Příklady ze Základů kombinatoriky a teorie grafů
LS 2012/2013

1. Sestrojte nekonečně mnoho grafů, které jsou izomorfní svému doplňku. **[3]**

2. Pro každou dvojici přirozených čísel n, k, která splňuje podmínky $n \geq k+1$ a $2|kn$, sestrojte k-regulární graf na n vrcholech. **[4]**

3. Dokažte, že každý úplný orientovaný graf má orientovanou hamiltonovskou cestu. **[1]**

4. Dokažte, že každý silně souvislý úplný orientovaný graf má orientovanou hamiltonovskou kružnici. (Orientovaný graf je *silně souvislý*, pokud z každého vrcholu v do každého jiného vrcholu w vede orientovaná cesta.) **[2]**

5. Pro která n lze úplný graf K_n rozložit na hranově disjunktní

   a) hamiltonovské kružnice, **[1]**

   b) hamiltonovské cesty? **[1]**

6. Dokažte, že pro každé $n \geq 1$ lze K_n rozložit na hranově disjunktní cesty různé délky. **[2]**

7. Dokažte, že K_n lze rozložit na hranově disjunktní cesty délky 2 právě tehdy, když $n = 4k$ nebo $n = 4k + 1$ pro k celé. **[3]**

8. Dokažte, že každý graf s n vrcholy a minimálním stupněm 3 obsahuje kružnici délky nejvýše $O(\log n)$. **[2]**

9. Nechť G je graf s aspoň čtyřmi vrcholy. Platí, že pro každý jeho vrchol v je $G - v$ regulární (všechny vrcholy mají stejný stupeň). Ukažte, že také G je regulární. **[3]**

10. Uvažujme graf Q_n (graf n-dimenzionální krychle, $n \geq 1$), jehož vrcholy tvoří množinu $\{0, 1\}^n$ a hrany spojují vrcholy lišící se právě v jedné souřadnici. Na grafu Q_n definujme síť se zdrojem $s = (0, 0, \ldots, 0)$ a stokem $t = (1, 1, \ldots, 1)$, kde kapacita každé hrany je 1 (v obou směrech). Najděte

    a) celočíselný maximální tok, **[1]**

    b) maximální tok, který je na každé hraně kladný (právě v jednom směru). **[1]**

11. Dokažte, že hrany každého grafu lze zorientovat tak, že vstupní a výstupní stupeň každého vrcholu se liší nejvýše o 1. **[2]**

12. Které $2k$-regulární grafy mají k-faktor? (k-faktor grafu G je k-regulární podgraf G obsahující všechny vrcholy G) **[2]**

13. Dokažte, že každý $2k$-regulární graf má 2-faktor. **[3]**

14. Nechť $n \geq k \geq 1$. Na šachovnici $n \times n$ je rozmístěno několik věží tak, že z každých $k + 1$ se nějaké dvě ohrožují (tedy leží ve stejném řádku nebo sloupci). Ukažte, že lze najít r řádků a s sloupců, které pokrývají pozice všech věží, a navíc $r + s \leq k$. **[3]**

15. Pro každé $n \geq 1$ určete stupeň hranové souvislosti grafu Q_n (tedy největší k takové, že Q_n je hranově k-souvislý). **[2]**

16. Pro každé $n \geq 3$ určete stupeň vrcholové souvislosti grafu $G = K_n \setminus C_n$ (G má n vrcholů, odebíráme pouze hrany kružnice C_n). **[2]**

17. Pro všechny dvojice přirozených čísel d, n, které splňují $d \geq (n - 1)/2$, dokažte, že každý graf na n vrcholech s minimálním stupněm d je hranově d-souvislý. **[3]**

18. Nechť $d \geq 2$. Dokažte, že každý souvislý d-regulární bipartitní graf je hranově 2-souvislý. **[3]**

19. Pro všechny dvojice přirozených čísel k, l splňující $1 \leq k \leq l$ najděte graf $G_{k,l}$, pro který $\mathrm{k_v}(G_{k,l}) = k$ a $\mathrm{k_e}(G_{k,l}) = l$. **[2]**

20. Dokažte, že hrany každého souvislého grafu se sudým počtem hran je možné zorientovat tak, aby vstupní stupeň každého vrcholu byl sudý. **[3]**

21. Dokažte, že v hranově 2-souvislém grafu je každý vrchol na nějaké kružnici. **[1]**

22. Rozhodněte, zda existuje $k \geq 4$ takové, že pro každý k-regulární graf G a každých k jeho vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_k$, v G existuje kružnice procházející všemi vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_k$ v tomto pořadí. **[4]**

23. a) Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy není rovinný. **[1]**
    b) Pro co největší $k < 11$ rozhodněte, zda existuje rovinný graf na k vrcholech, jehož doplněk je rovinný. **[2(k-7)]**

24. Pro co největší konstantu c dokažte: Každý souvislý graf s n vrcholy a $n+c$ hranami je rovinný. **[2c]**

25. Dokažte, že každý rovinný graf, jehož vrcholy mají všechny stupeň aspoň 5, má aspoň 12 vrcholů. **[2]**

26. Rozhodněte, zda následující graf (říká se mu graf incidence Fanovy roviny) je rovinný: bipartitní graf s vrcholy $1, 2, \ldots, 7, a, b, \ldots, g$, kde vrcholy $a, b, \ldots, g$ (reprezentující přímky) postupně sousedí s následujícími trojicemi ostatních vrcholů (které reprezentují body): 123, 345, 561, 147, 257, 367, 246. **[2]**

27. Nakreslete na torus (povrch pneumatiky) následující grafy bez křížení hran:
a) K_7, **[1]**
b) $K_{3,6}$. **[1]**
Torus můžete reprezentovat např. jako obdélník, kde se k sobě slepí protější strany (hrany grafu pak mohou vést i "přes okraj").

28. Dokažte, že následující grafy nelze nakreslit na torus bez křížení:
a) K_8, **[2]**
b) $K_{4,5}$, $K_{3,7}$. **[2]**
Můžete k tomu použít variantu Eulerovy formule pro torus: $E \leq V + F$ (rovnost by platila pro nakreslení souvislých grafů, kde každá stěna je rovinná).

29. Pro každé $n \geq 3$ najděte graf na n vrcholech, který je
a) rovinný a má maximální možný počet hran, **[1]**
b) bipartitní, rovinný a má maximální možný počet hran. **[1]**

30. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf lze dobře obarvit nejvýše třemi barvami. (Vnějškově rovinný graf je takový, který má rovinné nakreslení se všemi vrcholy na hranici vnější stěny. Na hranici vnější stěny se mohou některé vrcholy a hrany opakovat.) **[4]**

31. Dokažte, že pro žádné $n \geq 1$ nelze n nekonvexními čtyřúhelníky vydláždit konvexní mnohoúhelník. (Čtyřúhelníky se při dláždění nesmí překrývat.) **[4]**

32. Dokažte, že každý bipartitní rovinný graf lze nakreslit do roviny bez křížení tak, že každá hrana právě jednou projde přes osu x. **[4]**

33. Dokažte, že pro každé přirozené c existuje N tak, že pro každé obarvení množiny $[N] = \{1, 2, \ldots, N\}$ c barvami existuje trojice různých čísel x, y, z stejné barvy, splňující rovnici $x + y = 2z$ (jinými slovy — jednobarevná aritmetická posloupnost délky 3). Zkuste řešit indukcí podle c. **[5]**

34. Dokažte, že pro každé přirozené n existuje N takové, že obarvíme-li hrany úplného grafu G na n vrcholech libovolným množstvím barev, pak v grafu G existuje n různých vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_n$ takových, že je splněná aspoň jedna z následujících podmínek:

1) indukovaný graf $G[v_1, v_2, \ldots, v_n]$ je *duhový* (tzn. všechny jeho hrany mají různou barvu),

2) barva hrany $v_i v_j$, pro $i < j$, závisí jen na i. **[5]**

35. Rozhodněte, zda v každém obarvení roviny dvěma barvami existuje jednobarevná trojice bodů tvořící vrcholy

 a) jednotkového rovnostranného trojúhelníka, **[2]**

 b) "degenerovaného"trojúhelníka s délkami stran 1, 2, 3. **[3]**

36. Najděte obarvení roviny 7 barvami tak, aby žádné dva body ve vzdálenosti 1 neměly stejnou barvu. **[2]**

37. Rozhodněte, pro která přirozená čísla k platí: existuje $n_0 > 0$ takové, že pro všechna přirozená $n > n_0$ každý souvislý graf na n vrcholech má indukovaný podgraf s přesně k hranami. **[6]**

38. Najděte generující funkci f pro posloupnost částečných součtů třetích mocnin přirozených čísel, tedy $(1, 1+8, 1+8+27, 1+8+27+64, ...)$. Pomocí funkce f odvoďte explicitní vzoreček pro n-tý prvek této posloupnosti. **[2]**

39. Označme $T_n = \{(a, b, c) \in \mathbb{N}^3; a + b + c = n\}$. Určete

$$\sum_{(a,b,c)\in T_n} abc.$$

[2]

40. Pomocí generujících funkcí sestrojte dvojici falešných (tzn. ne pravých) šestistěnných kostek takových, že každá z kostek má na svých stěnách celkem 6 přirozených čísel (čísla se mohou opakovat a kostky mohou být různé), a pro každé přirozené k platí: pravděpodobnost, že při hodu oběma kostkami bude součet padlých čísel k, je stejná jako pro dvojici pravých kostek (které mají čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6$). I u falešných kostek předpokládáme, že každá stěna padne se stejnou pravděpodobností. **[2]**

41. a) Dokažte (např. pomocí generujících funkcí), že pro libovolná přirozená čísla $k \geq s \geq 1$ platí

$$\sum_{i=0}^{k-s} (-1)^i \binom{s-1+i}{s-1} \binom{k}{s+i} = 1.$$

[3]

42. Najděte explicitní vyjádření n-tého členu posloupnosti definované rekurentně jako $a_0 = a_1 = a_2 = 1, a_{n+3} = a_{n+2} - 2a_{n+1} - 4a_n$ $(n \geq 0)$. **[3]**

43. Určete počet slov délky n z abecedy $\{a, b, c, d\}$, v nichž písmena a, b nejsou těsně vedle sebe. Tedy zakázány jsou dvojice ab, ba, ale jsou povoleny aa, bb. (3 body za nalezení rekurence, další 3 body za explicitní vzoreček) **[6]**