Kombinatorika a grafy I — Cvičení 3–5

1. Určete generující funkce následujících posloupností:

   (a) $1, -2, 3, -4, 5, \dots$

   (b) $1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$

   (c) $i, i^2, i^3, i^4, \dots$, kde i je imaginární jednotka

   (d) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$

   (e) $1, 1+4, 1+4+9, 1+4+9+16, \dots$

   (f) $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}, \dots$

2. Určete koeficient u x^{50} v $(x^7 + x^8 + x^9 + \dots)^6$.

3. Určete koeficient u x^4 v $\sqrt[3]{1+7x}$.

4. Pomocí generujících funkcí sečtěte

   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$,

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}^2$.

5. Posloupnost $a_0, a_1, a_2, \dots$ je zadaná následovně:

   (a) $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+2} = -2a_{n+1} + 3a_n$ pro $n \geq 0$,

   (b) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ pro $n \geq 0$,

   (c) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n + 3$ pro $n \geq 0$.

   Najděte generující funkci této posloupnosti a s její pomocí vzoreček pro a_n.

6. *Rozkladem* čísla n (na části) rozumíme vyjádření n jako součet přirozených čísel, kde nám nezáleží na pořadí. Například číslo 3 má tři různé rozklady: $3, 2+1, 1+1+1$. Dokažte, že počet rozkladů n na liché části je stejný jako počet rozkladů n na různé části.

7. Pomocí generujících funkcí sestrojte dvojici falešných (tzn. ne pravých) šestistěnných kostek takových, že každá z kostek má na svých stěnách celkem 6 přirozených čísel (čísla se mohou opakovat a kostky mohou být různé), a pro každé přirozené k platí: pravděpodobnost, že při hodu oběma kostkami bude součet padlých čísel k, je stejná jako pro dvojici pravých kostek (které mají čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6$). I u falešných kostek předpokládáme, že každá stěna padne se stejnou pravděpodobností.

8. Vhodnou úpravou sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ukažte, že prvočísel je nekonečně mnoho. Využijte toho, že každé přirozené číslo lze jednoznačně vyjádřit jako součin prvočísel.