Diskrétní matematika — Cvičení 3

Fibonacciova čísla jsou definována následovně: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$. Tedy $F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$ atd.

1. Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky n, které neobsahují dvě nuly těsně vedle sebe, je roven F_{n+2}.

2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí $\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$ (můžete využít předchozí příklad).

3. Popište, jaká relace vznikne složením ostrých uspořádání

   a) $< \circ <$ na množině $\mathbb{N}$,

   c) $< \circ <$ na množině $\mathbb{R}$.

4. Najděte relace R, S na nějaké množině X takové, že $R \circ S \neq S \circ R$. Co když navíc požadujeme, aby R, S byly

   b) funkce?

   c) bijekce?

5. Ukažte, že zobrazení $f : X \to X$ na konečné množině X je prosté právě tehdy, když je na. Platí totéž i v případě $X = \mathbb{N}$?

6. Nechť h je zobrazení vzniklé složením dvou zobrazení prostých, na, bijekcí, či jejich kombinací. Je nutně h prosté, na, nebo bijekce?

7. Rozhodněte, zda následující relace R, S jsou ekvivalence na $\mathbb{R}^2$ a pokud ano, určete třídy ekvivalence:

   a) $(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee y_1 = y_2$

   b) $(x_1, y_1)S(x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 + y_1 = x_2 + y_2$

8. Určete počet

   a) všech,

   b) reflexivních,

   c) symetrických,

   d) antisymetrických

   relací na množině $\{1, 2, 3, 4\}$.

9. Kolik je na množině $\{1, 2, 3, 4\}$ ekvivalencí?