Kombinatorika a grafy I — Cvičení 12–13

1. Ukažte, že graf je 2-souvislý, pokud je souvislý, má aspoň 3 vrcholy a každé dvě jeho *sousední* hrany leží na společné kružnici.

2. Dokažte, že graf je 2-souvislý právě tehdy, když je souvislý, má aspoň 3 vrcholy a každé dvě jeho hrany leží na společné kružnici.

3. Nechť G je hranově 2-souvislý graf. Ověřte, že relace "být na společné kružnici" na množině hran G je ekvivalence. (Třídám této relace se pak říká *komponenty 2-souvislosti* nebo také *bloky*.)

4. Ukažte, že hranově 2-souvislý graf maximálního stupně 3 je i vrcholově 2-souvislý.

5. Nechť $k_v(G)$ značí maximální vrcholovou a $k_e(G)$ maximální hranovou souvislost grafu G. Nechť v je nějaký vrchol G a e nějaká hrana G. Jaké nejlepší nerovnosti vždy platí mezi

   (a) $k_e(G)$ a $k_e(G - e)$,

   (b) $k_v(G)$ a $k_v(G - e)$,

   (c) $k_v(G)$ a $k_v(G - v)$,

   (d) $k_e(G)$ a $k_e(G - v)$?

6. Nechť G je vrcholově k-souvislý graf. Vytvoříme graf G' připojením nového vrcholu stupně k ke grafu G. Ukažte, že G' je také vrcholově k-souvislý.

7. Nechť G je vrcholově k-souvislý graf, $A, B \subseteq V(G)$ jsou disjunktní množiny a $|A| = |B| = k$. Ukažte, že v G existuje k vrcholově disjunktních cest z A do B.

8. Ukažte, že pro každé $k \geq 2$, v každém vrcholově k-souvislém grafu každých k vrcholů leží na společné kružnici.

9. Dokažte, že v každém obarvení hran úplného grafu K_n dvěma barvami existuje jednobarevná kostra. Platí to i pro tři barvy?

10. Najděte 8 bodů v rovině v obecné poloze (tj. žádné tři na přímce) tak, aby neobsahovaly vrcholy konvexního 5-úhelníka. Dokážete najít 16 bodů bez konvexního 6-úhelníka?

11. Erdősova–Szekeresova věta říká, že pro každé n existuje N tak, že každých N bodů v rovině v obecné poloze obsahuje vrcholy konvexního n-úhelníka. Ukažte, že stačí vzít $N = \mathrm{R}_3(n, n)$; tedy Ramseyovo číslo pro barvení trojic dvěma barvami.

12. Ukažte, že v každém obarvení $\mathbb{R}^2$ třemi barvami existují dva body stejné barvy ve vzdálenosti 1.