

Diskrétní matematika — Cvičení 2

1. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
2. Dokažte, že pomocí tříkorunových a pětikorunových mincí lze zaplatit každou celočíselnou částku větší nebo rovnou 8 Kč.
3. Dokažte, že šachovnici $2^n \times 2^n$, ve které jedno políčko chybí, lze vydláždit dlaždicemi tvaru "L" pokrývajícími tři políčka (jsou povolena všechna 4 otočení).
4. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí

$$(a) \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(b) \sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2,$$

$$(c) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Fibonacciova čísla jsou definována následovně: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro každé $n \geq 3$. Tedy $F_3 = 2$, $F_4 = 3$, $F_5 = 5$ atd.

5. Dokažte, že počet posloupností nul a jedniček délky n , které neobsahují dvě nuly těsně vedle sebe, je roven F_{n+2} .
6. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$(a) \sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1 \quad (\text{můžete využít předchozí příklad}),$$

$$(b) \sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1},$$

$$(c) F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$