Kombinatorika a grafy I — Cvičení 12–13

1. Nechť G je vrcholově k-souvislý graf. Vytvoříme graf G' připojením nového vrcholu stupně k ke grafu G. Ukažte, že G' je také vrcholově k-souvislý.

2. Nechť G je vrcholově k-souvislý graf, $A, B \subseteq V(G)$ jsou disjunktní množiny a $|A| = |B| = k$. Ukažte, že v G existuje k vrcholově disjunktních cest z A do B.

3. Ukažte, že pro každé $k \geq 2$, v každém vrcholově k-souvislém grafu každých k vrcholů leží na společné kružnici.

4. Ukažte, že pro každé $k \geq 1$, každý k-regulární bipartitní graf má perfektní párování.

5. Najděte

   a) 2-regulární

   b) 3-regulární

   graf bez perfektního párování. Dokážete v části b) navíc zajistit rovinnost?

6. (Deficitní Hallova věta) Nechť $k \geq 1$ a nechť G je bipartitní graf s partitami X, Y. Předpokládejme, že pro každou podmnožinu $A \subseteq X$ platí $|N(A)| \geq |A| - k$, kde $N(A)$ značí množinu sousedů. Dokažte, že G má párování, které vynechá nejvýše k vrcholů z X.

7. Uvažujme formuli φ typu $(3, 3)$-SAT, tedy logickou formuli v konjunktivní normální formě, kde každá klauzule má tři literály a každá proměnná se vyskytuje přesně ve třech klauzulích. Taková formule vypadá např. jako

   $$\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (x_4 \vee x_1 \vee \neg x_3) \wedge \cdots \wedge (x_i \vee x_j \vee x_k).$$

   Dokažte, že φ je vždy splnitelná; tedy lze zvolit hodnoty proměnných x_i jako TRUE nebo FALSE tak, aby celá formule byla vyhodnocena jako TRUE.

8. Předpokládejme, že v grafu G má každý podgraf průměrný stupeň nejvýše $2d$. Dokažte, že hrany G lze zorientovat tak, aby z každého vrcholu vycházelo nejvýše d hran.

9. (Dilworthova věta) Má-li v částečně uspořádané množině $(X, \preceq)$ největší antiřetězec velikost k, pak X lze rozložit na k řetězců.

10. Odvoďte Hallovu větu z Dilworthovy věty.