O třech parametrech neviditelnostních grafů

Josef Cibulka, Jan Kynčl, Viola Mészáros, Rudolf Stolař a Pavel Valtr

KAM a ITI, MFF UK

Motivace a definice

$X \subset \mathbb{R}^d$

$\gamma(X)$ **(konvexita X)** $=$ minimální počet konvexních podmnožin X pokrývajících X

Motivace a definice

$X \subset \mathbb{R}^d$
$\gamma(X)$ **(konvexita X)** = minimální počet konvexních podmnožin X pokrývajících X

Neviditelnostní graf $I(X)$ množiny X:
$V = X, E = \{xy; \overline{xy} \not\subseteq X\}$

Motivace a definice

$X \subset \mathbb{R}^d$

$\gamma(X)$ **(konvexita X)** = minimální počet konvexních podmnožin X pokrývajících X

Neviditelnostní graf $I(X)$ množiny X:
$V = X, E = \{xy; \overline{xy} \not\subseteq X\}$

$\omega(X) := \omega(I(X))$ (klikovost, maximální počet navzájem se nevidících bodů)

$\chi(X) := \chi(I(X))$ (barevnost, body jedné barvy na sebe vidí, ale nemusí tvořit souvislou podmnožinu)

Motivace a definice

$X \subset \mathbb{R}^d$
$\gamma(X)$ **(konvexita X)** = minimální počet konvexních podmnožin X pokrývajících X

Neviditelnostní graf $I(X)$ množiny X:
$V = X, E = \{xy; \overline{xy} \not\subseteq X\}$

$\omega(X) := \omega(I(X))$ (klikovost, maximální počet navzájem se nevidících bodů)

$\chi(X) := \chi(I(X))$ (barevnost, body jedné barvy na sebe vidí, ale nemusí tvořit souvislou podmnožinu)

Pozorování: $\omega(X) \leq \chi(X) \leq \gamma(X)$.

Motivace a definice

$X \subset \mathbb{R}^d$
$\gamma(X)$ **(konvexita X)** = minimální počet konvexních podmnožin X pokrývajících X

Neviditelnostní graf $I(X)$ množiny X:
$V = X, E = \{xy; \overline{xy} \not\subseteq X\}$

$\omega(X) := \omega(I(X))$ (klikovost, maximální počet navzájem se nevidících bodů)

$\chi(X) := \chi(I(X))$ (barevnost, body jedné barvy na sebe vidí, ale nemusí tvořit souvislou podmnožinu)

Pozorování: $\omega(X) \leq \chi(X) \leq \gamma(X)$.
Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^2$ a doplněk X je souvislý, pak $\chi(X) = \gamma(X)$.

Motivace a definice

$X \subset \mathbb{R}^d$

$\gamma(X)$ **(konvexita X)** = minimální počet konvexních podmnožin X pokrývajících X

Neviditelnostní graf $I(X)$ množiny X:
$V = X, E = \{xy; \overline{xy} \not\subseteq X\}$

$\omega(X) := \omega(I(X))$ (klikovost, maximální počet navzájem se nevidících bodů)

$\chi(X) := \chi(I(X))$ (barevnost, body jedné barvy na sebe vidí, ale nemusí tvořit souvislou podmnožinu)

Pozorování: $\omega(X) \leq \chi(X) \leq \gamma(X)$.
Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^2$ a doplněk X je souvislý, pak $\chi(X) = \gamma(X)$.

Otázka: Lze $\gamma(X)$ shora omezit pomocí $\omega(X)$, případně pomocí $\chi(X)$?
Jak závisí odpověď na dimenzi d?

Předchozí výsledky

Horní odhady:

$d = 2$, X uzavřená, $\omega(X) < \infty$:

- $\chi \leq 3 \Rightarrow \gamma = \chi$ (McKinney, 1966)
- $\omega = 2 \Rightarrow \gamma \leq 3$ (Valentine, 1957)

Předchozí výsledky

Horní odhady:

$d = 2$, X uzavřená, $\omega(X) < \infty$:

- $\chi \leq 3 \Rightarrow \gamma = \chi$ (McKinney, 1966)
- $\omega = 2 \Rightarrow \gamma \leq 3$ (Valentine, 1957)
- $\omega < \infty \Rightarrow \gamma < \infty$ (Eggleston, 1974)

Předchozí výsledky

Horní odhady:

$d = 2$, X uzavřená, $\omega(X) < \infty$:

- $\chi \leq 3 \Rightarrow \gamma = \chi$ (McKinney, 1966)
- $\omega = 2 \Rightarrow \gamma \leq 3$ (Valentine, 1957)
- $\omega < \infty \Rightarrow \gamma < \infty$ (Eggleston, 1974)
- $\gamma \leq \omega^3 2^\omega$ (Breen, Kay, 1976)

Předchozí výsledky

Horní odhady:

$d = 2$, X uzavřená, $\omega(X) < \infty$:

- $\chi \leq 3 \Rightarrow \gamma = \chi$ (McKinney, 1966)
- $\omega = 2 \Rightarrow \gamma \leq 3$ (Valentine, 1957)
- $\omega < \infty \Rightarrow \gamma < \infty$ (Eggleston, 1974)
- $\gamma \leq \omega^3 2^\omega$ (Breen, Kay, 1976)
- $\gamma \leq \omega^6$ (Perles, Shelah, 1990)

Předchozí výsledky

Horní odhady:

$d = 2$, X uzavřená, $\omega(X) < \infty$:

- $\chi \leq 3 \Rightarrow \gamma = \chi$ (McKinney, 1966)
- $\omega = 2 \Rightarrow \gamma \leq 3$ (Valentine, 1957)
- $\omega < \infty \Rightarrow \gamma < \infty$ (Eggleston, 1974)
- $\gamma \leq \omega^3 2^\omega$ (Breen, Kay, 1976)
- $\gamma \leq \omega^6$ (Perles, Shelah, 1990)
- $\gamma \leq 18\omega^3$ (Matoušek, Valtr, 1999)

Předchozí výsledky

Horní odhady:

$d = 2$, X uzavřená, $\omega(X) < \infty$:

- $\chi \leq 3 \Rightarrow \gamma = \chi$ (McKinney, 1966)
- $\omega = 2 \Rightarrow \gamma \leq 3$ (Valentine, 1957)
- $\omega < \infty \Rightarrow \gamma < \infty$ (Eggleston, 1974)
- $\gamma \leq \omega^3 2^\omega$ (Breen, Kay, 1976)
- $\gamma \leq \omega^6$ (Perles, Shelah, 1990)
- $\gamma \leq 18\omega^3$ (Matoušek, Valtr, 1999)

$d = 2$, X má $\lambda < \infty$ jednobodových děr, $\omega = \omega(X) < \infty$, pak $\gamma \leq O(\omega^4 + \lambda\omega^2)$ (MV, 1999)

Dolní odhady (konstrukce):

- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\omega^{3/2})$ (Perles; Breen, Kay, 1976)

Dolní odhady (konstrukce):

- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\omega^{3/2})$ (Perles; Breen, Kay, 1976)
- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\chi^2)$ (Matoušek, Valtr, 1999)

Dolní odhady (konstrukce):

- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\omega^{3/2})$ (Perles; Breen, Kay, 1976)
- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\chi^2)$ (Matoušek, Valtr, 1999)
- $d = 2$, $\omega \leq 3, \gamma > n$ (MV, 1999)

Dolní odhady (konstrukce):

- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\omega^{3/2})$ (Perles; Breen, Kay, 1976)
- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\chi^2)$ (Matoušek, Valtr, 1999)
- $d = 2$, $\omega \leq 3, \gamma > n$ (MV, 1999)
- $d = 4$, X uzavřená hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma \geq \chi > n$. (Kojman, Perles, Shelah, 1990)

Dolní odhady (konstrukce):

- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\omega^{3/2})$ (Perles; Breen, Kay, 1976)
- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\chi^2)$ (Matoušek, Valtr, 1999)
- $d = 2$, $\omega \leq 3, \gamma > n$ (MV, 1999)
- $d = 4$, X uzavřená hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma \geq \chi > n$. (Kojman, Perles, Shelah, 1990)
- $d = 4$, X hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma = \chi = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)

Dolní odhady (konstrukce):

- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\omega^{3/2})$ (Perles; Breen, Kay, 1976)
- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\chi^2)$ (Matoušek, Valtr, 1999)
- $d = 2$, $\omega \leq 3, \gamma > n$ (MV, 1999)
- $d = 4$, X uzavřená hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma \geq \chi > n$. (Kojman, Perles, Shelah, 1990)
- $d = 4$, X hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma = \chi = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)
- $d = 4$, X borelovská, $\omega = 3$, $\gamma = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)

Dolní odhady (konstrukce):

- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\omega^{3/2})$ (Perles; Breen, Kay, 1976)
- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\chi^2)$ (Matoušek, Valtr, 1999)
- $d = 2$, $\omega \leq 3, \gamma > n$ (MV, 1999)
- $d = 4$, X uzavřená hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma \geq \chi > n$. (Kojman, Perles, Shelah, 1990)
- $d = 4$, X hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma = \chi = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)
- $d = 4$, X borelovská, $\omega = 3$, $\gamma = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)
- $d = 3$, X borelovská, $\omega = 4$, $\gamma = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)

Dolní odhady (konstrukce):

- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\omega^{3/2})$ (Perles; Breen, Kay, 1976)
- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\chi^2)$ (Matoušek, Valtr, 1999)
- $d = 2$, $\omega \leq 3, \gamma > n$ (MV, 1999)
- $d = 4$, X uzavřená hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma \geq \chi > n$. (Kojman, Perles, Shelah, 1990)
- $d = 4$, X hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma = \chi = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)
- $d = 4$, X borelovská, $\omega = 3$, $\gamma = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)
- $d = 3$, X borelovská, $\omega = 4$, $\gamma = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)
- $d = 2$, $\omega = 5$, $\gamma = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)

Dolní odhady (konstrukce):

- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\omega^{3/2})$ (Perles; Breen, Kay, 1976)
- $d = 2$, X uzavřená, $\gamma \geq \Omega(\chi^2)$ (Matoušek, Valtr, 1999)
- $d = 2$, $\omega \leq 3, \gamma > n$ (MV, 1999)
- $d = 4$, X uzavřená hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma \geq \chi > n$. (Kojman, Perles, Shelah, 1990)
- $d = 4$, X hvězdovitá, $\omega = 2$, $\gamma = \chi = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)
- $d = 4$, X borelovská, $\omega = 3$, $\gamma = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)
- $d = 3$, X borelovská, $\omega = 4$, $\gamma = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)
- $d = 2$, $\omega = 5$, $\gamma = 2^{\aleph_0}$ (KPS, 1990)

Domněnka: (MV, 1999) Pro každou množinu $X \subset R^2$ lze $\gamma(X)$ shora omezit pomocí $\chi(X)$.

Hlavní výsledky

Věta 1: Pro každou množinu $X \subset \mathbb{R}^2$ s $\chi = \chi(X) < \infty$ platí

$$\gamma(X) \leq O(\chi^3 \cdot 2^{4 \cdot 2^{2^{\chi}}}).$$

Hlavní výsledky

Věta 1: Pro každou množinu $X \subset \mathbb{R}^2$ s $\chi = \chi(X) < \infty$ platí

$$\gamma(X) \leq O(\chi^3 \cdot 2^{4 \cdot 2^{2^{\chi}}}).$$

Věta 2: Pro každé n existuje hvězdovitá množina

1) $X \subset \mathbb{R}^6$ splňující $\chi(X) = 2$ a $\gamma(X) > n$,
2) $X \subset \mathbb{R}^6$, která je uzavřená, $\chi(X) = 4$ a $\gamma(X) > n$,

Hlavní výsledky

Věta 1: Pro každou množinu $X \subset \mathbb{R}^2$ s $\chi = \chi(X) < \infty$ platí

$$\gamma(X) \leq O(\chi^3 \cdot 2^{4 \cdot 2^{2^\chi}}).$$

Věta 2: Pro každé n existuje hvězdovitá množina

1) $X \subset \mathbb{R}^6$ splňující $\chi(X) = 2$ a $\gamma(X) > n$,
2) $X \subset \mathbb{R}^6$, která je uzavřená, $\chi(X) = 4$ a $\gamma(X) > n$,
3) $X \subset \mathbb{R}^5$ splňující $\chi(X) = 3$ a $\gamma(X) > n$,
4) $X \subset \mathbb{R}^5$, která je uzavřená, $\chi(X) = 4$ a $\gamma(X) > n$.

Důkaz Věty 1

idea: omezit počet jednobodových děr shora pomocí barevnosti

Věta (MV, 1999) Má-li $X \subset \mathbb{R}^2$ $\lambda < \infty$ jednobodových děr, $\omega = \omega(X) < \infty$, pak $\gamma(X) \leq O(\omega^4 + \lambda\omega^2)$.

Důkaz Věty 1

idea: omezit počet jednobodových děr shora pomocí barevnosti

Věta (MV, 1999) Má-li $X \subset \mathbb{R}^2$ $\lambda < \infty$ jednobodových děr, $\omega = \omega(X) < \infty$, pak $\gamma(X) \leq O(\omega^4 + \lambda\omega^2)$.

Lemma 1 (zobecnění Erdős-Szekeresovy věty)
Každá $(m \cdot 2^{4n})$-bodová množina $P \subset \mathbb{R}^2$ obsahuje m bodů na přímce nebo n bodů v konvexní poloze.

Důkaz Věty 1

idea: omezit počet jednobodových děr shora pomocí barevnosti

Věta (MV, 1999) Má-li $X \subset \mathbb{R}^2$ $\lambda < \infty$ jednobodových děr, $\omega = \omega(X) < \infty$, pak $\gamma(X) \leq O(\omega^4 + \lambda\omega^2)$.

Lemma 1 (zobecnění Erdős-Szekeresovy věty)
Každá $(m \cdot 2^{4n})$-bodová množina $P \subset \mathbb{R}^2$ obsahuje m bodů na přímce nebo n bodů v konvexní poloze.

Lemma 2 (hlavní nová myšlenka)
Je-li $X \subseteq \mathbb{R}^2$ množina s n jednobodovými dírami v konvexní poloze, pak

$$n \leq 2^{2^{\chi(X)}}.$$

náznak důkazu Lemma 2:

náznak důkazu Lemma 2:

- díry označíme $1, 2, \ldots, n$ ve směru hod. ručiček

náznak důkazu Lemma 2:

- díry označíme $1, 2, \ldots, n$ ve směru hod. ručiček
- pro každé $i < j$ definujeme přímku $l(i, j)$ procházející dírou i a “vně” díry j

náznak důkazu Lemma 2:

- díry označíme $1, 2, \ldots, n$ ve směru hod. ručiček
- pro každé $i < j$ definujeme přímku $l(i, j)$ procházející dírou i a "vně" díry j
- pro každé $i < j < k$ definujeme bod $p(i, j, k) = l(i, j) \cap l(j, k)$ ležící poblíž díry j

náznak důkazu Lemma 2:

- díry označíme $1, 2, \dots, n$ ve směru hod. ručiček
- pro každé $i < j$ definujeme přímku $l(i,j)$ procházející dírou i a "vně" díry j
- pro každé $i < j < k$ definujeme bod $p(i,j,k) = l(i,j) \cap l(j,k)$ ležící poblíž díry j
- body $p(i,j,k)$ v neviditelnostním grafu $I(X)$ indukují "shift graf"

$$V = \binom{[n]}{3}, E = \{\{i,j,k\}\{j,k,l\}; 1 \le i < j < k < l \le n\},$$

který má barevnost aspoň $\log\log n$ (Hell, Nešetřil, 2004)

Důkaz Věty 2

konstrukce v dimenzi 6:

Důkaz Věty 2

konstrukce v dimenzi 6:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^6$

Důkaz Věty 2

konstrukce v dimenzi 6:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^6$
- každá trojice vrcholů určuje stěnu P_n

Důkaz Věty 2

konstrukce v dimenzi 6:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^6$
- každá trojice vrcholů určuje stěnu P_n

Lemma: Hrany úplného grafu na n vrcholech lze zorientovat tak, aby každá podmnožina $k := \lceil 2\log(n) + 2 \rceil$ vrcholů obsahovala orientovaný trojcyklus.

Důkaz Věty 2

konstrukce v dimenzi 6:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^6$
- každá trojice vrcholů určuje stěnu P_n

Lemma: Hrany úplného grafu na n vrcholech lze zorientovat tak, aby každá podmnožina $k := \lceil 2 \log(n) + 2 \rceil$ vrcholů obsahovala orientovaný trojcyklus.

- zorientujeme hrany P_n podle Lemma

Důkaz Věty 2

konstrukce v dimenzi 6:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^6$
- každá trojice vrcholů určuje stěnu P_n

Lemma: Hrany úplného grafu na n vrcholech lze zorientovat tak, aby každá podmnožina $k := \lceil 2\log(n) + 2 \rceil$ vrcholů obsahovala orientovaný trojcyklus.

- zorientujeme hrany P_n podle Lemma
- z trojúhelníkových stěn P_n, jejichž hranice je cyklicky orientovaná, odstraníme bod z těžiště a dostaneme X

Důkaz Věty 2

konstrukce v dimenzi 6:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^6$
- každá trojice vrcholů určuje stěnu P_n

Lemma: Hrany úplného grafu na n vrcholech lze zorientovat tak, aby každá podmnožina $k := \lceil 2\log(n) + 2 \rceil$ vrcholů obsahovala orientovaný trojcyklus.

- zorientujeme hrany P_n podle Lemma
- z trojúhelníkových stěn P_n, jejichž hranice je cyklicky orientovaná, odstraníme bod z těžiště a dostaneme X
- $\gamma(X) \geq \Omega(n/\log n)$

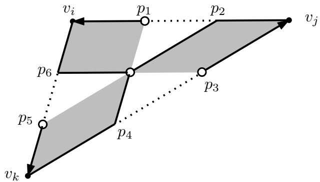
Důkaz Věty 2

konstrukce v dimenzi 6:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^6$
- každá trojice vrcholů určuje stěnu P_n

Lemma: Hrany úplného grafu na n vrcholech lze zorientovat tak, aby každá podmnožina $k := \lceil 2\log(n) + 2 \rceil$ vrcholů obsahovala orientovaný trojcyklus.

- zorientujeme hrany P_n podle Lemma
- z trojúhelníkových stěn P_n, jejichž hranice je cyklicky orientovaná, odstraníme bod z těžiště a dostaneme X
- $\gamma(X) \geq \Omega(n/\log n)$
- $\chi(X) \leq 2$



konstrukce v dimenzi 5:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^5$

konstrukce v dimenzi 5:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^5$
- jen $O(n^2)$ trojic vrcholů určuje stěnu P_n

konstrukce v dimenzi 5:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^5$
- jen $O(n^2)$ trojic vrcholů určuje stěnu P_n
- z každé stěny $v_1 v_i v_j$, $1 < i < j$, odebereme
  1) náhodný bod z vnitřku
  2) bod na ose úhlu $v_i v_1 v_j$ ve vzdálenosti $2^{-(i \cdot n + j)}$ od hrany $v_i v_j$

konstrukce v dimenzi 5:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^5$
- jen $O(n^2)$ trojic vrcholů určuje stěnu P_n
- z každé stěny $v_1 v_i v_j$, $1 < i < j$, odebereme
  1) náhodný bod z vnitřku
  2) bod na ose úhlu $v_i v_1 v_j$ ve vzdálenosti $2^{-(i \cdot n+j)}$ od hrany $v_i v_j$
- $\gamma(X) \geq n/2$

konstrukce v dimenzi 5:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^5$
- jen $O(n^2)$ trojic vrcholů určuje stěnu P_n
- z každé stěny $v_1 v_i v_j$, $1 < i < j$, odebereme
  1) náhodný bod z vnitřku
  2) bod na ose úhlu $v_i v_1 v_j$ ve vzdálenosti $2^{-(i \cdot n + j)}$ od hrany $v_i v_j$
- $\gamma(X) \geq n/2$
- $\chi(X) = 3$
  1) důkaz plyne z netriviálních výsledků o metaabelovských grupách a jejich reprezentacích (Korbelář, 2011)

konstrukce v dimenzi 5:

- $P_n :=$ cyklický mnohostěn v $\mathbb{R}^5$
- jen $O(n^2)$ trojic vrcholů určuje stěnu P_n
- z každé stěny $v_1 v_i v_j$, $1 < i < j$, odebereme
  1) náhodný bod z vnitřku
  2) bod na ose úhlu $v_i v_1 v_j$ ve vzdálenosti $2^{-(i \cdot n + j)}$ od hrany $v_i v_j$
- $\gamma(X) \geq n/2$
- $\chi(X) = 3$
  1) důkaz plyne z netriviálních výsledků o metaabelovských grupách a jejich reprezentacích (Korbelář, 2011)
  2) neviditelnostní graf na vnitřcích hran $v_1 v_i$ je acyklický; navíc lze konstrukci modifikovat na uzavřenou množinu

Problém: Existuje, pro každé přirozené k, konvexní simpliciální mnohostěn $P(k)$ v $\mathbb{R}^4$ takový, že v každém obarvení jeho vrcholů k barvami existuje trojúhelníková stěna, jejíž vrcholy mají stejnou barvu?

Problém: Existuje, pro každé přirozené k, konvexní simpliciální mnohostěn $P(k)$ v $\mathbb{R}^4$ takový, že v každém obarvení jeho vrcholů k barvami existuje trojúhelníková stěna, jejíž vrcholy mají stejnou barvu?

Kladná odpověď by implikovala konstrukci množiny X v $\mathbb{R}^4$ s konstantní $\chi(X)$ a libovolně velkou $\gamma(X)$.