

Kombinatorika a grafy I — Cvičení 8

1. Jak jinak se dají charakterizovat hrany, které jsou ve všech kostrách grafu G ?
2. Dokažte, že pro počet koster grafu G vytvořeného slepením G_1 a G_2 za jeden vrchol platí $k(G) = k(G_1)k(G_2)$.
3. Počet koster (multi)grafu G s nenulovým počtem hran se dá počítat rekurzivně jako $k(G) = k(G - e) + k(G : e)$, kde e je libovolná hrana a $G : e$ je multigraf vzniklý z G kontrakcí hrany e . Pokud má G smyčku s , je $k(G) = k(G - s)$; pokud je G strom, je $k(G) = 1$; pokud je G nesouvislý, je $k(G) = 0$. Spočítejte počet koster
 - (a) kružnice C_n ,
 - (b) digitální osmičky (neboli kružnice délky 6 s jednou hlavní úhlopříčkou),
 - (c) zobecněné osmičky (grafu vzniklého slepením dvou kružnic C_n a C_m za jednu hranu).
4. Počet koster grafu G lze spočítat i následovně. Vytvořme matici L_G , jejíž řádky i sloupce jsou indexovány vrcholy G , a platí
 - $L_G(v, v) = d_G(v)$,
 - $L_G(u, v) = -1$ pokud uv je hrana G ,
 - $L_G(u, v) = 0$ jinak.

Nechť v je libovolný vrchol G a nechť $L_G^{(v)}$ je matice vzniklá z L_G smazáním řádku a sloupce označeného vrcholem v . Pak

$$k(G) = \det L_G^{(v)}.$$

Spočítejte tímto způsobem počet koster K_n .

5. Písemku, která měla 4 úlohy, psalo 21 studentů. Pro každou dvojici studentů lze najít úlohu, kterou oba vyřešili správně. Dokažte, že některou z úloh vyřešila správně většina studentů.
6. Nechť $n > 1$ je liché přirozené číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou přirozená čísla. Pro permutaci π na množině $[n]$ označme $S(\pi) = \sum_{i=1}^n \pi(i)a_i$. Ukažte, že existují dvě různé permutace π, σ , pro které $S(\pi) - S(\sigma)$ je dělitelné $n!$. Nápoděda: počítejte dvěma způsoby.