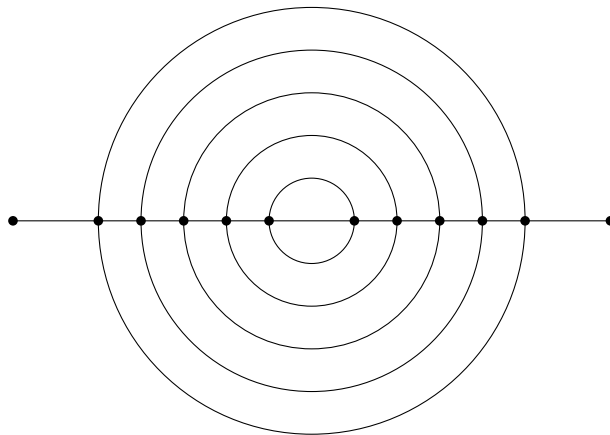


Diskrétní matematika — Cvičení 13–14

1. Nakreslete všechny navzájem neizomorfní grafy se 4 vrcholy (tedy jeden graf z každé třídy izomorfismu).
2. Pro nějaké $n \geq 2$ najděte graf G na $[n]$, jehož jediným automorfismem je identita. (Jinými slovy, třída izomorfismu grafů na $[n]$ obsahující G má $n!$ prvků.) Zkuste pak najít strom s touto vlastností.
3. Dokažte, že pokud graf obsahuje lichou kružnici, pak obsahuje i indukovanou lichou kružnici.
4. Může být doplněk bipartitního grafu s 5 vrcholy bipartitní?
5. *Kostra* grafu G je podgraf G , který je izomorfní stromu a obsahuje všechny vrcholy G . Dokažte, že každý souvislý graf má kostru.
6. Jaký je minimální možný počet hran v grafu s n vrcholy a k komponentami?
7. Dokažte, že každý strom s vrcholem stupně d má aspoň d listů.
8. Na večírku se sešlo $n \geq 2$ hostů. Předpokládejme, že relace "znát se" je symetrická. Ukažte, že existují dva hosté, kteří znají stejný počet ostatních hostů.
9. Najděte dva neizomorfní grafy se stejným skóre. Najděte strom a "nestrom" se stejným skóre. Najděte dva neizomorfní stromy se stejným skóre.
10. Nechť $n \geq 2$. Dokažte, že (d_1, d_2, \dots, d_n) je skóre nějakého stromu právě tehdy, když pro každé i platí $d_i \geq 1$ a $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$.
11. Zobecněte Eulerův vzorec pro nesouvislé rovinné grafy s k komponentami.
12. Najděte graf a dvě jeho rovinná nakreslení R_1 a R_2 taková, že duál R_1 není izomorfní duálu R_2 .
13. Graf je *d-degenerovaný*, pokud každý jeho podgraf má vrchol stupně nejvýše d . Dokažte, že *d-degenerované* grafy mají barevnost nejvýše $d + 1$.
Dále ukažte, že graf je *d-degenerovaný* právě tehdy, když jeho vrcholy jdou seřadit do posloupnosti zleva doprava tak, že, každý vrchol má nejvýše d levých sousedů.
14. Pro která k existuje k -regulární rovinný graf?

15. Nakreslete následující multigraf jedním nekřížícím se eulerovským tahem:



16. Dokažte, že souvislý graf má (ne nutně uzavřený) eulerovský tah právě tehdy, když má nejvýše dva vrcholy lichého stupně.