli (s využitím zavedených zkratek a rozšíření jazyka).

16. Najděte nejaké množiny x, na nichž je relace náležení ostré uspořádání, a navíc uspořádání $\mathrm{E} \cup \mathrm{Id}$ je na x dobré.

6. přednáška, 6. 4. 2021

17. Uvažujme potenční množinu $\mathcal{P}(x)$ množiny x uspořádanou relací $\subseteq$. Ověřte, že pro každou podmnožinu $A \subseteq \mathcal{P}(x)$ platí $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$.

18. Dokažte, že každá neklesající funkce z $[0, 1]$ do $[0, 1]$ (ne nutně spojitá) má pevný bod. Můžete napodobit důkaz lemmatu o monotónním zobrazení mezi potenčními množinami.

19. Ověřte, že funkce $g : \omega \times \omega \to \omega$ definovaná jako $g(m, n) = 2^m \cdot 3^n$ je prostá, a že funkce $h : \omega \times \omega \to \omega$ definovaná jako $h(m, n) = 2^m \cdot (2n + 1) - 1$ je bijekce mezi $\omega \times \omega$ a ω. (Symbolem ω označujeme množinu $\{0, 1, 2, \dots\}$. Přirozená čísla a operace s nimi chápeme zatím intuitivně.)

20. Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty pro „intuitivně“ chápané množiny $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Q}$ dokažte, že $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$. (Racionální čísla např. můžeme reprezentovat jako celočíselné zlomky v základním tvaru).

21. Pomocí Cantorovy–Bernsteinovy věty dokažte, že úsečka $[0, 1]$ a čtverec $[0, 1] \times [0, 1]$ mají stejnou mohutnost. Využijte např. desetinný rozvoj reálných čísel (která zatím chápeme intuitivně).

22. Pokuste se definovat „x je konečná množina“ (aspoň dvěma různými způsoby; např. pomocí uspořádání nebo zobrazení).

7. přednáška, 13. 4. 2021

23. Napište formuli pro $\mathrm{Fin}(x)$ podle Tarského definice konečnosti (každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(x)$ má maximální prvek vzhledem k inkluzi).

24. Ověřte, že v každé lineárně uspořádané množině jsou každé dvě její dolní podmnožiny porovnatelné inkluzí.

25. Nechť R je lineární uspořádání na množině A, S je lineární uspořádání na množině B a F, G jsou počátková vnoření z A do B vzhledem k R a S. Musí nutně platit $F \subseteq G$ nebo $G \subseteq F$?

8. přednáška, 20. 4. 2021

26. Ověřte, že je-li R třída zobrazení lineárně uspořádaná inkluzí (tedy tvoří řetězec vzhledem k $\subseteq$), pak $\bigcup R$ je opět zobrazení.

27. Ověřte, že v každé uspořádané množině je sjednocení systému libovolně mnoha dolních množin dolní množina.

9. přednáška, 27. 4. 2021

28. Dokažte, že pro každou konečnou množinu x a každé zobrazení f s definičním oborem x platí $\mathrm{Rng}(f) \preccurlyeq x$. Můžete použít např. princip indukce pro konečné množiny.

29. Dokažte, že každou konečnou množinu x lze dobře uspořádat. Můžete opět postupovat indukcí pro konečné množiny.

10. přednáška, 4. 5. 2021

30. Dokažte, že množina ω všech přirozených čísel je dedekindovsky nekonečná. (Např. stačí ukázat, že funkce následníka je prostá, ale jejím oborem hodnot není celá ω.)

31. Dokažte princip silné indukce pro přirozená čísla: Je-li $X \subseteq \omega$ podmnožina splňující 1) $0 \in X$ a 2) $(\forall n \in \omega)(n \subseteq X \to n \in X)$, pak $X = \omega$. Můžete využít, že náležení je dobré ostré uspořádání na ω.

32. Dokažte, že pro každé zobrazení f s definičním oborem ω platí $\mathrm{Rng}(f) \preccurlyeq \omega$. Využijte existence dobrého uspořádání na ω.

33. Nechť A je nespočetná, B spočetná a C konečná množina. Dokažte, že množiny $A \cup C$ a $A - C$ jsou nespočetné, zatímco $B \cup C$ a $B - C$ jsou spočetné.

11. přednáška, 11. 5. 2021

34. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $\omega \times \omega$ je dobré.

35. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $\omega \times 2$ je izomorfní s uspořádáním $\in$ na množině ω.

36. Ověřte, že lexikografické uspořádání na množině $2 \times \omega$ není izomorfní s uspořádáním $\in$ na množině ω.

37. Ověřte, že maximo-lexikografické uspořádání na množině $\omega \times \omega$ je izomorfní s uspořádáním $\in$ na množině ω.

12. přednáška, 18. 5. 2021

38. (Pokrytí racionálních čísel intervaly)
    Nechť $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ je množina všech racionálních čísel mezi 0 a 1. Je-li $I = (a, b)$ otevřený interval, jeho délku definujeme jako $d(I) = b - a$.

    (a) Dokažte (indukcí), že pokud $n \in \mathbb{N}$ a $I_1, I_2, \ldots, I_n$ jsou otevřené intervaly splňující $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$, pak pro součet jejich délek platí

    $$\sum_{k=1}^{n} d(I_k) \geq 1.$$

    Využijte hustoty $\mathbb{Q}$, tj. mezi každými dvěma různými reálnými čísly je aspoň jedno racionální.

    (b) Dokažte, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nekonečná posloupnost otevřených intervalů $I_1, I_2, \ldots$ taková že $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ a

    $$\sum_{i=1}^{\infty} d(I_k) < \varepsilon.$$

    Využijte spočetnosti množiny $\mathbb{Q}$.

13. přednáška, 25. 5. 2021

39. Ukažte, že následující dvě definice spojitosti funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ v bodě a jsou ekvivalentní:

    (a) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)(\ x \in (a-\delta, a+\delta) \to f(x) \in (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)\ )$

    (b) Je-li $(a_1, a_2, \dots)$ posloupnost splňující $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, pak
    $$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

    V důkaze implikace (b) $\Rightarrow$ (a) najděte krok, kde využíváte axiom výběru.

40. Ověřte, že sjednocení libovolného řetězce prostých zobrazení (vzhledem k inkluzi) je prosté zobrazení.

41. Pomocí principu maximality dokažte: je-li $(A, \leq)$ uspořádaná množina, pak pro každý řetězec $B \subseteq A$ existuje řetězec C splňující $B \subseteq C \subseteq A$, který je s touto vlastností maximální v inkluzi.

42. Dokažte, že princip maximality je ekvivalentní variantě principu maximality, kde se předpokládá, že každý řetězec má supremum (místo pouhé horní meze).

43. Odvoďte princip dobrého uspořádání z principu maximality. (Uvažujte dobrá uspořádání na podmnožinách a porovnejte je relací "rozšiřování".)

44. Dokažte, že třída X je tranzitivní právě tehdy, když $\bigcup X \subseteq X$.

45. Dokažte, že je-li X tranzitivní třída, pak náležení je tranzitivní na X právě tehdy, když každý prvek $x \in X$ je tranzitivní množina.

46. Dokažte, že pro každá dvě ordinální čísla x, y platí $x \in y \leftrightarrow x \subset y$. (Pro zpětnou implikaci stačí dokázat, že x je nejmenší prvek $y - x$.)

14. přednáška, 1. 6. 2021

47. Dokažte, že je-li X tranzitivní vlastní třída, dobře ostře uspořádaná náležením, pak $X = \mathbf{On}$.

48. Uvažujme potenční třídu $\mathcal{P}(X)$ třídy X uspořádanou relací $\subseteq$. Ověřte, že pro každou neprázdnou část $A \subseteq P(X)$ platí $\inf_{\subseteq} A = \bigcap A$, a podobně pro každou část $A \subseteq P(X)$ platí $\sup_{\subseteq} A = \bigcup A$.

49. Dokažte, že $\omega = \sup_{<} \omega$ v uspořádání $(\mathbf{On}, <)$. (Hlavní krok je odvození identity $\bigcup \omega = \omega$).

Bonusová otázka

50. * Existuje nespočetný ordinál? Pokud ano, lze jeho existenci dokázat v ZF, tj. bez axiomu výběru?