Kombinatorika a grafy I — Cvičení 14

1. Dokažte, že pro každý počet barev k existuje přirozené číslo N takové, že při každém obarvení množiny $\{1, 2, \ldots, N\}$ pomocí k barev existuje trojice čísel a, b, c stejné barvy splňující rovnici $a + b = c$.

2. Dokažte, že v každém obarvení hran úplného grafu K_n dvěma barvami existuje jednobarevná kostra. Platí to i pro tři barvy?

3. Najděte 8 bodů v rovině v obecné poloze (tj. žádné tři na přímce) tak, aby neobsahovaly vrcholy konvexního 5-úhelníka. Dokážete najít 16 bodů bez konvexního 6-úhelníka?

4. Erdősova–Szekeresova věta říká, že pro každé n existuje N tak, že každých N bodů v rovině v obecné poloze obsahuje vrcholy konvexního n-úhelníka. Ukažte, že stačí vzít $N = \mathrm{R}_3(n, n)$; tedy Ramseyovo číslo pro barvení trojic dvěma barvami.

5. Ukažte, že v každém obarvení $\mathbb{R}^2$ třemi barvami existují dva body stejné barvy ve vzdálenosti 1.