

Diskrétní matematika — Cvičení 1

1. Na vodorovné tyči dlouhé 1 metr je 25 mravenců. V čase 0 se každý mravenec začne pohybovat rychlostí 1 cm/s podél tyče, a to v jednom ze dvou možných směrů (vlevo nebo vpravo). Pokud dojde na okraj tyče, spadne dolů. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout; místo toho se oba otočí čelem vzad a pokračují v pohybu opačným směrem. Dokažte, že nejpozději za 100 sekund všichni mravenci popadají.
2. Kolik nejvýše věží lze rozmístit na obdélníkovou šachovnici $m \times n$, aby se žádné dvě vzájemně neohrožovaly?
3. Kolik nejvýše koní lze rozmístit na obdélníkovou šachovnici 2×8 , aby se žádní dva vzájemně neohrožovali?
4. Rozhodněte, zda lze šachovnici 8×8 bez rohového políčka vydláždít obdélníky 1×3 a 3×1 .
Jednodušší verze: Rozhodněte, zda lze šachovnici 8×8 bez dvou protějších rohových políček vydláždít dominy; tj. obdélníky 1×2 a 2×1 .
5. Dokažte, že každé přirozené číslo je součinem prvočísel.
6. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho. (Můžete využít předchozí příklad.)
7. Dokažte, že pomocí tříkorunových a pětikorunových mincí lze zaplatit každou celočíselnou částku větší nebo rovnou 8 Kč.
8. Dokažte, že šachovnici $2^n \times 2^n$, ve které jedno políčko chybí, lze vydláždít dlaždicemi tvaru "L" pokrývajícími tři políčka (jsou povolena všechna 4 otočení).
9. V rovině je nakreslených n přímk, z nichž žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři neprocházejí stejným bodem. Dokažte, že rozdělí rovinu přesně na $\frac{n^2+n}{2} + 1$ částí.