Příklady z Diskrétní matematiky - ZS 2008/2009

1. Na vodorovné tyči dlouhé 1 metr je 25 mravenců. V čase 0 se každý mravenec začne pohybovat rychlostí 1 cm/s podél tyče, a to v jednom ze dvou možných směrů (vlevo nebo vpravo). Na okrajích tyče jsou zábrany, takže pokud nějaký mravenec dojde na okraj, otočí se čelem vzad a pokračuje v pohybu opačným směrem. Pokud se dva mravenci potkají, nemohou se vyhnout; místo toho se oba otočí čelem vzad a pokračují v pohybu opačným směrem. Třináctý mravenec zleva se jmenuje Ferda a v čase 0 stojí přesně uprostřed tyče. Kde se bude Ferda nacházet za 100 sekund? Proč? **[3]**

2. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2.$$
[2]

3. Nechť F_n je n-tý člen Fibonacciho posloupnosti (tj. $F_1 = F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$). Dokažte, že pro každé přirozené $n \geq 4$ platí
$$F_n^2 = 2F_{n-1}^2 + 2F_{n-2}^2 - F_{n-3}^2.$$
Zkuste se obejít bez explicitního vzorce pro F_n. **[4]**

4. Dokažte, že každé přirozené číslo n lze jednoznačně napsat ve tvaru
$$n = \sum_{j=1}^{k} F_{i_j},$$
kde $i_1 \geq 2$ a pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$ je $i_{j+1} \geq i_j + 2$. **[4]**

5. Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí
$$\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \cdots + \frac{1}{(4n-3) \cdot (4n+1)} < \frac{1}{4}.$$
[2]

6. Uvažujme nekonečnou šachovnici, kde každé políčko má celočíselné souřadnice (x, y). Na každém políčku se souřadnicí $y \leq 0$ je jeden hrací kámen. Je-li ve dvou hranově sousedních políčcích P_1, P_2 aspoň jeden kámen, lze provést tah, a to následovně: vezmeme jeden kámen z políčka P_1, přeskočíme přes P_2 a položíme jej na následující políčko P_3; přitom však odstraníme jeden kámen z P_2. Je povoleno nashromáždit víc kamenů na jednom políčku. Kolik nejméně tahů je potřeba, abychom aspoň s jedním kamenem doskočili na políčko o souřadnicích $(0, 5)$? **[5]**

7. Na každém políčku šachovnice 8×8 je nakreslená šipka v jednom z osmi směrů $(0°, 45°, 90°, \dots, 315°)$, přitom směry šipek ve dvou hranově sousedních políčcích se liší nejvýše o $45°$. Na políčku C4 stojí robot. V každém tahu se podívá na šipku pod sebou a přesune se ve směru této šipky na jedno z osmi (hranově či rohově) sousedních políček (případně mimo šachovnici, pokud ho tam šipka nasměruje, tam se pak zastaví). Kde bude robot po 64 tazích? **[5]**

8. Ve Ztraceném městě žije 100 obyvatel. Každý má na čele červenou nebo modrou tečku, ale barvu své tečky nikdo nezná. Každý den večer se všichni obyvatelé sejdou na náměstí. Pokud nějaký obyvatel nějakým způsobem zjistí barvu své tečky, během následující noci se zastřelí (a další den večer už na setkání nedorazí). Jednoho krásného dne do města zavítá pravdomluvný cizinec, a na večerním setkání obyvatelům sdělí: "Celkový počet modrých teček na vašich čelech není 17," a odejde. Kolik obyvatel zůstane naživu za 100 dní od příchodu cizince? **[5]**

9. Ukažte, že každou acyklickou relaci na konečné množině lze rozšířit na lineární uspořádání.
(Relace R na množině X se nazývá *acyklická*, pokud pro žádné $k \geq 1$ neexistují prvky $x_1, x_2, \dots, x_k \in X$ takové, že x_1Rx_2, x_2Rx_3, $\dots$, $x_{k-1}Rx_k$ a x_kRx_1.) **[3]**

10. Nechť b_n je počet ekvivalencí na n-prvkové množině. Ověřte, že
$$b_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!},$$
kde $e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$. Můžete k tomu použít rekurenci
$$b_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}b_k.$$
[3]

11. Nechť R a S jsou relace ekvivalence na množině X. Rozhodněte, zda také $R \cap S$, $R \cup S$, R^c, $R \circ S$ je nutně ekvivalence. **[6]**

12. Nechť R a S jsou (neostrá) částečná uspořádání na množině X. Rozhodněte, zda také $R \cap S$, $R \cup S$, R^c, $R \circ S$ je nutně částečné uspořádání. **[6]**

13. Najděte nejdelší řetězec a antiřetězec v množině $\{1, 2, \dots, n\}$ částečně uspořádané relací dělitelnosti a dokažte, že delší neexistují. **[4]**

14. Najděte nejdelší antiřetězec v množině $\mathcal{P}(\{1, 2, \dots, n\})$ částečně uspořádané relací podmnožiny ($\subseteq$) a dokažte, že delší neexistuje. **[5]**

15. Rozhodněte, zda každý dostatečně veliký čtverec $n \times n$ lze vydláždit čtvercovými dlaždicemi o rozměrech

    a) 2×2 a 3×3 **[5]**

    b) 7×7, 8×8 a 9×9 **[5]**

16. Sečtěte
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$
[2]

17. Sečtěte
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{4n}{2k} \qquad \text{a} \qquad \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{4n}{2k+1}.$$
[3]

18. Nechť $n \geq 3$. Dokažte, že součet vnitřních úhlů v libovolném konvexním n-úhelníku (všechny vnitřní úhly jsou menší než $180°$) je $(n-2) \cdot 180°$. **[2]**
Dokážete to i pro obecný (ne nutně konvexní) n-úhelník? **[4]**

19. Nechť S je relace soudělnosti na množině $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, t.j.
$$mSn \Leftrightarrow NSD(m,n) > 1.$$
Je S (neostré) částečné uspořádání? Je S ekvivalence? **[2]**

20. Kolik je v konvexním n-úhelníku průsečíků úhlopříček, pokud se žádné tři úhlopříčky neprotínají v jednom bodě? **[2]**

21. Kolik nejvýše střelců lze rozmístit na čtvercovou šachovnici $n \times n$, aby se žádní dva vzájemně neohrožovali? (Střelec může táhnout o libovolný počet políček šikmo po úhlopříčkách.) **[4]**

22. K jednání u kulatého stolu se sešlo 47 trollů a 47 trpaslíků. Kolika způsoby si mohou sednout, když rozesazení, která se liší jen pootočením, považujeme za stejná? (Trollové jsou všichni stejní, stejně tak trpaslíci.) **[4]**

23. Kolik maximálně hran může mít graf s n vrcholy a k komponentami? **[3]**

24. Najděte všechny grafy bez cesty délky 4 (a dokažte, že to jsou opravdu všechny). **[4]**

25. a) Spočítejte počet kružnic délky k v grafu K_n a v grafu $K_{m,n}$. **[1+2]**
b) Pro které k je při pevném n počet kružnic délky k v K_n největší? **[3]**

26. Pro každou dvojici přirozených čísel n, k, která splňuje podmínky $n \geq k+1$ a $2|kn$, sestrojte k-regulární graf na n vrcholech. **[4]**

27. Najděte všechny grafy bez indukované cesty délky 2 (a dokažte, že to jsou opravdu všechny). **[4]**

28. Dokažte, že každý graf $G = (V, E)$ obsahuje bipartitní podgraf s aspoň $|E|/2$ hranami. [předvedeno na cvičení]

29. Popište všechny grafy bez sudých kružnic (a dokažte, že to jsou opravdu všechny). **[5]**

30. Pro každé přirozené n sestrojte graf, který má přesně n automorfismů (včetně popisu, jak příslušné automorfismy vypadají, a důkazu, že jiné už nejsou). **[4]**

31. Strom na 4152 vrcholech má pouze vrcholy stupně 1 a 3. Kolik má listů? **[1]**

32. Dokažte, že v každém souvislém grafu G s aspoň třemi vrcholy existují dva vrcholy u, v takové, že grafy $G-u$, $G-v$ a $G-u-v$ jsou všechny souvislé. **[3]**

33. Dokažte, že každý (konečný) graf je izomorfní nějakému indukovanému podgrafu (nekonečného) grafu $X = (\mathbb{N}, E)$, kde $\{m, n\} \in E \Leftrightarrow NSD(m, n) > 1$ (tedy vrcholy X jsou přirozená čísla, a hrany spojují soudělná čísla.) **[3]**

34. Jsou každé dva $(n-2)$-regulární grafy na n vrcholech izomorfní? **[2]**

35. Dokažte, že každý strom na n vrcholech má nezávislou množinu velikosti aspoň $\lceil \frac{n}{2} \rceil$. **[3]**

36. Buď T strom s $n \geq 2$ vrcholy. Pro $i = 1, 2, \ldots, n$ označme počet vrcholů T stupně i jako p_i. Dokažte, že platí

$$p_1 - p_3 - 2p_4 - 3p_5 - \cdots - (n-2)p_n = 2.$$

[2]

37. Uvažujme šachovnici $n \times n$, kde $2n$ políček je obarveno modře. Ukažte, že je možné postavit věž na nějaké modré políčko, pak střídavě táhnout vodorovně a svisle, vždy jen na modrá políčka, a po kladném počtu tahů se vrátit na počáteční políčko. **[4]**

38. Zjistěte, kdy je posloupnost $(3, 3, \ldots, 3, 1)$ skóre nějakého grafu (v závislosti na počtu členů). V kladných případech najděte příklad takového grafu. **[3]**

39. Kolik minimálně členů rovných 1 je potřeba přidat k posloupnosti ($n, \ldots, 3,$ 2), kde $n \geq 2$, aby výsledná posloupnost byla skóre nějakého grafu? **[6]**

40. Dokažte, že každý souvislý eulerovský rovinný graf lze nakreslit do roviny jedním uzavřeným nekřížícím se tahem (tah se může jen "dotýkat" ve vrcholech). **[5]**

41. Dokažte: orientovaný graf G má uzavřený eulerovský tah právě tehdy, když G je silně souvislý a vstupní stupeň každého vrcholu je roven jeho výstupnímu stupni. Také dokažte variantu předchozího tvrzení, kde silná souvislost je nahrazena slabou souvislostí. **[5]**

42. a) Dokažte, že doplněk rovinného grafu s 11 vrcholy není rovinný. **[1]**
    b) Pro co největší $k < 11$ rozhodněte, zda existuje rovinný graf na k vrcholech, jehož doplněk je rovinný. **[2(k-7)]**

43. Pro co největší konstantu c dokažte: Každý souvislý graf s n vrcholy a $n+c$ hranami je rovinný. **[2c]**

44. Uvažujme hrací kostky (tvaru krychle), které mají na každé stěně napsáno nějaké přirozené číslo (čísla se mohou opakovat). Řekneme, že kostka X *je lepší* než kostka Y, právě když platí, že při současném hodu oběma kostkami s pravděpodobností větší než $1/2$ padne na X větší číslo než na Y. Sestrojte hrací kostky X, Y, Z tak, aby X byla lepší než Y, Y lepší než Z a Z lepší než X. **[4]**

45. Dokažte, že každý rovinný graf, jehož vrcholy mají všechny stupeň aspoň 5, má aspoň 12 vrcholů. **[2]**

46. Rozhodněte, zda následující graf (říká se mu graf incidence Fanovy roviny) je rovinný: bipartitní graf s vrcholy $1, 2, \ldots, 7, a, b, \ldots, g$, kde vrcholy $a, b, \ldots, g$ (reprezentující přímky) postupně sousedí s následujícími trojicemi ostatních vrcholů (které reprezentují body): 123, 345, 561, 147, 257, 367, 246. **[3]**

47. Nakreslete na torus (povrch pneumatiky) následující grafy bez křížení hran:
    a) K_7, **[3]**
    b) $K_{3,6}$. **[2]**
    Torus můžete reprezentovat např. jako obdélník, kde se k sobě slepí protější strany (hrany grafu pak mohou vést i "přes okraj").

48. Dokažte, že následující grafy nelze nakreslit na torus bez křížení:
    a) K_8, **[2]**
    b) $K_{4,5}$, $K_{3,7}$. **[3]**
    Můžete k tomu použít variantu Eulerovy formule pro torus: $E \leq V + F$

(rovnost by platila pro taková nakreslení souvislých grafů, kde každá stěna jde deformovat na disk).

49. Pro každé $n \geq 3$ najděte graf na n vrcholech, který je
a) rovinný a má maximální možný počet hran, **[2]**
b) bipartitní, rovinný a má maximální možný počet hran. **[2]**

50. Dokažte, že každý vnějškově rovinný graf lze dobře obarvit nejvýše třemi barvami. (Vnějškově rovinný graf je takový, který má rovinné nakreslení se všemi vrcholy na hranici vnější stěny. Na hranici vnější stěny se mohou některé vrcholy a hrany opakovat.) **[4]**