

Diskrétní matematika — Cvičení 6

1. Kolika způsoby lze napsat n jako součet k
 - a) celých nezáporných čísel,
 - b) přirozených čísel,záleží-li na pořadí sčítanců?
2. Určete počet uspořádaných dvojic (A, B) , kde $A, B \subseteq [n]$, splňujících navíc
 - a) $A \cap B = \emptyset$,
 - b) $A \subseteq B$,
 - c) $|A \cap B| = 1$.
3. Dokažte následující identity kombinatorickou interpretací (případně i výpočtem):
 - a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
 - b) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
 - c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
 - d) $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
 - e) $\binom{n}{m} \binom{m}{r} = \binom{n}{r} \binom{n-r}{m-r}$
 - f) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{r-k} = \binom{m+n}{r}$
 - g) $\sum_{k=r}^n \binom{k}{r} = \binom{n+1}{r+1}$
4. Kolik je přesmyček slova "MATEMATIKA"?
5. V 1. ročníku je 200 studentů a každý z nich má rád Analýzu, Diskrétní matematiku nebo Programování. 130 studentů má rádo Programování, 100 Diskrétní matematiku, 40 Analýzu, 35 Programování i Diskrétní matematiku, 25 Programování i Analýzu, a 15 Analýzu i Diskrétní matematiku, Kolik studentů má rádo všechny tři předměty?
6. Dokažte vzorec $\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k})$ pro výpočet Eulerovy funkce pomocí principu inkluze a exkluze. Dále rozhodněte, pro která n je $\varphi(n)$ liché.