

## Diskrétní matematika — Cvičení 12

1. Pro nějaké  $n \geq 2$  najděte graf  $G$  na  $[n]$ , jehož jediným automorfismem je identita. (Jinými slovy, třída izomorfismu grafů na  $[n]$  obsahující  $G$  má  $n!$  prvků.) Zkuste pak najít strom s touto vlastností.
2. Dokažte bez použití charakterizace bipartitních grafů, že pokud graf obsahuje lichou kružnici, pak obsahuje i indukovanou lichou kružnici.
3. Může být doplněk bipartitního grafu s 5 vrcholy bipartitní?
4. *Kostra* grafu  $G$  je podgraf  $G$ , který je izomorfní stromu a obsahuje všechny vrcholy  $G$ . Dokažte, že každý souvislý graf má kostru.
5. Jaký je minimální možný počet hran v grafu s  $n$  vrcholy a  $k$  komponentami?
6. Dokažte, že každý strom s vrcholem stupně  $d$  má aspoň  $d$  listů.
7. Na večírku se sešlo  $n \geq 2$  hostů. Předpokládejme, že relace "znát se" je symetrická. Ukažte, že existují dva hosté, kteří znají stejný počet ostatních hostů.
8. Najděte strom a "nestrom" se stejným skóre. Najděte dva neizomorfní stromy se stejným skóre.
9. Dokažte, že  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  je skóre nějakého stromu právě tehdy, když pro každé  $i$  platí  $d_i \geq 1$  a  $\sum_{i=1}^n d_i = 2n - 2$ .