Příklady z Kombinatorické a výpočetní geometrie 2

3. série — Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti

odevzdat do 21. 4. 2023

Maximální možnou délku Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti řádu s nad symboly $1, 2, \ldots, n$ budeme značit $\lambda_s(n)$. *Složitost buňky* arrangementu geometrických objektů v rovině je počet vrcholů nebo hran ležících na hranici buňky, počítaný i s násobností.

1. Dokažte, že počet Davenportových–Schinzelových posloupností řádu 2 nad abecedou $\{1, \ldots, n\}$, které mají délku $2n-1$, a v nichž nejlevější výskyty symbolů tvoří rostoucí posloupnost, je roven Catalanovu číslu C_{n-1}. *Catalanova čísla* jsou definována jako $C_0 = 1$ a $C_n = C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0$ pro $n \geq 1$. Např. pro $n = 3$ máme dvě posloupnosti: 12321 a 12131. **[2]**

2. *Složitost jedné buňky arrangementu úseček*
   Nechť C je buňka arrangementu n úseček v obecné poloze v rovině, jejichž sjednocením je souvislá množina.

   (a) Úsečky očíslujeme čísly 1 až n. Sepíšeme si posloupnost čísel úseček podél hranice buňky C, počínaje náhodným vrcholem na hranici buňky. Dokažte, že se v takto získané posloupnosti nevyskytuje podposloupnost *ababab*, a tedy složitost buňky C je $O(\lambda_4(n))$. **[2]**

   (b) Dokažte, že složitost buňky C je nejvýše $O(\lambda_3(n))$. Rada: Každé úsečce přiřaďte více různých symbolů. **[2]**

3. *Věta o zóně přes Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti*
   Zóna přímky p v arrangementu přímek je množina stěn (všech dimenzí), které vidí p. Dokažte převodem na Davenportovy–Schinzelovy posloupnosti, že zóna jedné přímky v arrangementu n přímek v rovině má složitost $O(n)$. **[3]**

4. Nechť $g_1, g_2, \ldots, g_m$ jsou grafy m spojitých po částech lineárních funkcí z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, které se dohromady skládají z n úseček a polopřímek. Dokažte, že dolní obálka $g_1, g_2, \ldots, g_m$ má složitost $O(\frac{n}{m}\lambda_3(2m))$. Konkrétně pro $m = O(1)$ je složitost dolní obálky lineární. **[2]**

5. Definujme matice
$$N = \begin{pmatrix} * & 1 & * & 1 \\ 1 & * & 1 & * \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & * \end{pmatrix},$$
   kde $*$ zastupuje libovolný prvek. Nechť $A \in \{0,1\}^{n\times n}$ je $n \times n$ matice s prvky a_{ij}, $i, j \in [n]$, složená z nul a jedniček. Řekneme, že A *neobsahuje N jako podmatici*, pokud neexistují indexy $i_1 < i_2$ a $j_1 < j_2 < j_3 < j_4$ takové, že $a_{i_2j_1} = a_{i_1j_2} = a_{i_2j_3} = a_{i_1j_4} = 1$. Podobně se definuje neobsahování ostatních matic.

   (a) Dokažte, že pokud A neobsahuje N jako podmatici, pak má nejvýše $\lambda_3(n) + O(n)$ jedniček. **[2]**

   (b) Dokažte, že pokud A neobsahuje L jako podmatici, pak má nejvýše $O(n)$ jedniček. **[1]**

   (c) Najděte matici A obsahující alespoň $\Omega(n\log(n))$ jedniček, která neobsahuje U jako podmatici. **[2]**