Příklady z Diskrétní matematiky - ZS 2009/2010

1. Na vodorovné tyči dlouhé 1 metr je 25 mravenců. V čase 0 se každý mravenec začne pohybovat rychlostí 1 cm/s podél tyče, a to v jednom ze dvou možných směrů (vlevo nebo vpravo). Na okrajích tyče jsou zábrany, takže pokud nějaký mravenec dojde na okraj, otočí se čelem vzad a pokračuje v pohybu opačným směrem. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout; místo toho se oba otočí čelem vzad a pokračují v pohybu opačným směrem. Třináctý mravenec zleva se jmenuje Ferda a v čase 0 stojí přesně uprostřed tyče. Kde se bude Ferda nacházet za 100 sekund? Proč? **[3]**

2. Kolik nejvýše koní lze rozmístit na obdélníkovou šachovnici $3 \times n$, aby se žádní dva vzájemně neohrožovali? **[4]**

3. Kolik nejvýše střelců lze rozmístit na čtvercovou šachovnici $n \times n$, aby se žádní dva vzájemně neohrožovali? **[4]**

4. Dokažte, že pro žádné přirozené n nejde šachovnice $4 \times n$ proskákat koněm jedním uzavřeným tahem (při kterém navštívíme každé políčko právě jednou). **[4]**

5. Rozhodněte, zda každý dostatečně veliký čtverec $n \times n$ lze vydláždit čtvercovými dlaždicemi o rozměrech

   a) 2×2 a 3×3 **[5]**

   b) 7×7, 8×8 a 9×9 **[5]**

6. Rozhodněte, pro která přirozená n lze šachovnice $n \times n$ vydláždit dlaždicemi tvaru "L" pokrývajícími tři políčka (jsou povolena všechna 4 otočení). **[3]**

7. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2 .$$

[2]

8. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} < \frac{1}{4}.$$

[2]

9. Nechť F_n je n-tý člen Fibonacciho posloupnosti (tj. $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pro $n \geq 3$). Bez použití explicitního vzorce pro F_n dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 2$ platí

$$F_{n+1}F_{n-1} = F_n^2 + (-1)^n.$$

[4]

10. Dokažte, že každé přirozené číslo n lze jednoznačně napsat ve tvaru

$$n = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j},$$

kde $i_1 \geq 2$ a pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ je $i_{j+1} \geq i_j + 2$. **[4]**

11. Nechť x je reálné číslo takové, že $x + \frac{1}{x}$ je celé. Dokažte, že pak pro libovolné přirozené n je i číslo $x^n + \frac{1}{x^n}$ celé. **[4]**

12. Uvažujme nekonečnou šachovnici, kde každé políčko má celočíselné souřadnice (x, y). Na každém políčku se souřadnicí $y \leq 0$ je jeden hrací kámen. Je-li ve dvou hranově sousedních políčcích P_1, P_2 aspoň jeden kámen, lze provést tah, a to následovně: vezmeme jeden kámen z políčka P_1, přeskočíme přes P_2 a položíme jej na následující políčko P_3; přitom však odstraníme jeden kámen z P_2. Je povoleno nashromáždit víc kamenů na jednom políčku. Kolik nejméně tahů je potřeba, abychom aspoň s jedním kamenem doskočili na políčko o souřadnicích $(0, 5)$? **[5]**

13. Na každém políčku šachovnice 8×8 je nakreslená šipka v jednom z osmi směrů $(0°, 45°, 90°, \ldots, 315°)$, přitom směry šipek ve dvou hranově sousedních políčcích se liší nejvýše o $45°$. Na políčku C4 stojí robot. V každém tahu se podívá na šipku pod sebou a přesune se ve směru této šipky na jedno z osmi (hranově či rohově) sousedních políček. Dokažte, že nejpozději po 64 tazích skončí robot mimo šachovnici. (Při důkazu indukcí nejprve důkladně zformulujte tvrzení, které budete indukcí dokazovat.) **[5]**

14. Kolik existuje cest procházejících všechna políčka šachovnice $n \times 3$, každé právě jednou, začínajících na políčku $(1, 1)$ a končících na políčku $(n, 1)$? (Na cestách uvažujeme jen vodorovné a svislé kroky.) **[4]**

15. Nechť b_n je počet ekvivalencí na n-prvkové množině. Ověřte, že

$$b_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!},$$

kde $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Můžete k tomu použít rekurenci

$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b_k.$$

[3]

16. Nechť R a S jsou relace ekvivalence na množině X. Rozhodněte, zda také $R \cap S$, $R \cup S$, R^c, $R \circ S$ je nutně ekvivalence. **[6]**

17. Nechť R a S jsou (neostrá) částečná uspořádání na množině X. Rozhodněte, zda také $R \cap S$, $R \cup S$, R^c, $R \circ S$ je nutně částečné uspořádání. **[6]**

18. Najděte nejdelší řetězec a antiřetězec v množině $\{1, 2, \ldots, n\}$ částečně uspořádané relací dělitelnosti a dokažte, že delší neexistují. (*Řetězec* je množina, ve které jsou každé dva prvky porovnatelné. *Antiřetězec* je množina, ve které žádné dva prvky nejsou porovnatelné.) **[4]**

19. Ukažte, že každou acyklickou relaci na konečné množině lze rozšířit na lineární uspořádání.
(Relace R na množině X se nazývá *acyklická*, pokud pro žádné $k \geq 1$ neexistují prvky $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ takové, že $x_1 R x_2$, $x_2 R x_3$, $\ldots$, $x_{k-1} R x_k$ a $x_k R x_1$. Relace S je *rozšířením* R když $R \subseteq S$.) **[3]**

20. Nechť S je relace soudělnosti na množině $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, tedy
$$mSn \Leftrightarrow NSD(m, n) > 1.$$
Je S (neostré) částečné uspořádání? Je S ekvivalence? **[2]**

21. Kolik je v konvexním n-úhelníku průsečíků úhlopříček, pokud se žádné tři úhlopříčky neprotínají v jednom bodě? **[2]**

22. Kolik je různých triangulací konvexního n-úhelníka takových, že každý z trojúhelníků má aspoň jednu stranu společnou s hranou n-úhelníka? **[3]**

23. K jednání u kulatého stolu se sešlo 47 trollů a 47 trpaslíků. Kolika způsoby si mohou sednout, když rozesazení, která se liší jen pootočením, považujeme za stejná? (Trollové jsou všichni stejní, stejně tak trpaslíci.) **[4]**

24. Sečtěte
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$
[2]

25. Sečtěte
$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{4n}{2k} \quad \text{a} \quad \sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\binom{4n}{2k+1}.$$
[3]

26. Uvažujme hrací kostky (tvaru krychle), které mají na každé stěně napsáno nějaké přirozené číslo (čísla se mohou opakovat). Řekneme, že kostka X *je lepší* než kostka Y, právě když platí, že při současném hodu oběma kostkami s pravděpodobností větší než $1/2$ padne na X větší číslo než na Y. Sestrojte hrací kostky X, Y, Z tak, aby X byla lepší než Y, Y lepší než Z a Z lepší než X. **[3]**

27. Házíme pravidelným čtyřstěnem, na jehož stěnách jsou napsána čísla $1, 2, 3, 4$. Skončíme, pokud součet posledních dvou hodů je prvočíslo. Jaká je pravděpodobnost, že poslední hozené číslo je 1? **[5]**

28. Pro každé přirozené n sestrojte graf, který má přesně n automorfismů (včetně popisu, jak příslušné automorfismy vypadají, a důkazu, že jiné už nejsou). **[4]**

29. Jsou každé dva $(n-2)$-regulární grafy na n vrcholech izomorfní? **[2]**

30. Dokažte, že každý (konečný) graf je izomorfní nějakému indukovanému podgrafu (nekonečného) grafu $X = (\mathbb{N}, E)$, kde $\{m, n\} \in E \Leftrightarrow NSD(m, n) > 1$ (tedy vrcholy X jsou přirozená čísla, a hrany spojují soudělná čísla.) **[3]**

31. Pro každou dvojici přirozených čísel n, k, která splňuje podmínky $n \geq k+1$ a $2|kn$, sestrojte k-regulární graf na n vrcholech. **[4]**

32. Najděte všechny grafy bez cesty délky 4 (a dokažte, že jiné neexistují). **[4]**

33. Najděte všechny grafy bez indukované cesty délky 2 (a dokažte, že jiné neexistují). **[4]**

34. Popište všechny grafy bez sudých kružnic (a dokažte, že jiné neexistují). **[5]**

35. a) Spočítejte počet kružnic délky k v grafu K_n. **[1]**
b) Spočítejte počet kružnic délky k v grafu $K_{m,n}$. **[2]**
c) Pro které k je při pevném n počet kružnic délky k v K_n největší? **[3]**

36. Kolik maximálně hran může mít graf s n vrcholy a k komponentami? **[3]**

37. V závislosti na n spočítejte počet komponent grafu, jehož vrcholy jsou políčka šachovnice
a) $2 \times n$
b) $3 \times n$
a hrany spojují políčka, mezi kterými lze táhnout koněm. **[3]**

38. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti aspoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. **[1]**

39. Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik může mít listů? **[2]**

40. Dokažte, že v každém souvislém grafu G s aspoň třemi vrcholy existují dva různé vrcholy u, v takové, že grafy $G - u$, $G - v$ a $G - u - v$ jsou všechny souvislé. **[3]**

41. Buď T strom s $n \geq 2$ vrcholy. Pro $i = 1, 2, \ldots, n$ označme počet vrcholů T stupně i jako p_i. Dokažte, že platí

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - 3p_5 - \cdots - (n-2)p_n = 2.$$

[2]

42. Dokažte, že hrany každého souvislého grafu se sudým počtem hran je možné zorientovat tak, aby vstupní stupeň každého vrcholu byl sudý. **[4]**

43. Uvažujme šachovnici $n \times n$, kde $2n$ políček je obarveno modře. Ukažte, že je možné postavit věž na nějaké modré políčko, pak střídavě táhnout vodorovně a svisle, vždy jen na modrá políčka, a po kladném počtu tahů se vrátit na počáteční políčko. **[4]**

44. Pan profesor předvádí důkaz věty, která je ekvivalencí výroků $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Každý krok důkazu věty je důkaz nějaké implikace $V_i \Rightarrow V_j$. Řekneme, že důkaz je *zbytečně dlouhý*, pokud nějaký jeho krok lze vynechat. Jaká je maximální délka důkazu, který není zbytečně dlouhý? **[3]**

45. Uvažujme situaci jako v úloze 1, kde místo tyče se zábranami je kruhová obruč délky 100 cm. Na obruči je opět 25 mravenců, jeden z nich je Ferda. Kde se bude Ferda nacházet za 100 sekund? **[3]**

46. Dokažte, že každý souvislý eulerovský rovinný graf lze nakreslit do roviny jedním uzavřeným nekřížícím se tahem (tah se může jen "dotýkat" ve vrcholech). **[5]**

47. a) Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy není rovinný. **[1]**
b) Pro co největší $k < 11$ rozhodněte, zda existuje rovinný graf na k vrcholech, jehož doplněk je rovinný. **[2(k-7)]**

48. Pro co největší konstantu c dokažte: Každý souvislý graf s n vrcholy a $n+c$ hranami je rovinný. **[2c]**

49. Dokažte, že každý rovinný graf, jehož vrcholy mají všechny stupeň aspoň 5, má aspoň 12 vrcholů. **[2]**

50. Rozhodněte, zda následující graf (říká se mu graf incidence Fanovy roviny) je rovinný: bipartitní graf s vrcholy $1, 2, \ldots, 7, a, b, \ldots, g$, kde vrcholy $a, b, \ldots, g$ (reprezentující přímky) postupně sousedí s následujícími trojicemi ostatních vrcholů (které reprezentují body): 123, 345, 561, 147, 257, 367, 246. **[3]**

51. Nakreslete na torus (povrch pneumatiky) následující grafy bez křížení hran:
a) K_7, **[3]**
b) $K_{3,6}$. **[2]**
Torus můžete reprezentovat např. jako obdélník, kde se k sobě slepí protější strany (hrany grafu pak mohou vést i "přes okraj").

52. Dokažte, že následující grafy nelze nakreslit na torus bez křížení:
a) K_8, **[2]**
b) $K_{4,5}$, $K_{3,7}$. **[3]**
Můžete k tomu použít variantu Eulerovy formule pro torus: $E \leq V + F$ (rovnost by platila pro taková nakreslení souvislých grafů, kde každá stěna jde deformovat na disk).

53. Pro každé $n \geq 3$ najděte graf na n vrcholech, který je
a) rovinný a má maximální možný počet hran, **[2]**
b) bipartitní, rovinný a má maximální možný počet hran. **[2]**

54. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf lze dobře obarvit nejvýše třemi barvami. (Vnějškově rovinný graf je takový, který má rovinné nakreslení se všemi vrcholy na hranici vnější stěny. Na hranici vnější stěny se mohou některé vrcholy a hrany opakovat.) **[4]**

55. Dokažte, že pro žádné $n \geq 1$ nelze z n nekonvexních čtyřúhelníků poskládat konvexní mnohoúhelník. (Čtyřúhelníky se při skládání nesmí překrývat.) **[4]**