Příklady z Kombinatoriky a grafů I - LS 2016/2017

zadáno 24. 2. - 2. 3. 2017, odevzdat do 3.-9. 3. 2017

1. Zjistěte, které z následujících funkcí definovaných pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ jsou v relaci $\Theta()$, a vzniklé třídy navzájem porovnejte pomocí relace $o()$. Logaritmy jsou se základem 2.

$$1,\ n\log n,\ 2^{\log\log n},\ (\log n)^{\log n},\ \log(n!),\ n^{\frac{1}{\log n}},\ \log(n^{2017})$$

[2]

---

zadáno 3.-9. 3. 2017, odevzdat do 10.-16. 3. 2017

2. Pomocí jednodušších funkcí odhadněte, jak zhruba rychle roste $\binom{an}{bn}$, kde $a > b > 0$ jsou konstanty. Tyto odhady využijte ke zjištění, zda roste rychleji $\binom{7n}{n}$ nebo $\binom{5n}{2n}$. **[2]**

---

zadáno 10.-16. 3. 2017, odevzdat do 17.-23. 3. 2017

3. Najděte generující funkci f pro posloupnost částečných součtů třetích mocnin přirozených čísel, tedy $(1, 1+8, 1+8+27, 1+8+27+64, \ldots)$. Pomocí funkce f odvoďte explicitní vzoreček pro n-tý prvek této posloupnosti. **[2]**

4. Označme $T_n = \{(a,b,c) \in \mathbb{N}^3; a+b+c=n\}$. Určete

$$\sum_{(a,b,c)\in T_n} abc.$$

[2]

zadáno 17.-23. 3. 2017, odevzdat do 24.-30. 3. 2017

5. a) Dokažte (např. pomocí generujících funkcí), že pro libovolná přirozená čísla $k \geq s \geq 1$ platí

$$\sum_{i=0}^{k-s} (-1)^i \binom{s-1+i}{s-1} \binom{k}{s+i} = 1.$$

[3]

b) Pomocí identity z části a) odvoďte zobecněnou větu o principu inkluze a exkluze pro počet prvků, které jsou obsaženy v průniku aspoň s množin z $A_1, A_2, \dots, A_n$, kde $s \in [n]$ je zadané číslo. (Tj. vyjádřete tento počet pomocí velikostí průniků nějakých systémů množin A_i. Pro $s = 1$ by měl vyjít klasický princip inkluze a exkluze.) **[2]**

---

zadáno 24.-30. 3. 2017, odevzdat do 31. 3. - 6. 4. 2017

6. Najděte explicitní vyjádření členu a_n v posloupnosti definované rekurentně jako $a_0 = 0, a_1 = 4, a_{n+2} = 2a_{n+1} - 5a_n - 16 \cdot (-1)^n$ (pro $n \geq 0$). Uveďte všechny výpočty. **[3]**

7. Určete počet slov délky n z abecedy $\{a, b, c\}$, v nichž písmena a, b nejsou těsně vedle sebe (tedy povolena jsou slova jako např. *aaccbcbbb*, ale zakázané je např. *cba*). Uveďte všechny výpočty. (2 body za nalezení rekurence, další 2 body za explicitní vzoreček) **[4]**

---

zadáno 31. 3. - 6. 4. 2017, odevzdat do 18.-21. 4. 2017

8. *Turistická cesta* je lomená čára z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2n, 0)$ sestávající z $2n$ úseček, kde každá úsečka je určena vektorem $(1, 1)$ nebo $(1, -1)$. Tedy n úseček směřuje šikmo nahoru a zbylých n šikmo dolů, ale mohou být za sebou v libovolném pořadí.

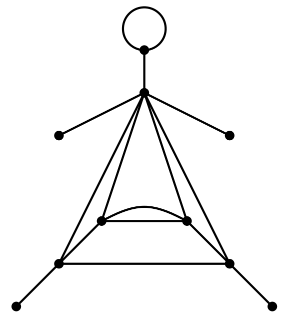
   (a) Ukažte, že pro $n \geq 1$ počet turistických cest, které nikdy neklesnou pod osu x, je stejný jako počet turistických cest, na nichž přesně jedna úsečka má pravý konec pod osou x. **[1]**

   (b) Ukažte, že pro $n \geq 2$ počet turistických cest, které nikdy neklesnou pod osu x, je stejný jako počet turistických cest, na nichž přesně dvě úsečky určené vektorem $(1, -1)$ mají pravý konec pod osou x. **[2]**

9. Určete počet permutací $\pi = \pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)$ množiny $\{1, 2, \dots, n\}$, které neobsahují podposloupnost $\pi(i), \pi(j), \pi(k)$, kde $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. (Např. permutace $2, 3, 5, 4, 1$ je zakázaná kvůli trojici $2, 5, 4$). **[3]**

zadáno 7.-13. 4. 2017, odevzdat do 18.-21. 4. 2017

10. Spočítejte počet koster multigrafu na obrázku (bez použití determinantu).



[2]

---

zadáno 7.-13. 4. 2017, odevzdat do 25.-28. 4. 2017

11. Spočítejte počet koster $K_{m,n,p}$ (pomocí determinantu). ($K_{m,n,p}$ je úplný tripartitní graf, jehož doplňkem je disjunktní sjednocení $K_m \cup K_n \cup K_p$). **[2]**

---

zadáno 18.-21. 4. 2017, odevzdat do 25.-28. 4. 2017

12. a) Dokažte, že pro libovolné $s, t \geq 2$, každý graf na n vrcholech, který neobsahuje podgraf izomorfní $K_{s,t}$, má nejvýše

$$\frac{1}{2}(s-1)^{1/t}(n-t+1)n^{1-1/t} + \frac{t-1}{2}n$$

hran. (Spočítejte vhodné podgrafy dvěma způsoby. Bez důkazu můžete použít Jensenovu nerovnost pro konvexní funkce.) **[2]**

b) Dokažte, že mezi libovolnými n body v rovině nejvýše $O(n^{3/2})$ dvojic bodů má vzdálenost 1. **[1]**

c) Dokažte, že mezi libovolnými n body v $\mathbb{R}^3$ nejvýše $O(n^{5/3})$ dvojic bodů má vzdálenost 1. **[1]**

d) Existuje $\varepsilon > 0$ takové, že mezi libovolnými n body v $\mathbb{R}^4$ nejvýše $O(n^{2-\varepsilon})$ dvojic bodů má vzdálenost 1? **[2]**

zadáno 25.-28. 4. 2017, odevzdat do 2.-5. 5. 2017

13. *Reprezentací* množinového systému $(X, \mathcal{P})$ v $\mathbb{R}^2$ pomocí bodů a přímek rozumíme prosté zobrazení $f : X \to \mathbb{R}^2$, které každému prvku X přiřadí bod v rovině tak, že pro každou množinu $P \in \mathcal{P}$ existuje přímka q_P taková, že $q_P \cap f[X] = f[P]$; tedy q_P obsahuje obrazy všech prvků P, ale neobsahuje obraz žádného prvku z $X \setminus P$.

    Dokažte, že žádnou konečnou projektivní rovinu nelze reprezentovat pomocí bodů a přímek v $\mathbb{R}^2$. (Důkaz pro Fanovu rovinu je za 2 body.) **[3]**

14. Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle, $n \geq 1$), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0, 1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Na grafu Q_n definujme síť se zdrojem $s = (0, 0, \ldots, 0)$ a stokem $t = (1, 1, \ldots, 1)$, kde kapacita každé hrany je 1 (v obou směrech). Najděte

    a) celočíselný maximální tok, **[1]**

    b) maximální tok, který je na každé hraně kladný právě v jednom směru. **[1]**

---

zadáno 2.-5. 5. 2017, odevzdat do 9.-12. 5. 2017

15. Před důležitým referendem, kde je možné hlasovat buď "Ano" nebo "Ne", se každý volič zeptá všech svých přátel (kteří jsou voliči), na jejich preference, a zjistí, že v této skupině jeho přátel včetně něj, preference jsou 3:1 ve prospěch "Ne". Kolik minimálně procent všech obyvatel preferuje "Ne"? (Relaci přátelství předpokládáme symetrickou.) **[3]**

---

zadáno 2.-5. 5. 2017, odevzdat do 16.-19. 5. 2017

16. Nechť k je přirozené číslo. Které $2k$-regulární grafy G mají k-regulární podgraf obsahující všechny vrcholy G? **[2]**

17. Nechť k je přirozené číslo. Dokažte, že každý $2k$-regulární graf G má 2-regulární podgraf obsahující všechny vrcholy G. **[2]**

---

zadáno 9.-12. 5. 2017, odevzdat do 16.-19. 5. 2017

18. Na šachovnici $n \times n$ je na každém políčku nezáporný počet kamenů, přičemž celkový počet kamenů v každém řádku i sloupci je přesně $2n$. Některá políčka mohou být prázdná. Dokažte, že lze vybrat n neprázdných políček tak, že z každého řádku i sloupce bude vybráno právě jedno. **[3]**

zadáno 16.-19. 5. 2017, odevzdat do 23.-26. 5. 2017

19. Dokažte, že každý hranově 2-souvislý graf s n vrcholy, který není vrcholově 2-souvislý, má aspoň $n + 4$ koster. **[2]**

20. Rozhodněte, zda každý 6-regulární bipartitní graf je hranově 3-souvislý. **[2]**

---

zadáno 16.-19. 5. 2017, odevzdat do 30. 6. 2017, nejpozději týden před zkouškou (pro jistotu)

21. Pro každé $n \geq 1$ určete stupeň hranové souvislosti grafu Q_n (tedy největší k takové, že Q_n je hranově k-souvislý). **[2]**

22. Pro každé $n \geq 3$ určete stupeň vrcholové souvislosti grafu $G = K_n - C_n$ (G má n vrcholů, odebíráme pouze hrany kružnice C_n). **[2]**

23. Pro všechny dvojice přirozených čísel k, l splňující $1 \leq k \leq l$ najděte graf $G_{k,l}$, pro který $\mathrm{k_v}(G_{k,l}) = k$ a $\mathrm{k_e}(G_{k,l}) = l$. **[2]**

24. Pro všechny dvojice přirozených čísel d, n, které splňují $d \geq (n-1)/2$, dokažte, že každý graf na n vrcholech s minimálním stupněm d je hranově d-souvislý. **[3]**

25. Rozhodněte, zda existuje $k \geq 4$ takové, že pro každý k-souvislý graf G a každých k jeho vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_k$, v G existuje kružnice procházející všemi vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_k$ v tomto pořadí. **[4]**

26. Dokažte, že pro každé přirozené n existuje N takové, že obarvíme-li hrany úplného grafu G na n vrcholech libovolným množstvím barev, pak v grafu G existují vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tak, že je splněná aspoň jedna z následujících podmínek:

    1) indukovaný graf $G[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ je duhový (tzn. všechny jeho hrany mají různou barvu),
    2) barva hrany $v_i v_j$, pro $i < j$, závisí jen na i. **[5]**

27. Najděte obarvení roviny 7 barvami tak, aby žádné dva body ve vzdálenosti 1 neměly stejnou barvu. **[2]**

28. Rozhodněte, zda v každém obarvení roviny dvěma barvami existuje jednobarevná trojice bodů tvořící vrcholy

    a) jednotkového rovnostranného trojúhelníka, **[2]**
    b) rovnoramenného trojúhelníka s úhlem $120°$ a dvěma přilehlými stranami délky 1, **[2]**

c) "degenerovaného" trojúhelníka s délkami stran 1, 2, 3. **[3]**

29. Rozhodněte, pro která přirozená čísla k platí: existuje $n_0 > 0$ takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ každý souvislý graf na n vrcholech má indukovaný podgraf s přesně k hranami. **[6]**

30. Dokažte, že pro každé přirozené c existuje N tak, že pro každé obarvení množiny $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ c barvami existuje trojice různých čísel x, y, z stejné barvy, splňující rovnici $x + y = 2z$ (jinými slovy - jednobarevná aritmetická posloupnost délky 3). Zkuste řešit indukcí podle c. **[5]**