Jak naporcovat diskrétní kořeněné kuře

Andreas F. Holmsen, Jan Kynčl and Claudiu Valculescu

KAM + ITI, MFF UK

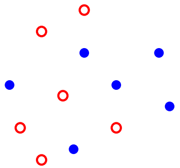
Jak naporcovat diskrétní kořeněné kuře?

Andreas F. Holmsen, Jan Kynčl and Claudiu Valculescu

KAM + ITI, MFF UK

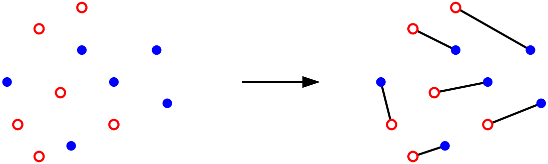
Problém:

Dáno n červených a n modrých bodů v rovině v obecné poloze v rovině, nakreslete n nekřížících se červeno-modrých úseček.



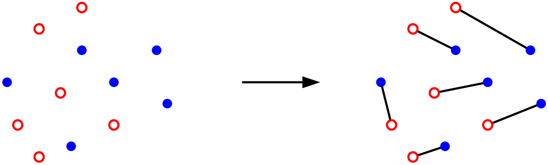
Problém:

Dáno n červených a n modrých bodů v rovině v obecné poloze v rovině, nakreslete n nekřížících se červeno-modrých úseček.



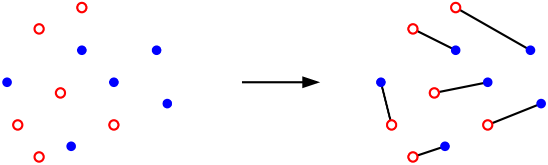
Problém:

Dáno n červených a n modrých bodů v rovině v obecné poloze v rovině, nakreslete n nekřížících se červeno-modrých úseček.

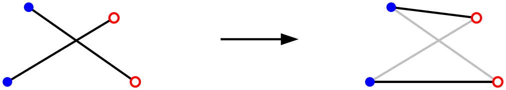


Řešení: <u>nejkratší</u> červeno-modré perfektní párování.

Problém:
Dáno n červených a n modrých bodů v rovině v obecné poloze v rovině, nakreslete n nekřížících se červeno-modrých úseček.

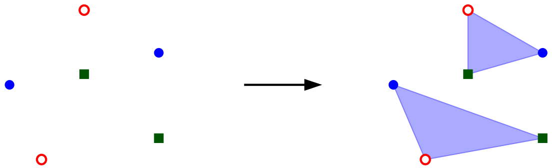


Řešení: nejkratší červeno-modré perfektní párování.

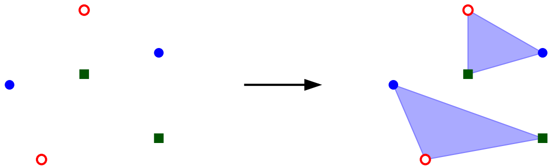


Věta: (Akiyama–Alon, 1989)
Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_d \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze a $|X_1| = |X_2| = \cdots = |X_d| = n$, pak existuje n disjunktních **duhových** $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Věta: (Akiyama–Alon, 1989)
Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_d \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze a $|X_1| = |X_2| = \cdots = |X_d| = n$, pak existuje n disjunktních **duhových** $(d-1)$-rozměrných simplexů.

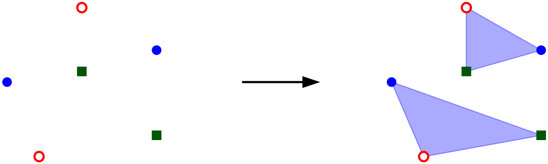


Věta: (Akiyama–Alon, 1989)
Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_d \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze a $|X_1| = |X_2| = \cdots = |X_d| = n$, pak existuje n disjunktních **duhových** $(d-1)$-rozměrných simplexů.



Důkaz: rekurzivní půlení nadrovinami, pomocí diskrétní verze věty o sendviči.

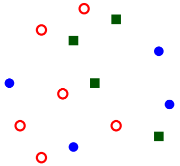
Věta: (Akiyama–Alon, 1989)
Jsou-li $X_1, X_2, \dots, X_d \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze a $|X_1| = |X_2| = \dots = |X_d| = n$, pak existuje n disjunktních **duhových** $(d-1)$-rozměrných simplexů.



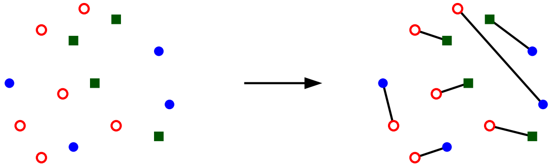
Důkaz: rekurzivní půlení nadrovinami, pomocí diskrétní verze věty o sendviči.

Diskrétní věta o sendviči: (Stone–Tukey, 1942)
Jsou-li $X_1, X_2, \dots, X_d \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní konečné množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, pak existuje nadrovina, která přesně půlí každou z množin X_i.

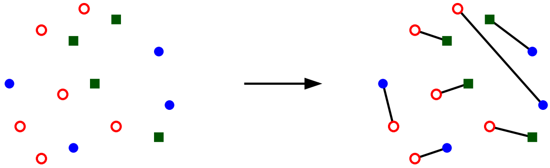
Věta: (Aichholzer et al. (2010); Kano–Suzuki–Uno, 2014)
Jsou-li $R, G, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny červených, zelených a modrých bodů, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|R| + |G| + |B| = 2n$ a $|R|, |G|, |B| \leq n$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.



Věta: (Aichholzer et al. (2010); Kano–Suzuki–Uno, 2014)
Jsou-li $R, G, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny červených, zelených a modrých bodů, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|R| + |G| + |B| = 2n$ a $|R|, |G|, |B| \leq n$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.

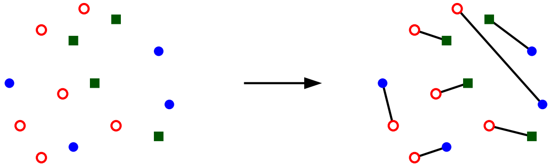


Věta: (Aichholzer et al. (2010); Kano–Suzuki–Uno, 2014)
Jsou-li $R, G, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny červených, zelených a modrých bodů, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|R| + |G| + |B| = 2n$ a $|R|, |G|, |B| \leq n$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.



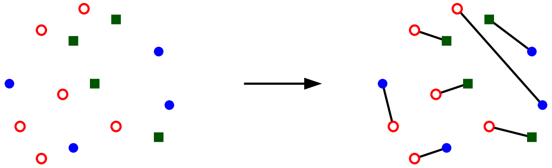
Důkaz 2: pomocí speciálního výsledku o rozkladech obarvených množin bodů na přímce

Věta: (Aichholzer et al. (2010); Kano–Suzuki–Uno, 2014)
Jsou-li $R, G, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny červených, zelených a modrých bodů, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|R| + |G| + |B| = 2n$ a $|R|, |G|, |B| \leq n$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.

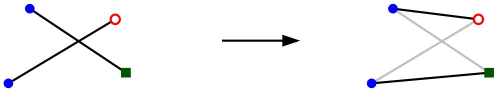


Důkaz 1: nejkratší duhové perfektní párování.

Věta: (Aichholzer et al. (2010); Kano–Suzuki–Uno, 2014)
Jsou-li $R, G, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny červených, zelených a modrých bodů, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|R| + |G| + |B| = 2n$ a $|R|, |G|, |B| \leq n$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.



Důkaz 1: nejkratší duhové perfektní párování.



Věta: (Aichholzer et al. (2010); Kano–Suzuki–Uno, 2014)
Jsou-li $R, G, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny červených, zelených a modrých bodů, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|R| + |G| + |B| = 2n$ a $|R|, |G|, |B| \leq n$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.

Důsledek: (víc barev) Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = 2n$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [d+1]$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.

Věta: (Aichholzer et al. (2010); Kano–Suzuki–Uno, 2014)
Jsou-li $R, G, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny červených, zelených a modrých bodů, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|R| + |G| + |B| = 2n$ a $|R|, |G|, |B| \leq n$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.

Důsledek: (víc barev) Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = 2n$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [d+1]$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.

Důkaz: slučování nejmenších množin:

$$(4, 4, 3, 2, 1) \to (4, 4, 3, 3) \to (4, 4, 6)$$

Věta: (Aichholzer et al. (2010); Kano–Suzuki–Uno, 2014)
Jsou-li $R, G, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny červených, zelených a modrých bodů, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|R| + |G| + |B| = 2n$ a $|R|, |G|, |B| \leq n$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.

Důsledek: (víc barev) Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = 2n$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [d+1]$, pak existuje n disjunktních duhových úseček.

Důkaz: slučování nejmenších množin:

$$(4, 4, 3, 2, 1) \to (4, 4, 3, 3) \to (4, 4, 6)$$

(také nejkratší duhové perfektní párování)

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Věta: (Kano–K.) Domněnka platí pro $d \geq 2$ a $m = d + 1$.

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \dots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \dots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

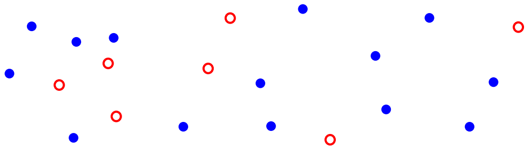
Věta: (Kano–K.) Domněnka platí pro $d \geq 2$ a $m = d + 1$.

Věta: (Bespamyatnikh et al., 2000; Ito et al., 2000; Sakai, 2002) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|A| = an$ a $|B| = bn$, pak existuje n disjunktních konvexních množin $C_1, C_2, \dots, C_n$ takových, že $|C_i \cap A| = a$ a $|C_i \cap B| = b$ pro každé $i \in [n]$.

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Věta: (Kano–K.) Domněnka platí pro $d \geq 2$ a $m = d + 1$.

Věta: (Bespamyatnikh et al., 2000; Ito et al., 2000; Sakai, 2002) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|A| = an$ a $|B| = bn$, pak existuje n disjunktních konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takových, že $|C_i \cap A| = a$ a $|C_i \cap B| = b$ pro každé $i \in [n]$.

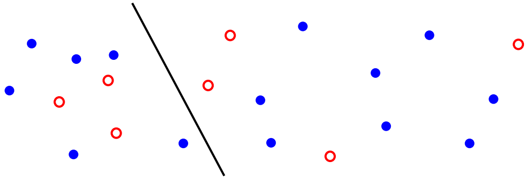


$n = 7, a = 1, b = 2$

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Věta: (Kano–K.) Domněnka platí pro $d \geq 2$ a $m = d + 1$.

Věta: (Bespamyatnikh et al., 2000; Ito et al., 2000; Sakai, 2002) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|A| = an$ a $|B| = bn$, pak existuje n disjunktních konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takových, že $|C_i \cap A| = a$ a $|C_i \cap B| = b$ pro každé $i \in [n]$.

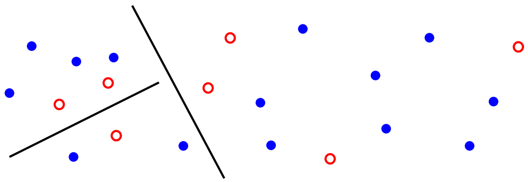


$n = 7, a = 1, b = 2$

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Věta: (Kano–K.) Domněnka platí pro $d \geq 2$ a $m = d + 1$.

Věta: (Bespamyatnikh et al., 2000; Ito et al., 2000; Sakai, 2002) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|A| = an$ a $|B| = bn$, pak existuje n disjunktních konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takových, že $|C_i \cap A| = a$ a $|C_i \cap B| = b$ pro každé $i \in [n]$.

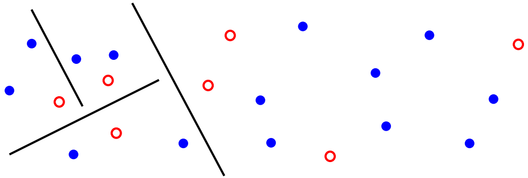


$n = 7, a = 1, b = 2$

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Věta: (Kano–K.) Domněnka platí pro $d \geq 2$ a $m = d + 1$.

Věta: (Bespamyatnikh et al., 2000; Ito et al., 2000; Sakai, 2002) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|A| = an$ a $|B| = bn$, pak existuje n disjunktních konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takových, že $|C_i \cap A| = a$ a $|C_i \cap B| = b$ pro každé $i \in [n]$.

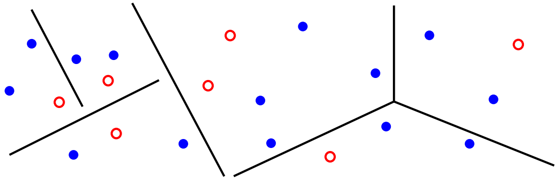


$n = 7, a = 1, b = 2$

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Věta: (Kano–K.) Domněnka platí pro $d \geq 2$ a $m = d + 1$.

Věta: (Bespamyatnikh et al., 2000; Ito et al., 2000; Sakai, 2002) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|A| = an$ a $|B| = bn$, pak existuje n disjunktních konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takových, že $|C_i \cap A| = a$ a $|C_i \cap B| = b$ pro každé $i \in [n]$.

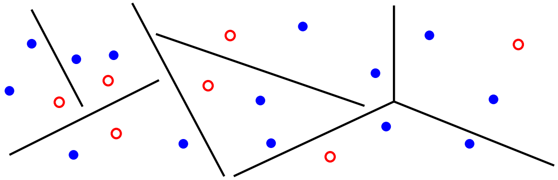


$n = 7, a = 1, b = 2$

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Věta: (Kano–K.) Domněnka platí pro $d \geq 2$ a $m = d + 1$.

Věta: (Bespamyatnikh et al., 2000; Ito et al., 2000; Sakai, 2002) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|A| = an$ a $|B| = bn$, pak existuje n disjunktních konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takových, že $|C_i \cap A| = a$ a $|C_i \cap B| = b$ pro každé $i \in [n]$.

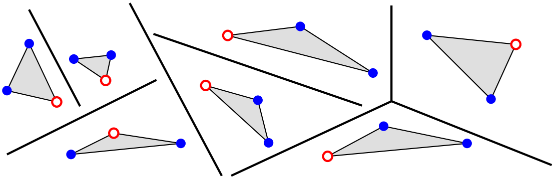


$n = 7, a = 1, b = 2$

Domněnka: (Kano–Suzuki) Nechť $m \geq d \geq 3$ a $n \geq 1$. Jsou-li $X_1, X_2, \ldots, X_m \subset \mathbb{R}^d$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|X_1| + |X_2| + \cdots + |X_m| = dn$ a $|X_i| \leq n$ pro každé $i \in [m]$, pak existuje n disjunktních duhových $(d-1)$-rozměrných simplexů.

Věta: (Kano–K.) Domněnka platí pro $d \geq 2$ a $m = d + 1$.

Věta: (Bespamyatnikh et al., 2000; Ito et al., 2000; Sakai, 2002) Jsou-li $A, B \subset \mathbb{R}^2$ disjunktní množiny, jejichž sjednocení je v obecné poloze, $|A| = an$ a $|B| = bn$, pak existuje n disjunktních konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takových, že $|C_i \cap A| = a$ a $|C_i \cap B| = b$ pro každé $i \in [n]$.



$n = 7, a = 1, b = 2$

Terminologie:

Terminologie:

Množina X je **m-obarvená**, pokud je rozdělená na m disjunktních částí (včetně prázdných), které nazveme **barvy**.

Terminologie:

Množina X je ***m*-obarvená**, pokud je rozdělená na m disjunktních částí (včetně prázdných), které nazveme **barvy**.

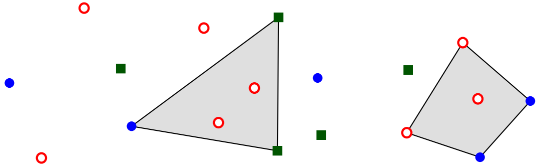
Podmnožina $Y \subseteq X$ je ***j*-barvitá**, obsahuje-li prvky aspoň j různých barev.

Terminologie:

Množina X je **m-obarvená**, pokud je rozdělená na m disjunktních částí (včetně prázdných), které nazveme **barvy**.

Podmnožina $Y \subseteq X$ je **j-barvitá**, obsahuje-li prvky aspoň j různých barev.

Je-li $X \subset \mathbb{R}^d$, $Y \subseteq X$ a $X \cap \operatorname{conv} Y = Y$, pak konvexní obal Y nazýváme **ostrůvek** určený X. Pokud $|Y| = k$, nazýváme jej také **k-ostrůvek**.

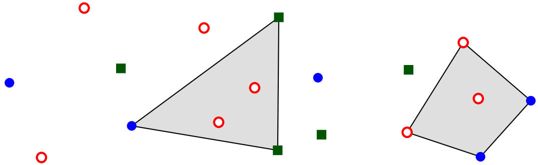


Terminologie:

Množina X je ***m*-obarvená**, pokud je rozdělená na m disjunktních částí (včetně prázdných), které nazveme **barvy**.

Podmnožina $Y \subseteq X$ je ***j*-barvitá**, obsahuje-li prvky aspoň j různých barev.

Je-li $X \subset \mathbb{R}^d$, $Y \subseteq X$ a $X \cap \operatorname{conv} Y = Y$, pak konvexní obal Y nazýváme **ostrůvek** určený X. Pokud $|Y| = k$, nazýváme jej také ***k*-ostrůvek**.



Ostrůvek $\operatorname{conv} Y$ je ***j*-barvitý**, pokud Y je j-barvitá.

Hlavní výsledky

Domněnka: Nechť d, k, m jsou přirozená čísla splňující $k, m \geq d \geq 2$ a nechť X je m-obarvená množina kn bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$. Pokud X lze rozdělit na n disjunktních d-barvitých k-tic, pak X určuje n disjunktních d-barvitých k-ostrůvků.

Hlavní výsledky

Domněnka: Nechť d, k, m jsou přirozená čísla splňující $k, m \geq d \geq 2$ a nechť X je m-obarvená množina kn bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$. Pokud X lze rozdělit na n disjunktních d-barvitých k-tic, pak X určuje n disjunktních d-barvitých k-ostrůvků.

Lemma: ("hallovská" podmínka) Nechť d, k, m jsou přirozená čísla splňující $k, m \geq d \geq 2$ a nechť X je kn-prvková množina s m-obarvením $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$. Množina X lze rozdělit na n disjunktních d-barvitých k-tic právě tehdy, když pro každé $t \in [d-1]$ a každou t-prvkovou podmnožinu $I \subset [m]$ platí

$$\sum_{i \in I} |X_i| \leq (k - d + t)n.$$

Hlavní výsledky

Domněnka: Nechť d, k, m jsou přirozená čísla splňující $k, m \geq d \geq 2$ a nechť X je m-obarvená množina kn bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$. Pokud X lze rozdělit na n disjunktních d-barvitých k-tic, pak X určuje n disjunktních d-barvitých k-ostrůvků.

Lemma: ("hallovská" podmínka) Nechť d, k, m jsou přirozená čísla splňující $k, m \geq d \geq 2$ a nechť X je kn-prvková množina s m-obarvením $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$. Množina X lze rozdělit na n disjunktních d-barvitých k-tic právě tehdy, když pro každé $t \in [d-1]$ a každou t-prvkovou podmnožinu $I \subset [m]$ platí

$$\sum_{i \in I} |X_i| \leq (k - d + t)n.$$

Věta 1: Domněnka platí pro $d = 2$.

Hlavní výsledky

Domněnka: Nechť d, k, m jsou přirozená čísla splňující $k, m \geq d \geq 2$ a nechť X je m-obarvená množina kn bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$. Pokud X lze rozdělit na n disjunktních d-barvitých k-tic, pak X určuje n disjunktních d-barvitých k-ostrůvků.

Lemma: ("hallovská" podmínka) Nechť d, k, m jsou přirozená čísla splňující $k, m \geq d \geq 2$ a nechť X je kn-prvková množina s m-obarvením $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$. Množina X lze rozdělit na n disjunktních d-barvitých k-tic právě tehdy, když pro každé $t \in [d-1]$ a každou t-prvkovou podmnožinu $I \subset [m]$ platí

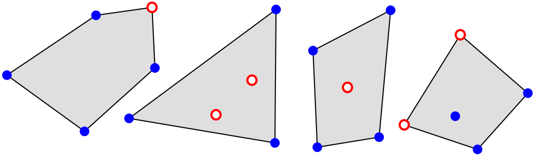
$$\sum_{i \in I} |X_i| \leq (k - d + t)n.$$

Věta 1: Domněnka platí pro $d = 2$.

Věta 2: Domněnka platí pro $m = d$ a $k = d + 1$.

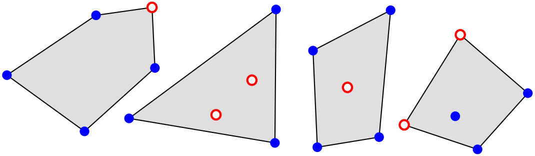
Věta 1 pro 2 barvy: Nechť $k \geq 2$ a nechť X je 2-obarvená množina kn bodů v obecné poloze v rovině. Pokud X obsahuje aspoň n bodů od každé barvy, pak X určuje n disjunktních 2-barvitých k-ostrůvků.

Dokonce počty bodů dané barvy v různých k-ostrůvcích se budou lišit nejvýše o 1.



Věta 1 pro 2 barvy: Nechť $k \geq 2$ a nechť X je 2-obarvená množina kn bodů v obecné poloze v rovině. Pokud X obsahuje aspoň n bodů od každé barvy, pak X určuje n disjunktních 2-barvitých k-ostrůvků.

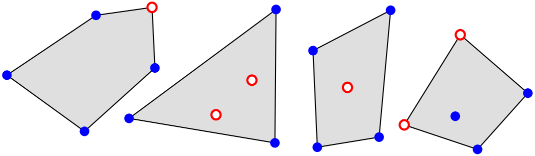
Dokonce počty bodů dané barvy v různých k-ostrůvcích se budou lišit nejvýše o 1.



Důkaz: rekurzivní dělení pomocí věty o 3-řezech
(Bespamyatnikh–Kirkpatrick–Snoeyink, 2000)

Věta 1 pro 2 barvy: Nechť $k \geq 2$ a nechť X je 2-obarvená množina kn bodů v obecné poloze v rovině. Pokud X obsahuje aspoň n bodů od každé barvy, pak X určuje n disjunktních 2-barvitých k-ostrůvků.

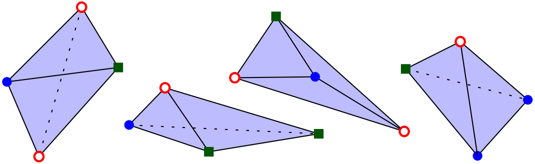
Dokonce počty bodů dané barvy v různých k-ostrůvcích se budou lišit nejvýše o 1.



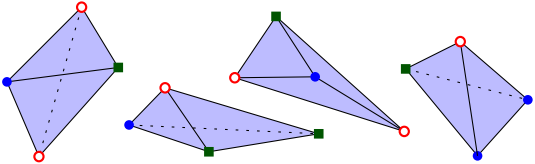
Důkaz: rekurzivní dělení pomocí věty o 3-řezech (Bespamyatnikh–Kirkpatrick–Snoeyink, 2000)

Zobecnění pro *m* barev: slučování nejméně častých barev

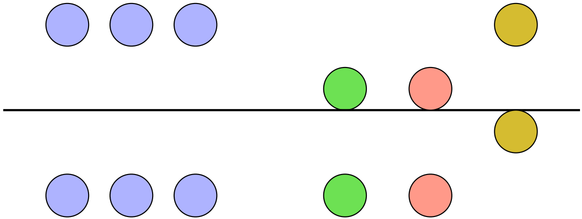
Věta 2: Nechť $d \geq 2$ a nechť X je d-obarvená množina $(d+1)n$ bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$. Pokud X obsahuje aspoň n bodů od každé barvy, pak X určuje n disjunktních d-barvitých $(d+1)$-ostrůvků (tj. d-simplexů).



Věta 2: Nechť $d \geq 2$ a nechť X je d-obarvená množina $(d+1)n$ bodů v obecné poloze v $\mathbb{R}^d$. Pokud X obsahuje aspoň n bodů od každé barvy, pak X určuje n disjunktních d-barvitých $(d+1)$-ostrůvků (tj. d-simplexů).



Důkaz: rekurzivní dělení nadrovinami pomocí speciální diskrétní verze věty o sendviči (která pro obě části zajistí dělitelnost $d+1$ a zároveň "barevnou vyváženost") diskretizace není snadná:



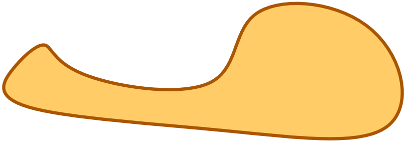
$d = 3$, $k = m = 4$

Kořeněné kuře

Věta: (Soberón, 2012) Nechť n, d jsou přirozená čísla. Jsou-li $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ "pěkné" pravděpodobnostní míry v $\mathbb{R}^d$, pak existuje rozklad $\mathbb{R}^d$ na n konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takový, že pro všechna $i \in [d]$ a $j \in [n]$ je $\mu_i(C_j) = 1/n$.

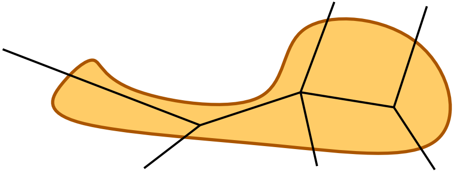
Kořeněné kuře

Věta: (Soberón, 2012) Nechť n, d jsou přirozená čísla. Jsou-li $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ "pěkné" pravděpodobnostní míry v $\mathbb{R}^d$, pak existuje rozklad $\mathbb{R}^d$ na n konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takový, že pro všechna $i \in [d]$ a $j \in [n]$ je $\mu_i(C_j) = 1/n$.



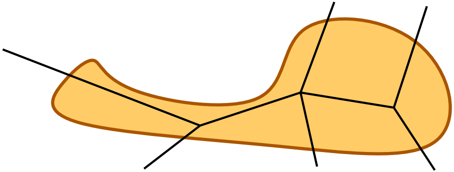
Kořeněné kuře

Věta: (Soberón, 2012) Nechť n, d jsou přirozená čísla. Jsou-li $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ "pěkné" pravděpodobnostní míry v $\mathbb{R}^d$, pak existuje rozklad $\mathbb{R}^d$ na n konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takový, že pro všechna $i \in [d]$ a $j \in [n]$ je $\mu_i(C_j) = 1/n$.



Kořeněné kuře

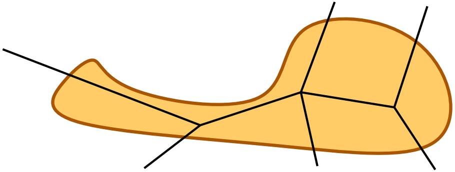
Věta: (Soberón, 2012) Nechť n, d jsou přirozená čísla. Jsou-li $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ "pěkné" pravděpodobnostní míry v $\mathbb{R}^d$, pak existuje rozklad $\mathbb{R}^d$ na n konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takový, že pro všechna $i \in [d]$ a $j \in [n]$ je $\mu_i(C_j) = 1/n$.



Zobecnění: 1 míra a $d-1$ spojitých funkcí pro $n = p^s$
(Karasev–Hubard–Aronov, 2014; Blagojević–Ziegler, 2014)

Kořeněné kuře

Věta: (Soberón, 2012) Nechť n, d jsou přirozená čísla. Jsou-li $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_d$ "pěkné" pravděpodobnostní míry v $\mathbb{R}^d$, pak existuje rozklad $\mathbb{R}^d$ na n konvexních množin $C_1, C_2, \ldots, C_n$ takový, že pro všechna $i \in [d]$ a $j \in [n]$ je $\mu_i(C_j) = 1/n$.



Zobecnění: 1 míra a $d - 1$ spojitých funkcí pro $n = p^s$ (Karasev–Hubard–Aronov, 2014; Blagojević–Ziegler, 2014)

Otázka: Lze diskretizovat Soberónovu větu? (naše domněnka pro $m = d$ a libovolné $k \geq d$)


LIVE
breakyourownnews.com
BREAKING NEWS
KOŘENĚNÉ KUŘE DISKRETIZOVÁNO!
23:55
BLAGOJEVIĆ, ROTE, STEINMEYER, ZIEGLER, ARXIV:1705.03953V1