Dodatky k Teorii množin

9.6.2020

1 Dedekindovy řezy

Dedekindovy řezy jsou jednou z možností, jak definovat reálná čísla pomocí racionálních čísel. Zatím uvažujeme racionální čísla intuitivně, protože formálně je nemáme definovaná (ani přirozená čísla zatím ne).

Podmnožina $X \subseteq \mathbb{Q}$ je *Dedekindův řez*, pokud je X dolní množina, a navíc existuje-li $\sup X$, pak $\sup X \in X$. Např.

- $\mathbb{Q} \cap (-\infty, 1)$ není Dedekindův řez,
- $\mathbb{Q} \cap (-\infty, 1]$ je Dedekindův řez (odpovídající reálnému číslu 1),
- $\mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$ je Dedekindův řez (odpovídající reálnému číslu $\sqrt{2}$).

2 Cantorova–Bernsteinova věta

Nejprve připomeňme znění Cantorovy–Bernsteinovy věty.

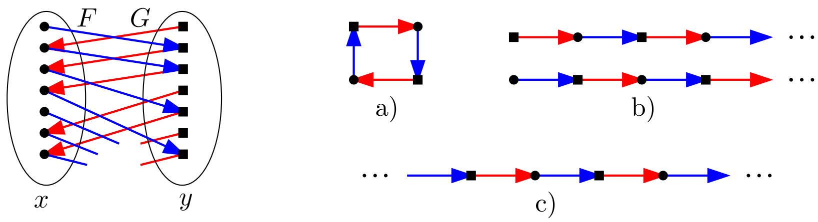
Věta. *Pro každé množiny x, y platí $(x \preceq y \wedge y \preceq x) \rightarrow x \approx y$.*

2.1 Grafový „důkaz“ Cantorovy–Bernsteinovy věty

Občas se můžeme setkat s následujícím názorným grafovým důkazem. Nechť F je prosté zobrazení x do y a G prosté zobrazení y do x. Tato prostá zobrazení můžeme reprezentovat jako orientovaná párování v (nekonečném) bipartitním grafu s partitami x a y; viz Obrázek 1. Sjednocení $F \cup G$ potom odpovídá (nekonečnému) orientovanému grafu, jehož všechny vrcholy mají vstupní i výstupní stupeň maximálně 1. Každá jeho komponenta je tedy buď orientovaná kružnice, jednosměrně nekonečná orientovaná cesta nebo obousměrně nekonečná orientovaná cesta.

Není těžké nalézt bijekci mezi prvky množin x a y v každé komponentě zvlášť; viz Obrázek 2. Mohli bychom si tedy myslet, že sjednocením bijekcí na všech komponentách dostaneme hledanou bijekci mezi x a y, a důkaz je hotov. V čem je tedy háček?

Aby byl důkaz korektní, potřebujeme, aby nalezená bijekce byla množina. Speciálně bychom měli být schopni napsat formuli, která nám pro daný prvek v množiny x určí, který prvek množiny y mu máme přiřadit. Pokud je v v komponentě $F \cup G$ typu a) nebo c), můžeme mu vždy přiřadit $F(v)$. Pokud je ale v v komponentě K typu b), musíme se rozhodnout mezi $F(v)$ a $G^{-1}(v)$. Tato volba závisí na paritě vzdálenosti v od počátečního vrcholu v_0 orientované cesty K, a na tom, zda v_0 je prvkem x nebo y. Na vyjádření vzdálenosti nebo její parity (sudosti, lichosti) bychom ale potřebovali přirozená čísla, která zatím v



Obrázek 1: Vlevo: zobrazení F, G jako orientovaná párování. Vpravo: tři druhy komponent $F \cup G$; a) orientovaná kružnice, b) jednosměrně nekonečná orientovaná cesta, c) obousměrně nekonečná orientovaná cesta.

Obrázek 2: Bijekce v jednotlivých typech komponent. V případech a), c) jsou tři možnosti (které?), v případě b) je bijekce určena jednoznačně.

teorii množin nemáme zavedena; na zavedení přirozených čísel budeme potřebovat axiom nekonečna. Dokonce už jen na zjištění, zda komponenta $F \cup G$ obsahující v je jednosměrná cesta, se bez přirozených čísel neobejdeme.

Závěr tedy zní: bez axiomu nekonečna a přirozených tento grafový důkaz není korektní. Důkaz pomocí lemmatu o pevném bodě má tu výhodu, že se bez axiomu nekonečna obejde, a je tedy v tomto smyslu elementárnější.

2.2 Věty o pevném bodě

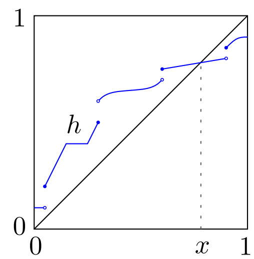
Věty o pevném bodě můžete znát z analýzy (věta o kontrakci, Brouwerova) nebo logiky (diagonální lemma). Lemma o pevném bodě použité pro důkaz Cantorovy–Bernsteinovy věty je speciálním případem obecnější věty (Knaster–Tarski) o pevném bodě pro neklesající funkce v částečných uspořádáních. Jiným speciálním případem je následující věta o pevném bodě neklesajících reálných funkcí, která může sloužit jako názornější příklad pro ilustraci; viz Obrázek 3.

Věta. *Každá neklesající funkce* $h : [0,1] \to [0,1]$ *(ne nutně spojitá) má pevný bod; tedy bod* x *splňující* $h(x) = x$.

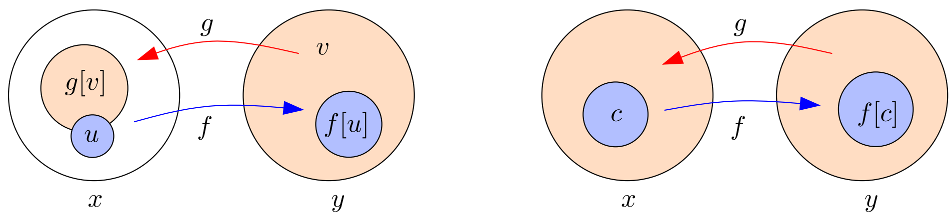
Jako cvičení si zkuste tuto větu sami dokázat.

2.3 Ilustrace k důkazu Cantorovy–Bernsteinovy věty

Viz obrázek 4.



Obrázek 3: Neklesající funkce $h : [0, 1] \to [0, 1]$ s jedním pevným bodem x.



Obrázek 4: Ilustrace k důkazu Cantorovy–Bernsteinovy věty. Vlevo: typická situace. Vpravo: Pomocí hledané množiny c poskládáme bijekci z restrikcí f na c a g na $y - f[c]$.

3 Konečné množiny

3.1 Konečnost podle Tarského a Dedekinda

Tarského definice konečnosti množiny a (každá neprázdná podmnožina $\mathcal{P}(a)$ má maximální prvek vzhledem k inkluzi) se na první pohled může zdát nepřirozená. Její výhodou je, že se obejde bez přirozených čísel, k jejichž definici budeme potřebovat axiom nekonečna. Další výhodou je, že z ní lze relativně snadno dokázat další zakladní vlastnosti konečných množin.

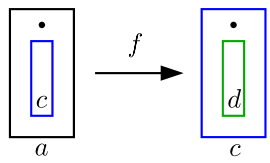
Definice. Množina a je *dedekindovsky konečná*, pokud má větší mohutnost než každá její vlastní podmnožina $b \subset a$.

Podle definice porovnávání mohutnosti je tedy a je dedekindovsky konečná, pokud neexistuje prosté zobrazení a na b. To je podle Cantorovy–Bernsteinovy věty ekvivalentní tomu, že neexistuje ani prosté zobrazení a do b.

Dedekindovská konečnost je v teorii ZF slabší nez Tarského, to ale nebudeme dokazovat. V teorii ZFC (tedy s axiomem výběru) už lze ukázat, že jsou obě definice ekvivalentní. V ZF bez axiomu výběru se dokonce může stát, že množina a je dedekindovsky konečná, ale její potenční množina $\mathcal{P}(a)$ už není. V ZF ale lze např. ukázat, že a je konečná podle Tarského definice právě tehdy, když $\mathcal{P}(\mathcal{P}(a))$ je dedekindovsky konečná.

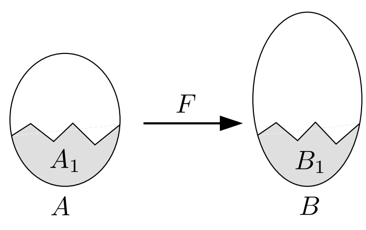
3.2 Ilustrace ke konečnosti a počátkovým vnořením

Lemma 6.4 (Tarského definice konečnosti implikuje dedekindovskou konečnost): Obrázek 5.



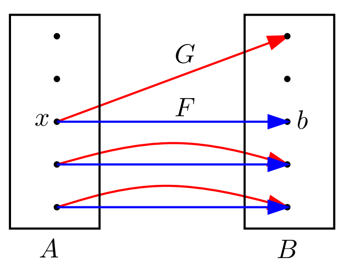
Obrázek 5: Ilustrace k důkazu Lemma 6.4: f je prosté zobrazení a na c, c je minimální s touto vlastností, $d = f[c]$.

Definice 5.29 (počátkové vnoření): Obrázek 6.



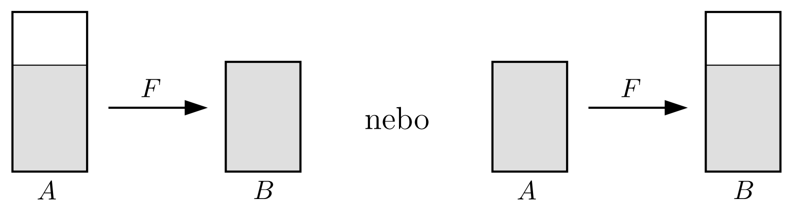
Obrázek 6: Počátkové vnoření A do B.

Lemma 5.30 (o počátkových vnořeních dobře uspořádaných množin): Obrázek 7.



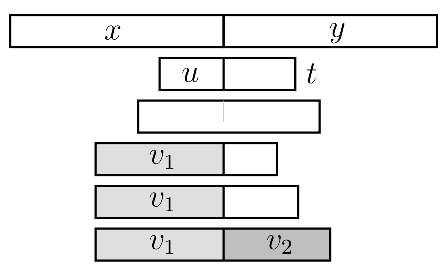
Obrázek 7: Ilustrace k důkazu Lemma 5.30: prvek x je nejmenší takový, že $F(x) \neq G(x)$.

Věta 5.31 (o porovnání dvou dobře uspořádaných množin): Obrázek 8.



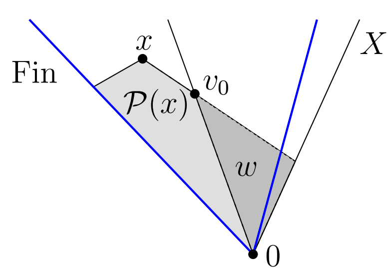
Obrázek 8: Ilustrace k Větě 5.31: dvě možnosti porovnání dobře uspořádaných množin A a B.

Lemma 6.6 (i) (o konečnosti sjednocení dvou konečných množin): Obrázek 9.
Rozmyslete si, že podle Lemma 6.5(i) by Lemma 6.6 (i) stačilo dokázat jen pro případ, kdy x a y jsou disjunktní.



Obrázek 9: Ilustrace k důkazu Lemma 6.6 (i): Konstrukce maximálního prvku $w \subseteq \mathcal{P}(x \cup y)$ pomocí v_1 a v_2.

Věta 6.8 (Princip indukce pro konečné množiny): Obrázek 10.



Obrázek 10: Ilustrace k důkazu Věty 6.8.

3.3 Opravený důkaz Lemma 6.11

Lemma 6.11 (Konečnost konečného sjednocení konečných množin)

V knížce je nesprávně uvedena definice třídy X. Důkaz lze opravit následovně.

Důkaz. Použijeme princip indukce pro konečné množiny. Definujeme třídu

$$X = \left\{x; x \subseteq \mathrm{Fin} \rightarrow \mathrm{Fin}\left(\bigcup x\right)\right\}.$$

Platí $0 \in X$, protože $\bigcup 0 = 0$ a 0 je konečná. Je-li $x \in X$ a y libovolná množina, chceme ověřit, že $x \cup \{y\} \in X$. Je-li $x \cup \{y\} \subseteq \mathrm{Fin}$, pak speciálně $x \subseteq \mathrm{Fin}$ a y je konečná. Protože $x \in X$, je $\bigcup x$ konečná. Dále už postupujeme podle původního důkazu. Platí

$$\bigcup(x \cup \{y\}) = \left(\bigcup x\right) \cup y,$$

kde na pravé straně je sjednocení dvou konečných množin, které je podle Lemma 6.6 (i) konečné. Množina $x \cup \{y\}$ je tedy skutečně prvkem X. Tím je ověřen předpoklad principu indukce pro konečné množiny, a tedy $\mathrm{Fin} \subseteq X$. Tato formule je jen jiným zápisem znění Lemma 6.11, a tím je tedy dokázáno. □

3.4 Dirichletův princip pro nekonečné množiny

Důsledkem Lemma 6.11 je následující varianta Dirichletova principu, známého také jako princip holubníku.

Důsledek. *Je-li nekonečná množina sjednocením konečně mnoha množin, pak aspoň jedna z nich je nekonečná*

4 Přirozená čísla

4.1 Různé definice přirozených čísel

Přirozená čísla by se mohla v teorii množin definovat mnoha různými způsoby, například:

- [Zermelo] $0 = \emptyset$, $1 = \{\emptyset\}$, $2 = \{\{\emptyset\}\}$, $3 = \{\{\{\emptyset\}\}\}$, ...,
- přirozené číslo n je třída všech n-prvkových množin.

První způsob je asi nejjednodušší; jeho nevýhody ale jsou, že všechny množiny jsou jednoprvkové, a dále tato definice nenabízí snadné zobecnění na nekonečné množiny. Druhý způsob je celkem elegantní a lze zobecnit i na nekonečné množiny; jeho nevýhoda je, že kladná přirozená čísla jsou reprezentovaná jako vlastní třídy.

Von Neumannova definice, která na první pohled může vypadat složitější, má několik elegantních vlastností:

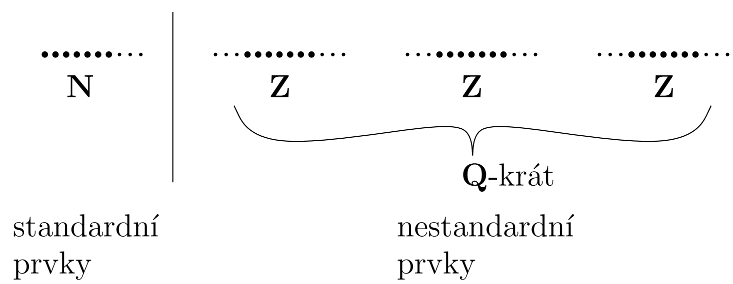
- každé přirozené číslo je množinou všech menších přirozených čísel,
- každé přirozené číslo n je množina o n prvcích,

- relace $\in$ na přirozených číslech přesně odpovídá klasické relaci $<$.

První dvě vlastnosti také ospravedlňují to, že 0 považujeme za přirozené číslo. Množinu přirozených čísel v teorii množin budeme důsledně značit řeckým ω, abychom ji odlišili od „klasických“ přirozených čísel $\mathbb{N}$, která nulu neobsahují.

4.2 Nestandardní modely přirozených čísel

Poznámka. ZFC je teorie v logice 1. řádu, a tedy v ní nelze přirozená čísla definovat „jednoznačně“, aby odpovídala naší intuitivní představě. Nepomůže ani přidání nových axiomů. Podle Löwenheimovy–Skolemovy věty existují modely přirozených čísel libovolně velké mohutnosti, ale i spočetné modely s tzv. *nestandardními* prvky, které se při pohledu „zvnějšku“ nacházejí až „za“ standardními přirozenými čísly. Platí, že každý spočetný model přirozených čísel je uspořádný podle typu $\mathbb{N} + \mathbb{Z}\mathbb{Q}$; viz Obrázek 11. Pro naše účely si můžeme představovat, že máme klasický model přirozených čísel.



Obrázek 11: Schematické znázornění spočetného modelu přirozených čísel s nestandardními prvky.

4.3 Slabá a silná indukce

Principu indukce pro přirozená čísla, kdy v indukčním kroku pro odvození tvrzení $\varphi(s(n))$ stačí předpokládat jen $\varphi(n)$, se také někdy říká *slabá* indukce. V mnoha situacích si s ní bohatě vystačíme. V některých úlohách ale potřebujeme aplikovat indukční předpoklad i pro menší přirozená čísla, případně pro několik různých menších přirozených čísel: např. chceme-li dokázat, že každé kladné přirozené číslo lze rozložit na součin prvočísel. Pro takové případy existuje princip silné indukce.

Věta (Princip silné indukce pro přirozená čísla)**.** *Je-li $X \subseteq \omega$ množina splňující*

1) $0 \in X$ *a*

2) $(\forall n \in \omega)(n \subseteq X \to n \in X)$,

pak $X = \omega$.

Jinými slovy, pro odvození tvrzení $\varphi(n)$ v indukčním kroku musíme předpokládat platnost $\varphi(m)$ pro všechna přirozená čísla $m \in n$; tj. všechna m menší než n.

Na první pohled mezi slabou a silnou indukcí není výraznější rozdíl a „intuitivně“ se mohou zdát ekvivalentní. Z formálního pohledu je ale princip silné indukce mnohem náročnější na dokázání, využívá totiž faktu, že relace náležení je dobré ostré uspořádání na množině přirozených čísel (Věta 6.23 (i)). Odvození principu silné indukce z Věty 6.23 (i) ponecháme jako cvičení.

Princip silné indukce pro přirozená čísla později zobecníme na princip transfinitní indukce, kterou lze provádět na dobře uspořádaných množinách libovolně velké mohutnosti.

4.4 Jiná formulace Lemma 6.19

Lemma (6.19)**.** (i) *Prvky přirozených čísel jsou opět přirozená čísla.*

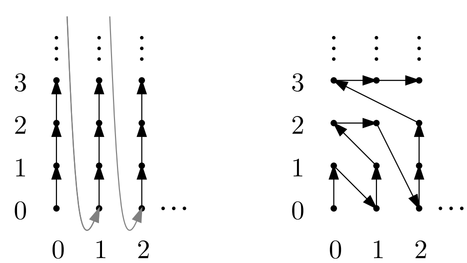
(ii) *Relace $\in$ je tranzitivní na množině ω.*

(iii) *Relace $\in$ je antireflexivní na množině ω.*

Důsledek. *Relace $\in$ je ostré uspořádání na ω.*

5 Spočetné množiny

Lexikografické a maximo-lexikografické uspořádání na $\omega \times \omega$**:** Obrázek 12.

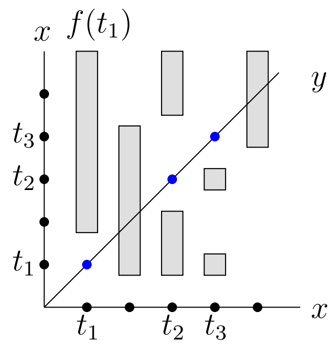


Obrázek 12: Vlevo: lexikografické uspořádání na $\omega \times \omega$. Vpravo: maximo-lexikografické uspořádání na $\omega \times \omega$.

Poznámka. V ZF nelze dokázat, že spočetné sjednocení spočetných množin je spočetné. V ZF nelze ani dokázat, že každá nekonečná množina má spočetnou podmnožinu. Platí totiž, že množina x má spočetou podmnožinu, tedy $\omega \preccurlyeq x$, právě tehdy, když x je dedekindovsky nekonečná.

6 Cantorova věta a mohutnost kontinua

Věta 6.40 (Cantorova věta): Obrázek 13.



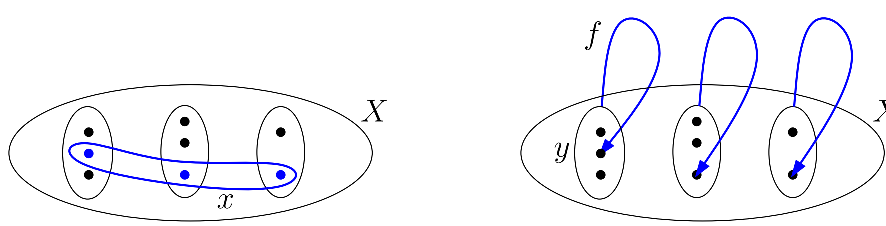
Obrázek 13: Ilustrace diagonální metody v důkaze Cantorovy věty.

Věta 6.42 (o mohutnosti množiny reálných čísel)
V knížce je definované zobrazení, které nekonečné posloupnosti nul a jedniček přiřazuje reálné číslo ve trojkové soustavě, s využitím číslic 0 a 2. Takové zobrazení je prosté, i v případě nekonečné posloupnosti dvojek, protože k alternativnímu vyjádření takvých rozvojů je potřeba číslice 1: např. $0.022222\ldots = 0.10000\ldots$.

Jednodušší by ale bylo posloupnosti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ přiřadit číslo $0.a_0a_1a_2\ldots$ v trojkové soustavě, tedy s využitím číslic 0 a 1, kde k nejednoznačnému zápisu ani nemůže dojít.

7 Axiom výběru

Princip výběru a axiom výběru: Obrázek 14.



Obrázek 14: Vlevo: princip výběru a výběrová množina x. Vpravo: axiom výběru a selektor f na množině X.

Poznámka. K axiomu výběru existuje řada ekvivalentních tvrzení, které se v matematice běžně používají, zejména

- princip dobrého uspořádání: každou množinu lze dobře uspořádat

- relace $\preccurlyeq$ (subvalence) je trichotomická; tedy každé dvě množiny lze porovnat podle jejich mohutnosti
- princip maximality, známý také jako Zornovo lemma: má-li v uspořádané množině A každý řetězec horní mez, pak má A maximální prvek (dokonce nad každým svým prvkem)

Axiom výběru má také řadu dalších široce používaných důsledků, např.

- každý vektorový prostor má bázi
- součin kompaktních prostorů je kompaktní
- Hahn–Banachova věta (zobecnění věty o oddělování nadrovinou do nekonečné dimenze)
- princip kompaktnosti (užitečný v kombinatorice např. při obarvování nekonečných grafů)

a mnoho dalších. V mnoha odvětvích matematiky se axiom výběru běžně předpokládá.

Důsledkem axiomu výběru jsou ale i některé paradoxy, např. slavný Banachův–Tarského paradox o rozkladu jednotkové koule na konečně mnoho částí, ze kterých lze složit dvě kopie jednotkové koule.

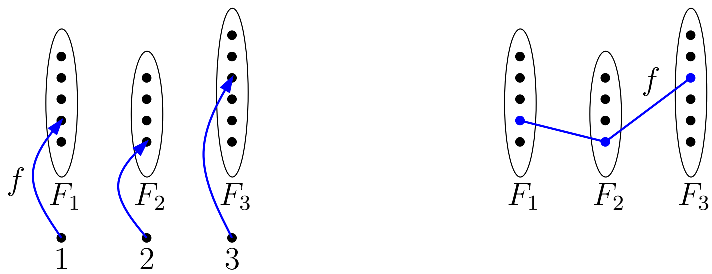
7.1 Kartézský součin souboru množin

Definice 4.42-4.43

Kartézský součin dvou množin máme defiovaný jako množinu uspořádaných dvojic, kartézský součin n množin pak analogicky jako množinu uspořádaných n-tic. Pro kartézský součin nekonečně mnoha množin bychom tedy potřebovali nejprve definovat uspořádané „nekonečnětice“, na což nám už nestačí iterovat konstrukci uspořádané dvojice. Roli spočetných nekonečnětic mohou zastoupit nekonečné posloupnosti. Nekonečnětice libovolně velkých mohutností, včetně nekonečných posloupností, se pak obecně reprezentují jako funkce z nějaké indexové množiny J, kde j-tý prvek z J se zobrazuje do množiny F_j. Tomu pak odpovídá definice kartézského součinu souboru množin $\langle F_j; j \in J\rangle$ indexovaného množinou J. V případě, že J je konečná, dostaneme formálně jinou definici součinu: např. kartézský součin

$$\bigtimes_{j\in\{1,2,3\}} F_j$$

tří množin bude množina některých funkcí z $\{1, 2, 3\}$ do $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ (Obrázek 15), zatímco kartézský součin $F_1 \times F_2 \times F_3$ máme definovaný jako množinu určitých uspořádaných trojic.



Obrázek 15: Funkce f, která je prvkem kartézského součinu $\bigtimes_{j\in\{1,2,3\}} F_j$ (vlevo) a její „graf" (vpravo).

7.2 Opravená poznámka 7.12

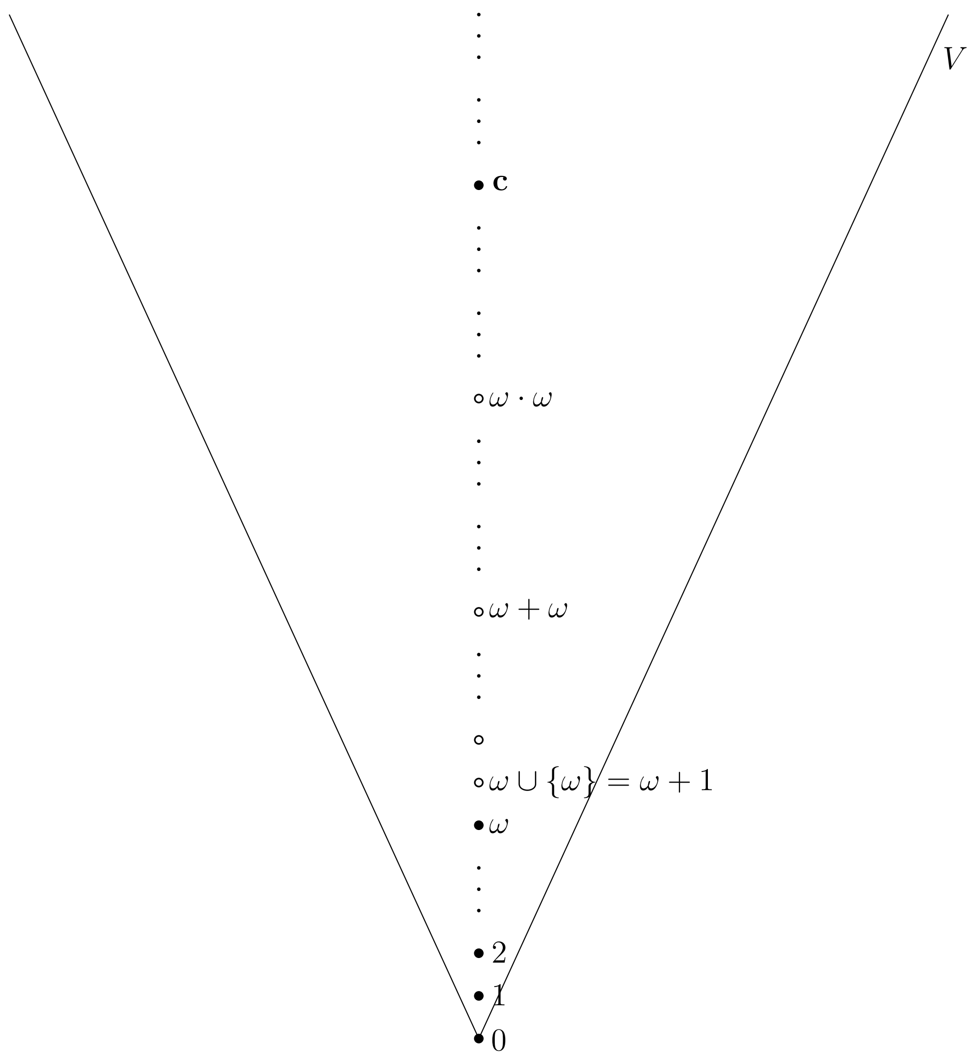
Poznámka 7.12 (Aplikace principu maximality na uspořádání inkluzí)
V knížce je chybně uvedeno, že uspořádání $\leq$ splňuje pouze podmínku $x \leq y \rightarrow x \subseteq y$. V takovém případě by A mohla být rovna celé $\mathcal{P}(B)$, např. $\mathcal{P}(\omega)$, ale navzájem porovnatelné by mohly být pouze dvojice prvků z jednoho řetězce c, např. jen přirozená čísla (tedy volíme $c = \omega$), a jinak jen každá množina sama se sebou, aby $\leq$ byla reflexivní. Sjednocení řetězce c, množina ω, by patřilo do A, ale nebylo by porovnatelné relací $\leq$ s žádným prvkem c.

Správně tedy má být uvedena podmínka $x \leq y \leftrightarrow x \subseteq y$, neboli uspořádání $\leq$ je přesně restrikcí relace inkluze na množinu A.

(Na chybu v knížce upozornil Tomáš Domes.)

8 Ordinální čísla

Intuitivní představu o ordinálních číslech může poskytnout Obrázek 16.



Obrázek 16: Ilustrace ordinálních čísel. Kardinální čísla jsou označena plným puntíkem. Příklady ordinálních čísel: přirozená čísla $0, 1, 2$, nejmenší limitní ordinál ω, jeho následník $\omega \cup \{\omega\}$, druhý nejmenší limitní ordinál $\omega + \omega$, ω-tý nejmenší limitní ordinál $\omega \cdot \omega$, kardinál $\mathfrak{c}$ označující mohutnost kontinua (předpokládáme-li axiom výběru).