

Kombinatorika a grafy I — Cvičení 7

1. Ukažte, že následující struktury lze počítat Catalanovými čísly:

- (a) korektní uzávorkování součinu n prvků: např. $(ab)(cd)$, $a((bc)d)$, \dots
- (b) posloupnost n symbolů (a n symbolů) tvořící korektní uzávorkování: např. $()()()$, $((()))$, \dots
- (c) *pěstované stromy*, tj. stromy se zvoleným kořenem a rovinným nakreslením, kde u každého vrcholu nás zajímá pořadí podstromů zleva doprava
- (d) turistické cesty, které neklesnou pod osu x . *Turistická cesta* je lomená čára z bodu $(0, 0)$ do bodu $(2n, 0)$ sestávající z $2n$ úseček, kde každá úsečka je určena vektorem $(1, 1)$ nebo $(1, -1)$ (tedy n úseček směřuje šikmo nahoru a zbylých n šikmo dolů, ale mohou být za sebou v libovolném pořadí).
- (e) cesty po hranách mřížky z bodu $(0, 0)$ do bodu (n, n) , kde každý krok je buď směrem vpravo nebo nahoru, a které nikdy neklesnou pod diagonálu $y = x$.

Spočítejte počet mřížkových cest z části (e) kombinatoricky, bez použití rekurze nebo generujících funkcí. Nápodvěda: počítejte cesty, které se dostanou pod diagonálu, a od prvního vrcholu pod diagonálou zbytek cesty zrcadlete podle přímky $y = x - 1$.