

Kombinatorika a grafy I — Cvičení 7

1. Ukažte, že počet cest po hranách mřížky z bodu $(0, 0)$ do bodu (n, n) , kde každý krok je buď směrem vpravo nebo nahoru, a které nikdy neklesnou pod diagonálu $y = x$, je roven Catalanovu číslu C_n .
Spočítejte počet těchto cest kombinatoricky, bez použití rekurze nebo generujících funkcí. Náповěda: počítejte cesty, které se dostanou pod diagonálu, a od prvního vrcholu pod diagonálou zbytek cesty zrcadlete podle přímky $y = x - 1$.
2. Jak jinak se dají charakterizovat hrany, které jsou ve všech kostrách grafu G ?
3. Dokažte, že pro počet koster grafu G vytvořeného slepením G_1 a G_2 za jeden vrchol platí $k(G) = k(G_1)k(G_2)$.
4. Počet koster (multi)grafu G s nenulovým počtem hran se dá počítat rekurzivně jako $k(G) = k(G - e) + k(G : e)$, kde e je libovolná hrana a $G : e$ je multigraf vzniklý z G kontrakcí hrany e . Pokud má G smyčku s , je $k(G) = k(G - s)$; pokud je G strom, je $k(G) = 1$; pokud je G nesouvislý, je $k(G) = 0$. Spočítejte počet koster
 - (a) kružnice C_n ,
 - (b) digitální osmičky (neboli kružnice délky 6 s jednou hlavní úhlopříčkou),
 - (c) zobecněné osmičky (grafu vzniklého slepením dvou kružnic C_n a C_m za jednu hranu).
5. Počet koster grafu G lze spočítat i následovně. Vytvořme matici L_G , jejíž řádky i sloupce jsou indexovány vrcholy G , a platí
 - $L_G(v, v) = d_G(v)$,
 - $L_G(u, v) = -1$ pokud uv je hrana G ,
 - $L_G(u, v) = 0$ jinak.

Nechť v je libovolný vrchol G a necht' $L_G^{(v)}$ je matice vzniklá z L_G smazáním řádku a sloupce označeného vrcholem v . Pak

$$k(G) = \det L_G^{(v)}.$$

(bez důkazu.)

Spočítejte tímto způsobem počet koster K_n .