Kombinatorika a grafy I — Cvičení 9

1. Písemku, která měla 4 úlohy, psalo 21 studentů. Pro každou dvojici studentů lze najít úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokažte, že některou z úloh vyřešila správně většina studentů.

2. Nechť $n > 1$ je liché přirozené číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou přirozená čísla. Pro permutaci π na množině $[n]$ označme $S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} \pi(i) a_i$. Ukažte, že existují dvě různé permutace π, σ, pro které $S(\pi) - S(\sigma)$ je dělitelné $n!$. Nápověda: počítejte dvěma způsoby.

3. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo, X je množina s $n^2 + n + 1$ prvky a $\mathcal{P}$ je soubor podmnožin X splňující

   (a) $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$,

   (b) každá množina v $\mathcal{P}$ má přesně $n + 1$ prvků a

   (c) každý prvek X je obsažen přesně v $n + 1$ množinách z $\mathcal{P}$.

   Je $(X, \mathcal{P})$ nutně konečná projektivní rovina?

4. Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo, X je množina s $n^2 + n + 1$ prvky a $\mathcal{P}$ je soubor podmnožin X splňující

   (a) $|\mathcal{P}| = n^2 + n + 1$,

   (b) každá množina v $\mathcal{P}$ má přesně $n + 1$ prvků a

   (c) každé dvě různé množiny z $\mathcal{P}$ mají nejvýše 1 společný prvek.

   Je $(X, \mathcal{P})$ nutně konečná projektivní rovina?

5. Najděte co největší $f(n)$ takové, že v každé projektivní rovině řádu n existuje $f(n)$ bodů v *obecné poloze*, tj. žádné tři z nich neleží na stejné přímce.

6. Najděte co největší $f(n)$ takové, že v nějaké projektivní rovině řádu n existuje $f(n)$ bodů v obecné poloze.