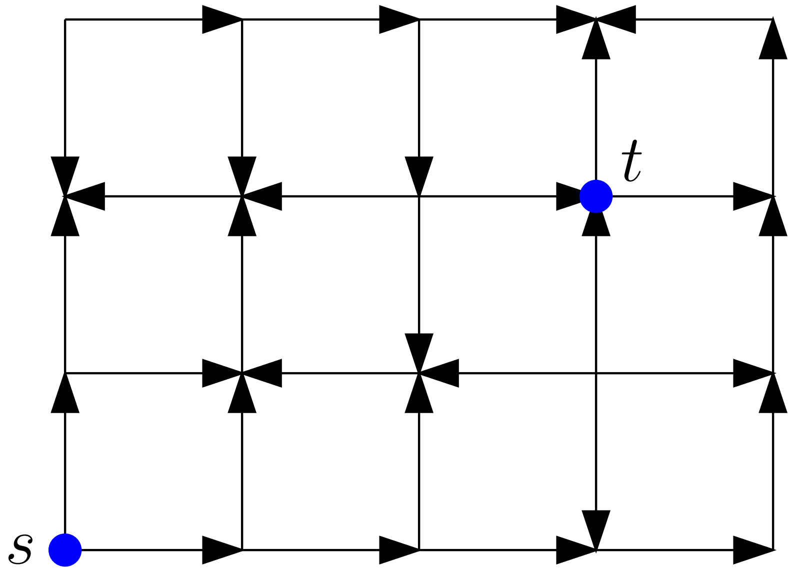
Logspace redukce problému orientované dosažitelnosti v grafech vyššího rodu na rovinný případ

Jan Kynčl a Tomáš Vyskočil

KAM a ITI, MFF UK

DIMACS/DIMATIA REU 2007, Rutgers University
vedoucí: Eric Allender, Michael Saks

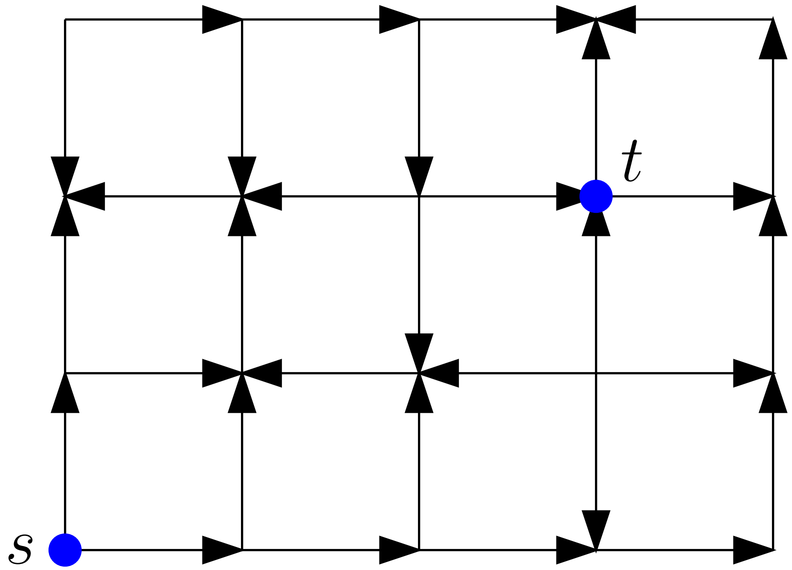
(Orientovaná) dosažitelnost:



instance: orientovaný graf $G = (V, E)$ a jeho dva vrcholy s, t

otázka: existuje v G orientovaná cesta z s do t ?

(Orientovaná) dosažitelnost:



instance: orientovaný graf $G = (V, E)$ a jeho dva vrcholy s, t

otázka: existuje v G orientovaná cesta z s do t ?

Problém: Jaká je výpočetní složitost dosažitelnosti v rovinných grafech?

Náhled do složitostní ZOO

P

L

Náhled do složitostní ZOO

P

UI

NL

L

Náhled do složitostní ZOO

P

UI

NL

UI

UL

UI

L

Náhled do složitostní ZOO

P

UI

NL - dosažitelnost (NL-úplná)

UI

UL

UI

L

Náhled do složitostní ZOO

P

UI

NL - dosažitelnost (NL-úplná)

UI

UL

UI

L - neorientovaná dosažitelnost [Reingold, 2008]

Náhled do složitostní ZOO

P

UI

NL - dosažitelnost (NL-úplná)

UI

UL - rovinná dosažitelnost [Bourke et al., 2009]

UI

L - neorientovaná dosažitelnost [Reingold, 2008]

Náhled do složitostní ZOO

P

UI

NL - dosažitelnost (NL-úplná)

UI

UL - rovinná dosažitelnost [Bourke et al., 2009]

UI

L - neorientovaná dosažitelnost [Reingold, 2008]

- dos. v sériově-paralelních grafech [Jakoby et al., 2006],

- dos. v rovinných grafech bez orientovaných cyklů (DAG) s jediným zdrojem [Allender, Datta, Roy, 2005]

Problémy redukovatelné v logspace na rovinnou dosažitelnost

- Dosažitelnost v grafech nakreslených na toru [Allender, Datta, Roy, 2005]

Problémy redukovatelné v logspace na rovinnou dosažitelnost

- Dosažitelnost v grafech nakreslených na toru [Allender, Datta, Roy, 2005]
- Dosažitelnost v grafech bez $K_{3,3}$-minorů a v grafech bez K_5-minorů [Thierauf, Wagner, 2009]

Problémy redukovatelné v logspace na rovinnou dosažitelnost

- Dosažitelnost v grafech nakreslených na toru [Allender, Datta, Roy, 2005]
- Dosažitelnost v grafech bez $K_{3,3}$-minorů a v grafech bez K_5-minorů [Thierauf, Wagner, 2009]

Náš výsledek:

- Dosažitelnost v grafech nakreslených na ploše libovolného rodu

Postup redukce

Postup redukce

G nakreslený na ploše S rodu g, vrcholy s, t

Postup redukce

G nakreslený na ploše S rodu g, vrcholy s, t

1. nalezení kostry

Postup redukce

G nakreslený na ploše S rodu g, vrcholy s, t

1. nalezení kostry

2. nalezení neseparujícího cyklu C

Postup redukce

G nakreslený na ploše S rodu g, vrcholy s, t

1. nalezení kostry
2. nalezení neseparujícího cyklu C
3. rozříznutí podél C

Postup redukce

G nakreslený na ploše S rodu g, vrcholy s, t

1. nalezení kostry
2. nalezení neseparujícího cyklu C
3. rozříznutí podél C
4. 1-3 zopakujeme max. g-krát, dostaneme rovinný G'

Postup redukce

G nakreslený na ploše S rodu g, vrcholy s, t

1. nalezení kostry
2. nalezení neseparujícího cyklu C
3. rozříznutí podél C
4. 1-3 zopakujeme max. g-krát, dostaneme rovinný G'
5. slepujeme kopie G' k sobě, tím zrekonstruujeme přerušené s-t-cesty jako cesty z s' do nějaké kopie t'

Postup redukce

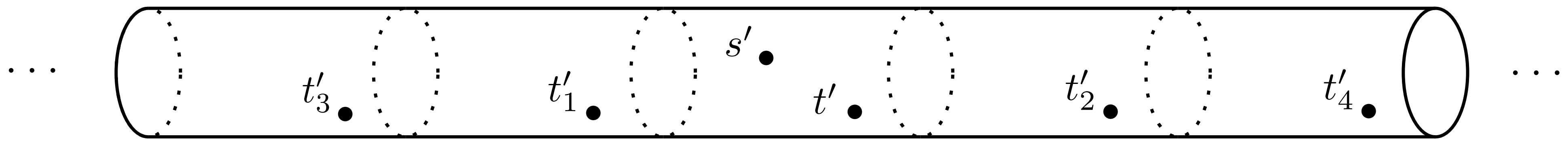
G nakreslený na ploše S rodu g, vrcholy s, t

1. nalezení kostry
2. nalezení neseparujícího cyklu C
3. rozříznutí podél C
4. 1-3 zopakujeme max. g-krát, dostaneme rovinný G'
5. slepujeme kopie G' k sobě, tím zrekonstruujeme přerušené s-t-cesty jako cesty z s' do nějaké kopie t'
6. konstrukce rovinného grafu G'' s vrcholy s'' a t''

Krok 5 (slepování)

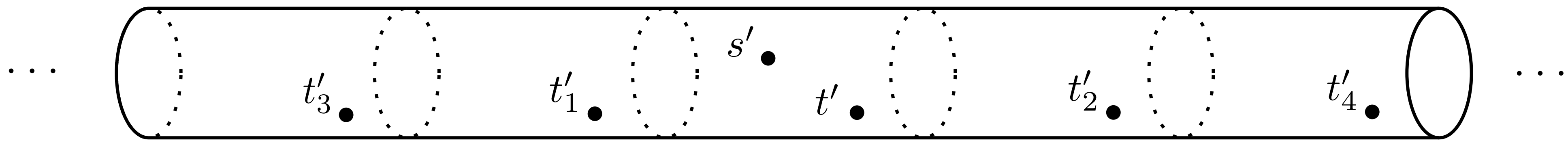
Krok 5 (slepování)

torus:

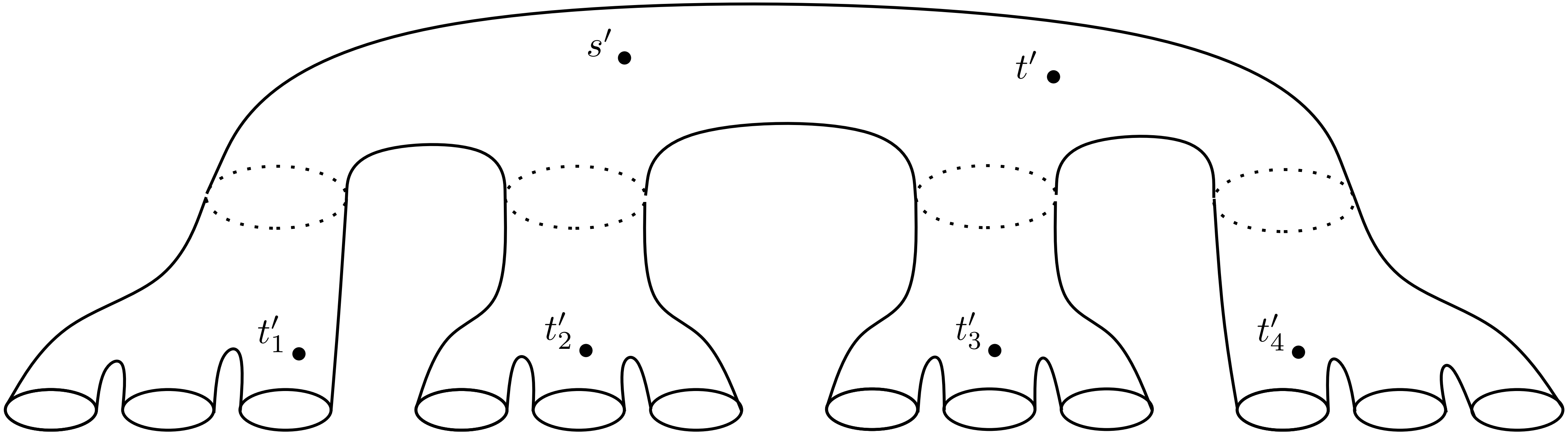


Krok 5 (slepování)

torus:



plochy vyššího rodu:



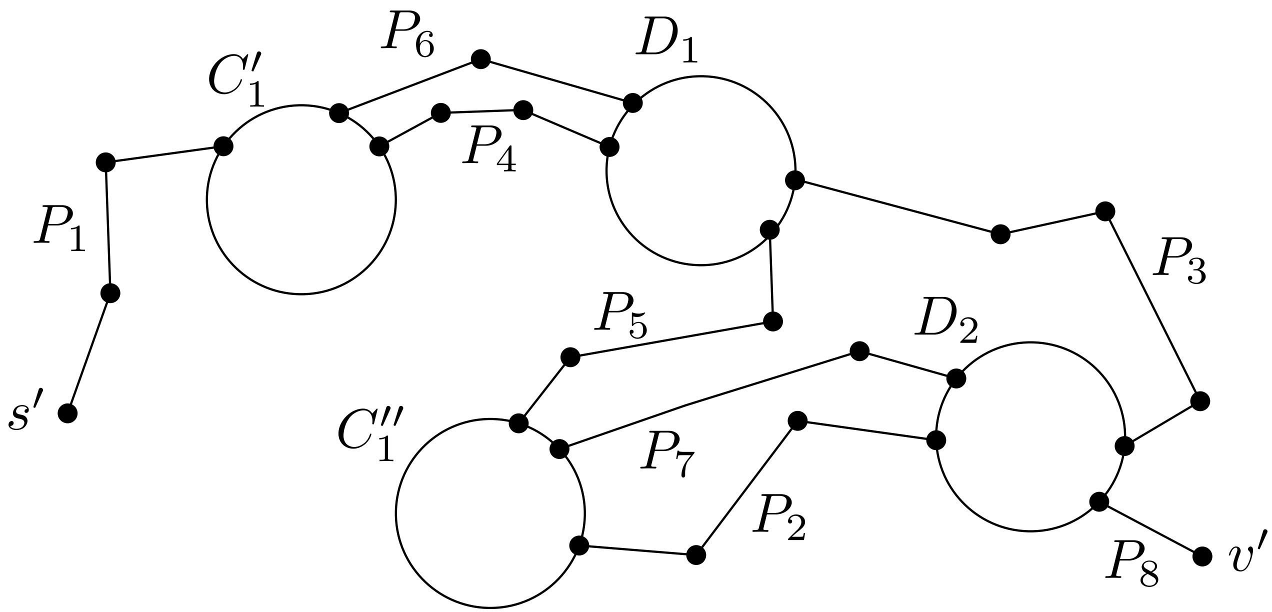
Stačí polynomiálně mnoho kopií G'

Stačí polynomiálně mnoho kopií G'

idea: cesty v G mají jen polynomiálně mnoho "topologických" typů vzhledem k řezovým cyklům

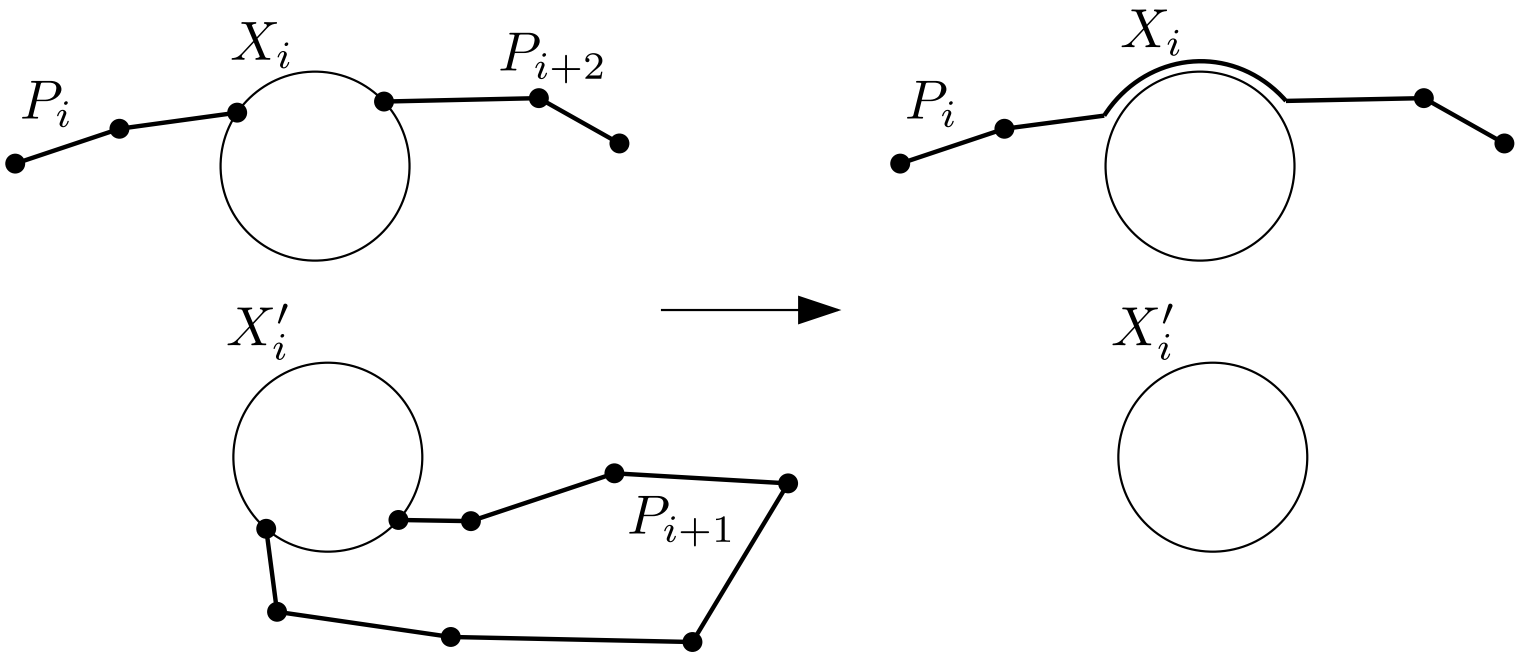
Stačí polynomiálně mnoho kopií G'

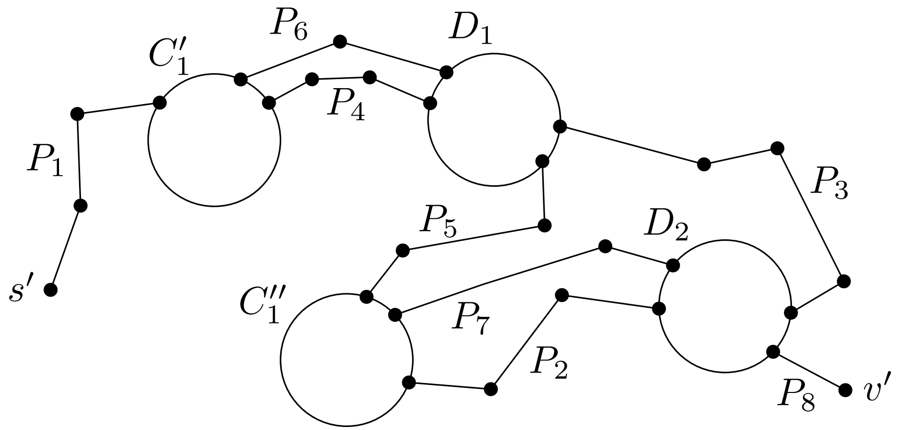
idea: cesty v G mají jen polynomiálně mnoho "topologických" typů vzhledem k řezovým cyklům



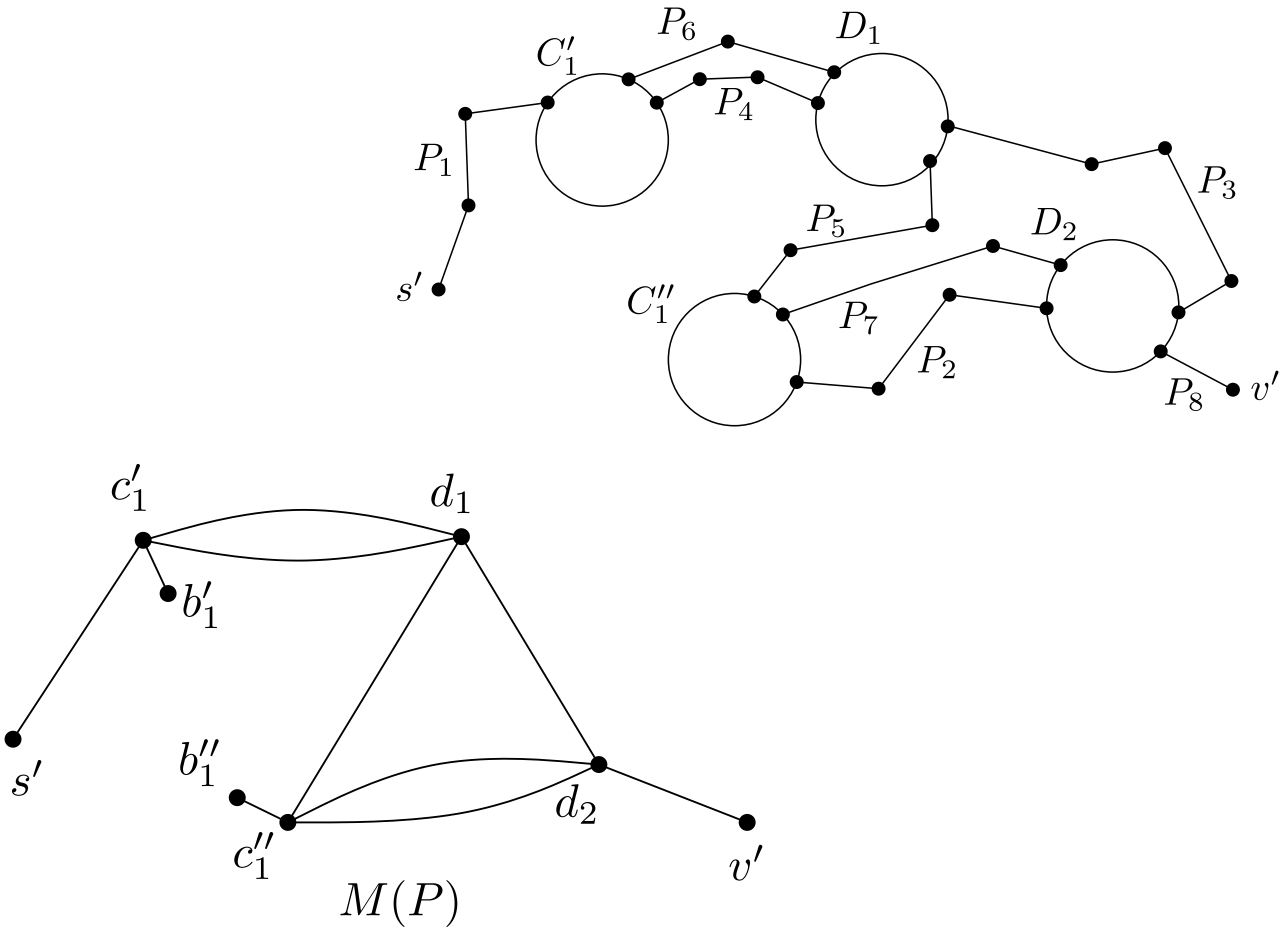
cesta P typu $(C_1', D_2, D_1, C_1', D_1, C_1', D_2)$

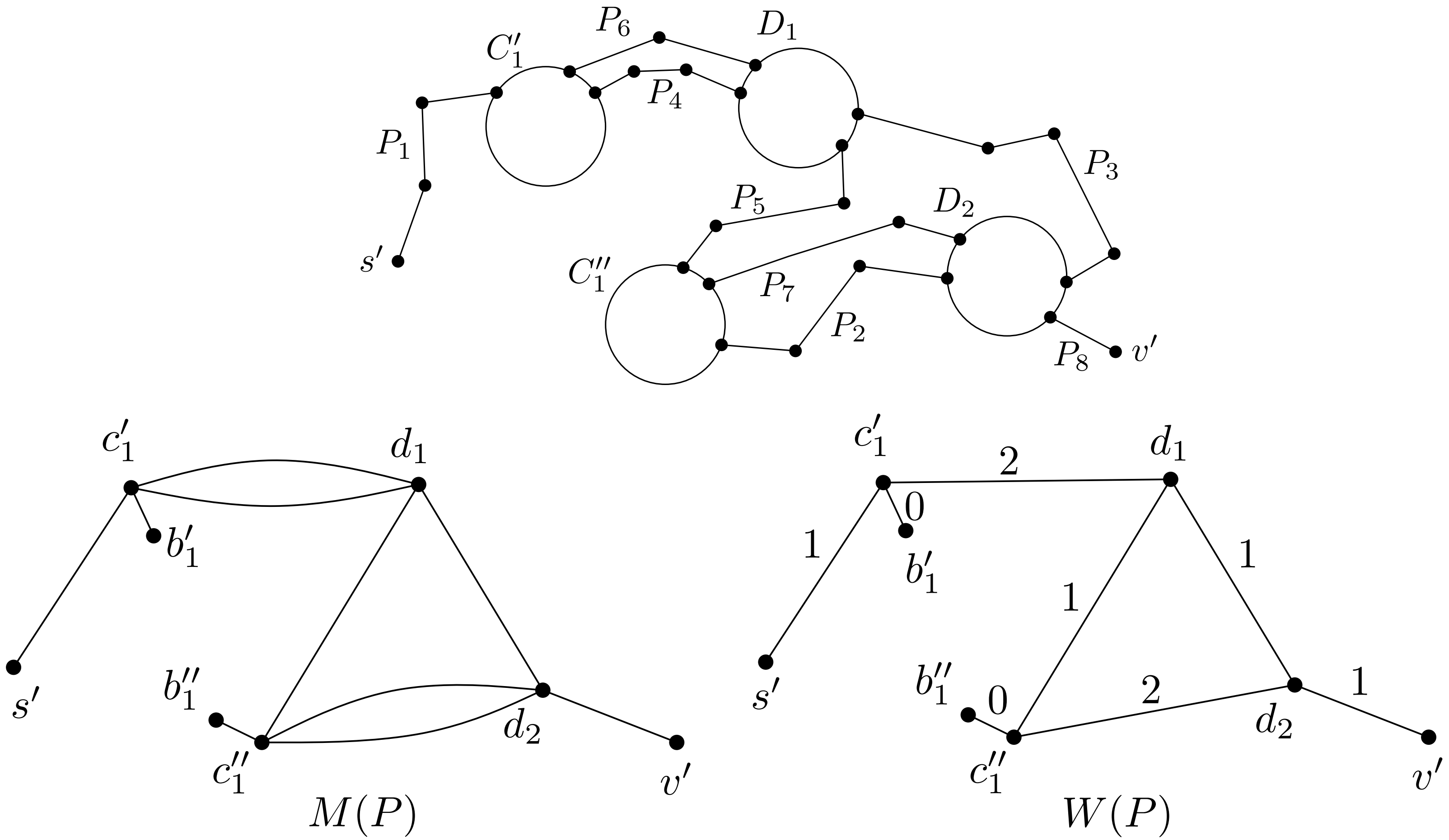
typ P určuje, ve které kopii G' zrekonstruovaná cesta P' skončí uvažujeme redukované s-v-cesty a jejich typy:

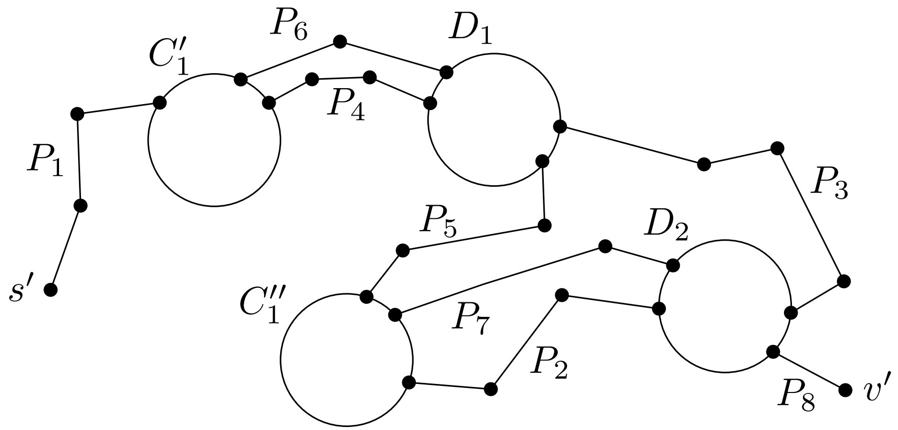


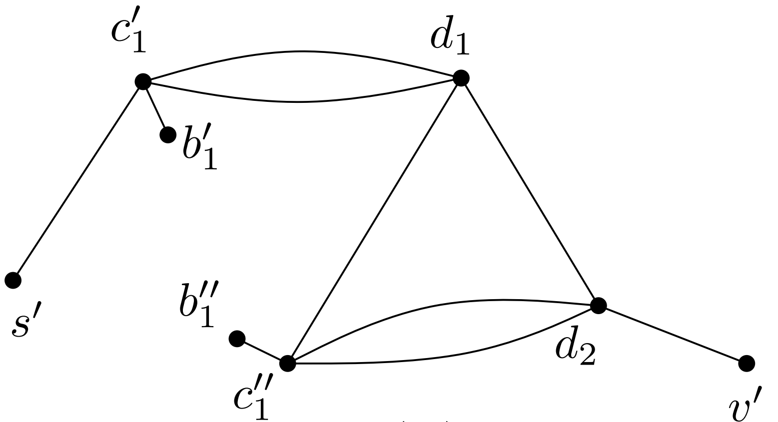


P_6
D_1
C_1'
P_4
P_1
P_3
P_5
D_2
s'
C_1''
P_7
P_2
P_8
v'

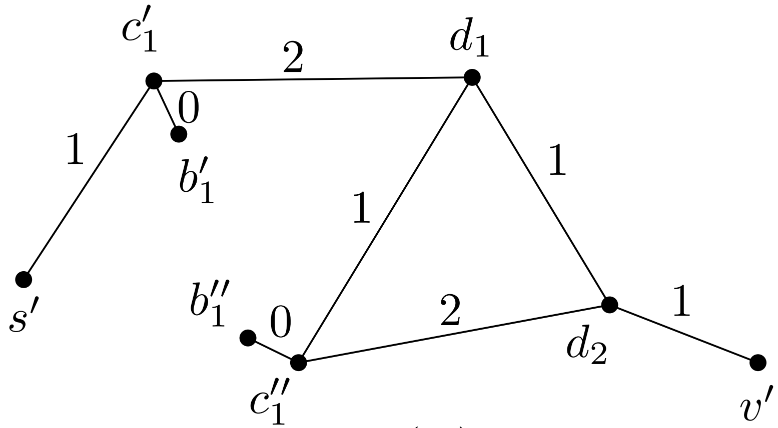

P_6
D_1
C_1'
P_4
P_1
P_3
P_5
D_2
s'
C_1''
P_7
P_2
P_8
v'
c_1'
d_1
b_1'
b_1''
s'
d_2
c_1''
v'
$M(P)$


P_6
D_1
C_1'
P_4
P_1
P_3
P_5
D_2
s'
C_1''
P_7
P_2
P_8
v'
c_1'
d_1
b_1'
s'
b_1''
d_2
c_1''
v'
$M(P)$
c_1'
2
d_1
0
1
b_1'
1
1
s'
b_1''
0
2
1
d_2
c_1''
v'
$W(P)$



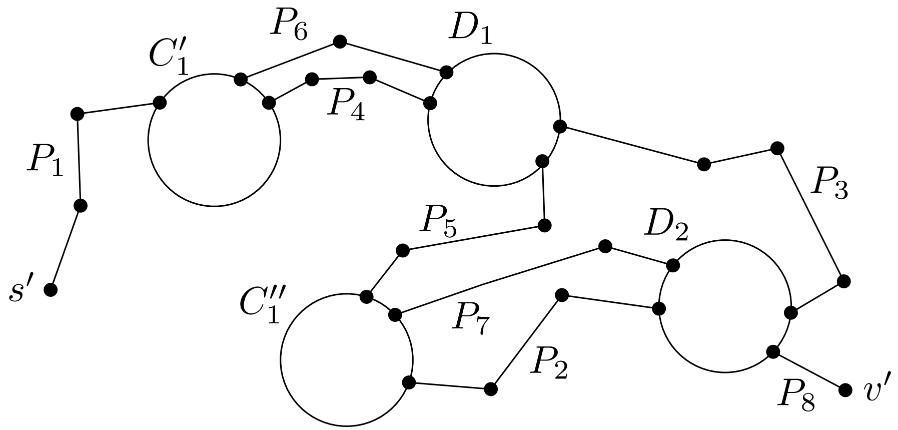


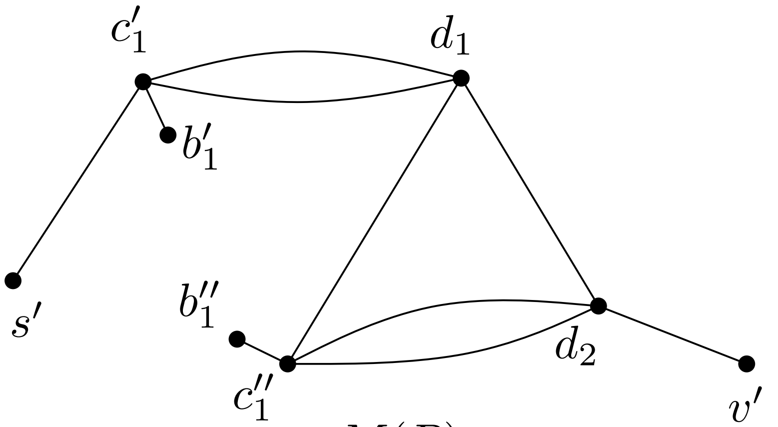
$M(P)$



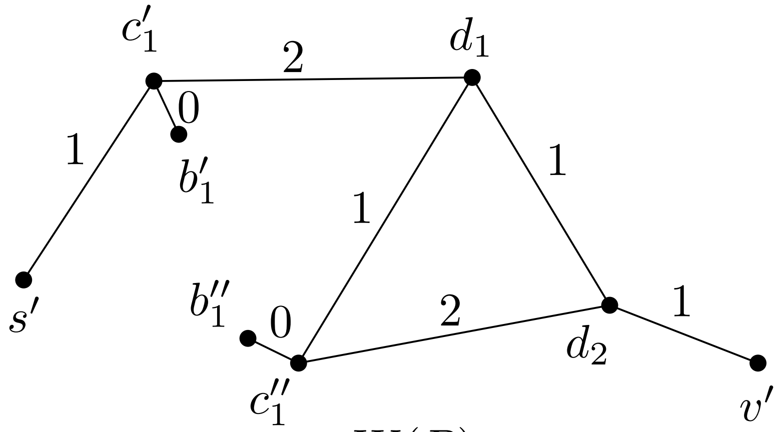
$W(P)$

$W(P)$ má konstantní počet hran (z Eulerovy formule)





$M(P)$



$W(P)$

$W(P)$ má konstantní počet hran (z Eulerovy formule)

$\Rightarrow$ váhy lze rozdělit polynomiálně mnoha způsoby a nagenerovat v logspace