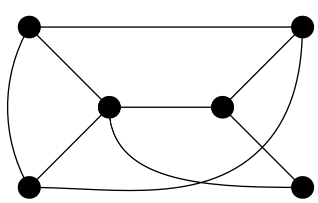
# Kapitola 1

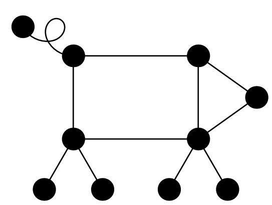
# Grafy a stromy

Co je to graf? Grafem v teorii grafů myslíme něco jiného než je graf funkce nebo například sloupcový graf. *Graf* $G$ je dvojice $(V, E)$. Prvkům množiny $V$ říkáme *vrcholy* a prvkům $E \subseteq \{\, \{u, v\} \mid u, v \in V \,\}$ *hrany*.

Hrana $e \in E$ je neuspořádaná dvojice vrcholů, tedy $e = \{u, v\}$ pro $u, v \in V$. Vrcholy $u, v$ jsou *konce hrany* $e$. Protože $v \in e$, tak říkáme že $v$ náleží do $e$, nebo použijeme cizí slovo a řekneme, že $v$ je *incidentní* s $e$. Často existenci hrany vyjadřujeme slovy: „vrcholy $u, v$ jsou spojeny hranou $e$“, „z $u$ vede hrana do $v$“, „vrchol $u$ sousedí s vrcholem $v$“. Vrcholy, se kterými je vrchol $u$ spojen hranou, se nazývají *sousedi* vrcholu $u$. Množinu všech neuspořádaných dvojic vrcholů $V$ budeme značit $\binom{V}{2}$.[1] Potom se dá napsat, že $E \subseteq \binom{V}{2}$.

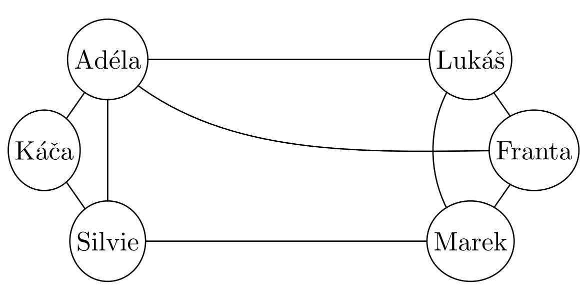
Ačkoliv je graf abstraktní pojem, často ho kreslíme na papír. Vrcholy kreslíme jako „puntíky“ a hrany jako čáry, které je spojují.[2]





Grafem můžeme jednoduše zachytit celou řadu souvislostí mezi různými objekty:

**Vztahy mezi lidmi.** Vrcholy grafu jsou lidé, konkrétně $V = ($ Adéla, Franta, Káča, Lukáš, Marek, Silvie $)$. Dva lidé jsou spolu spojeny hranou, pokud mezi sebou mají určitý vztah. Například pokud spolu kamarádí.

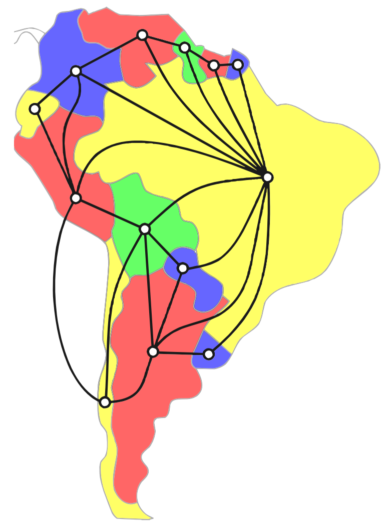



**Barvení mapy.** Zjednodušení struktury nám může pomoci lépe a přehledněji vyřešit požadovaný problém. Například chceme obarvit mapu Jižní Ameriky tak,

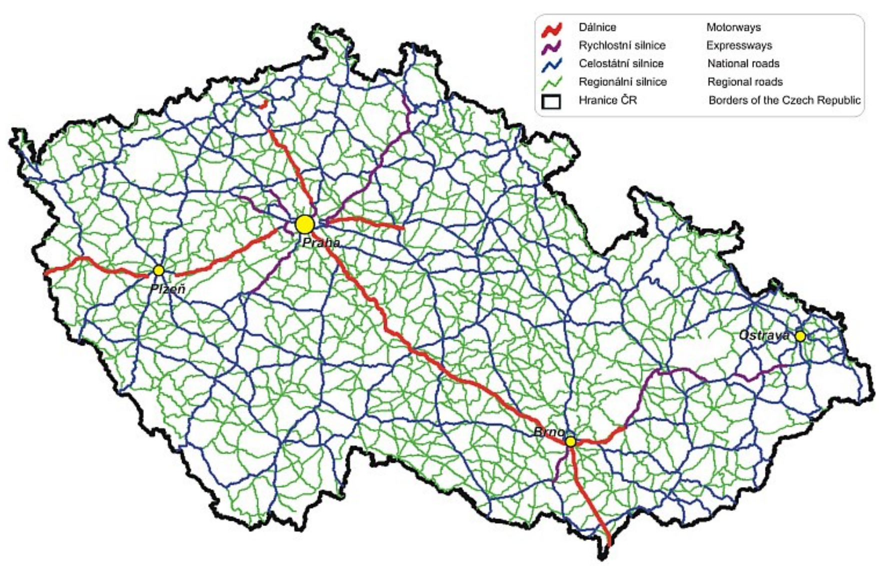
[1] Protože takových dvojic je přesně $\binom{|V|}{2}$.

[2] Nakreslení grafu je přesně definovaný pojem, o který se můžeme opřít v důkazech. To už ale patří k pokročilejší matematice.

aby sousední státy měly jinou barvu (jinak by na první pohled vypadaly jako 1 velký stát). Nejprve si vytvoříme pomocný graf. Do každého státu umístíme vrchol (například do hlavního města) a vrcholy dvou států spojíme hranou, pokud spolu sousedí. Teď stačí obarvit vrcholy grafu tak, aby vrcholy spojené hranou měly různou barvu.

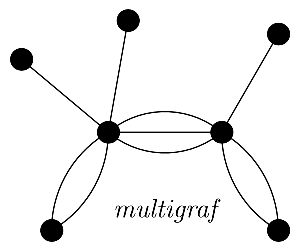
**Silniční síť** si také můžeme zjednodušeně zachytit grafem. Křižovatky znázorníme jako vrcholy, a silnice, které je spojují, jako hrany.




Každá silnice má svojí délku. Tuto délku můžeme připsat ke každé hraně. Dostaneme tím *ohodnocený graf*. Ohodnocený graf $G$ je graf $G = (V, E)$, ke kterému přidáme funkci $h : E \to \mathbb{R}$, která každé hraně $e$ přiřadí hodnotu $h(e)$.

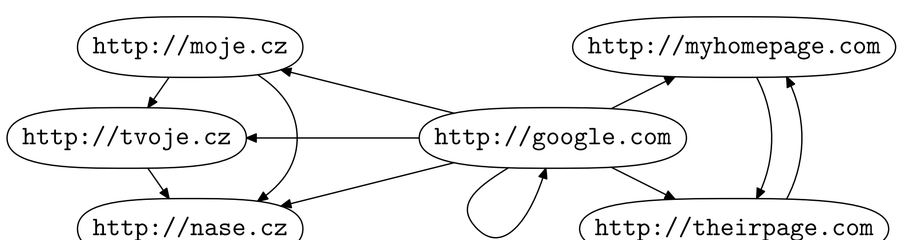
Teoreticky by se mohlo stát, že dvě křižovatky budou spojeny dvěmi různými silnicemi. Jinými slovy, mohlo by se stát, že dva vrcholy budou spojeny dvěmi různými hranami. Běžné grafy nám neumožňují takové věci zachytit. Museli bychom pojem grafu zobecnit tak, že každé hraně přiřadíme její *násobnost* $N : E \to \mathbb{N}$. Násobnost vyjadřuje, kolikrát je hrana v grafu zastoupena. Tím dostaneme *multigrafy*.

Jiné zavedení multigrafů pracuje se zobrazením, které každé hraně přiřadí dva vrcholy, které jsou její konce. To už je blíže tomu, jak multigrafy používá programátor.




V některých aplikacích se můžeme použití multigrafů (a násobných hran) vyhnout tím, že na jednu hranu umístíme fiktivní vrchol/křižovatku, který hranu rozdělí na dvě.

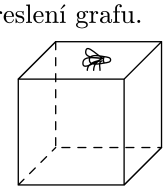
**Web.** Chtěli bychom si znázornit „strukturu“ webových stránek. Vrcholy grafu budou webové stránky. Dva vrcholy (webové stránky) spojíme hranou, pokud z jedné stránky vede odkaz do druhé. Jak je ale vidět, tento vztah není symetrický. Ze stránky A může vést odkaz na stránku B, ale naopak už to platit nemusí. Abychom lépe zachytili strukturu webu, tak z každé hrany uděláme šipku. Z vrcholu A povede šipka do vrcholu B, pokud ze stránky A vede odkaz na stránku B. Dostaneme tím *orientovaný graf.*

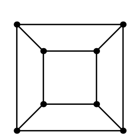



Orientovaný graf je graf, kde každé hraně udělíme orientaci. Na obrázku se dá říci, že z hran uděláme šipky. Formálně, *orientovaný graf* $G = (V, E)$, kde $V$ jsou vrcholy a $E \subseteq V \times V$ jsou hrany. Hrany jsou orientované, v prvním vrcholu začínají a ve druhém končí. Proto $(u, v) \neq (v, u)$.

V orientovaných grafech se může stát, že existuje hrana $xy \in E$, ale i $yx \in E$. Dokonce se může stát, že v grafu bude hrana $xx \in E$. Takovým hranám říkáme *smyčky.*

**Odkud pochází název hrana, vrchol?** Pochází z mnohostěnů. Mnohostěny, například krychle, mají také vrcholy a hrany. Vrcholy jsou body a hrany jsou úsečky spojující dva vrcholy. Jak spolu souvisí mnohostěn a graf? Ke každému mnohostěnu můžeme najít graf popisující jeho strukturu. Představte si mouchu, která si sedne na stěnu velké skleněné krychle. Skrz skleněnou krychli moucha uvidí obrázek napravo. Ten odpovídá nakreslení grafu.





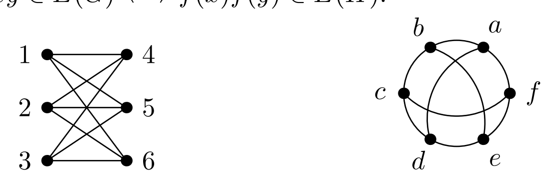
**Značení používané této knize.** Pokud mluvíme pouze o grafu, tak myslíme obyčejný neorientovaný graf. Když bychom chtěli mluvit o jiném grafu, tak to vždy zdůrazníme.

Protože budeme grafy používat hodně často a většinou budeme pracovat jen s jedním grafem $G$, tak budeme počet vrcholů grafu $G$ označovat písmenem $n$ a počet hran písmenem $m$. Také budeme zjednodušeně psát $uv \in E$ místo $\{u, v\} \in E$ a v orientovaných grafech $uv \in E$ místo $(u, v) \in E$.

## 1.1 Grafové pojmy

Abychom mohli s grafy pracovat a jednoduše popsat, co s grafem děláme, potřebujeme znát základní grafové pojmy.

- **Izomorfismus:** Izomorfismus není nic jiného něž přejmenování vrcholů. Graf *$G$ je izomorfní s grafem $H$* právě tehdy když existuje bijekce $f : V(G) \to V(H)$ taková, že $xy \in E(G) \iff f(x)f(y) \in E(H)$.




  Jsou výše nakreslené grafy izomorfní? Najděte bijekci.

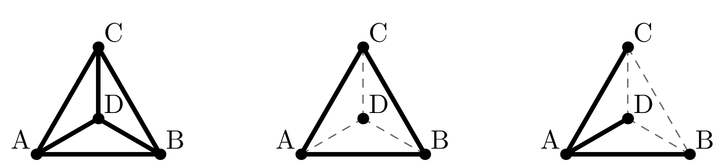
- **Doplněk grafu:** *Doplněk grafu $G$* (značíme $\overline{G}$) je graf $(V(G), \overline{E})$, kde $\overline{E} = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G) = \{\, xy \,|\, xy \notin E(G)\,\}$. Jinými slovy, hranami doplňku $G$ jsou „nehrany“ grafu $G$.


- **Stupeň vrcholu:** Stupeň vrcholu $v$ v grafu $G$ je počet jeho sousedů:

$$deg_{\,G} v := |\{vx \in E(G) \,:\, \text{pro} \,\forall\, x \in V\}|.$$

- **Podgraf grafu:** $H$ je *podgraf* grafu $G$ (značíme $H \subseteq G$) právě tehdy když $H$ je graf a $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$. Jinými slovy, podgraf $H$ vznikne z grafu $G$ vymazáním některých hran a některých vrcholů včetně hran z nich vedoucích. Obráceně bychom mohli říci, že $G$ je *nadgraf* grafu $H$. Místo „$H$ je podgraf $G$“ někdy říkáme, že graf $G$ *obsahuje* $H$.

- **Indukovaný podgraf:** $H := G[W]$ je *podgraf grafu $G$ indukovaný množinou $W \subseteq V$* právě tehdy když $V(H) = W \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G) \cap \binom{W}{2}$. Jinými slovy, graf $G[W]$ vznikne z $G$ vymazáním vrcholů $V \setminus W$ včetně hran z nich vedoucích. Pokud nechceme množinu $W$ vysloveně uvádět, tak řekneme, že $H$ je indukovaný podgraf grafu $G$ (indukovaný nějakou množinou, která se stane $V(H)$).




graf $G$ podgraf $H_1$ podgraf $H_2$

Na obrázku je graf $G$, jeho indukovaný podgraf $H_1 = G[\{A, B, C\}]$ a podgraf $H_2 \subseteq G$, který není indukovaným podgrafem.

- **Jednoduché operace na grafu $G = (V, E)$:**

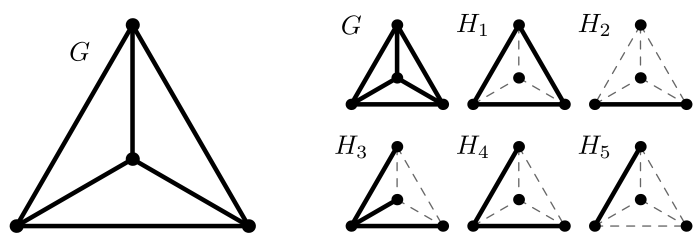
  1. přidání hrany: $G + e := (V, E \cup \{e\})$
  2. smazání hrany: $G - e := (V, E \setminus \{e\})$
  3. smazání vrcholu: $G - v := (V \setminus \{v\}, E \setminus \{vw \in E\ :\ \text{pro} \forall\, w \in V\})$

- **Hranově maximální graf:** Graf $G$ je *hranově maximální* pro nějakou grafovou vlastnost $A$, pokud $G$ splňuje vlastnost $A$ a žádný z grafů $G + xy$, $xy \notin E(G)$, už ji nesplňuje.

  Příkladem grafové vlastnosti je „graf obsahuje nejvýše 5 hran". Složitější vlastnosti naleznete v následující sekci s grafovou botanickou.

- **Maximální/minimální graf:** Graf $G$ je *maximální/minimální* pro nějakou grafovou vlastnost $A$, pokud $G$ splňuje vlastnost $A$ a žádný nadgraf/podgraf už ji nesplňuje.

  V algoritmech často hledáme maximální/minimální graf s určitou vlastností. Jak ale grafy porovnáváme? Který je menší a který větší? Za uspořádání na grafech bereme relaci býti podgrafem. Relace býti podgrafem je relace částečného uspořádání.[3] Podívejme se příklad na obrázku. Napravo máme 6 podgrafů grafu $G$, který je nalevo (velký graf).




  Pro grafy $G$, $H_1$, $H_2$ platí $H_2 \subseteq H_1 \subseteq G$. Podobně $H_5 \subseteq H_4 \subseteq H_3$. To určuje uspořádání na podgrafech. Ne každé dva podgrafy jsou porovnatelné, například $H_2$ a $H_5$ (ani jeden není podgrafem druhého).

  Pozor, je potřeba rozlišovat dva pojmy – maximální a největší.[4] Prvek je maximální, právě tehdy když neexistuje žádný větší. Prvek je největší, právě tehdy když je větší než všechny ostatní. Podobně pro minimální a nejmenší prvek.

  Na obrázku je $G$ největším podgrafem, protože obsahuje všechny ostatní jako podgraf. Podgrafy $H_2$ a $H_5$ jsou minimálními neprázdnými podgrafy, ale ani jeden z nich není nejmenší neprázdný podgraf. Nejmenším podgrafem je prázdný podgraf, který obsahuje všechny vrcholy, ale ani 1 hranu.

Jako základní učebnici teorie grafů můžeme doporučit Matouška, Nešetřila: Kapitoly z diskrétní matematiky [2]. Pro pokročilejší teorii anglickou učebnici Diestel: Graph Theory [1].

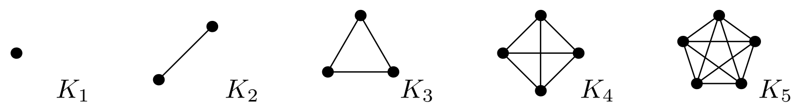
[3] Relace $R$ je *částečné uspořádání,* pokud je reflexivní ($xRx$ pro každé $x$), antisymetrická ($xRy$ a $yRx \Rightarrow x = y$ pro každé $x, y$) a tranzitivní ($xRy$ a $yRz \Rightarrow xRz$ pro každé $x, y, z$). Více například viz Matoušek, Nešetřil [2].

[4] Angličtina pro to má dva pojmy maximal a maximum.

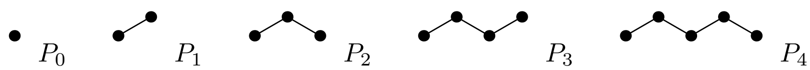
## 1.2 Grafová botanická

Grafy, které splňují určitou vlastnost, mají svůj název. Mezi základní „druhy“ grafů patří:

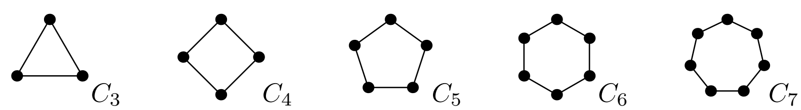
- **Úplné grafy:**[5] Úplný graf obsahuje všechny možné hrany: $K_n = ([n], \binom{[n]}{2})$, kde $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.




- **Cesty:** *Cesta* je neprázdný graf $P = (V, E)$, kde $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ a $E = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{k-1}x_k\}$. Vrcholům $x_0$ a $x_k$ říkáme *koncové vrcholy cesty.* Ostatní vrcholy jsou *vnitřní. Délka cesty* je počet hran na cestě.




- **Kružnice:** *Kružnice* je neprázdný graf $P = (V, E)$, kde $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ a $E = \{x_0x_1, x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{k-1}x_k\} \cup \{x_kx_0\}$. *Délka kružnice* je její počet hran.




  Podgrafy grafu $G$, které jsou izomorfní výše uvedeným druhům, často bereme jakou součást grafu. Například cesta v grafu je podgraf izomorfní cestě.

- **Cesta v grafu:** Cesta v grafu $G$ je podgraf grafu $G$, který je izomorfní cestě. Někdy za cestu $P$ v $G$ bereme posloupnost vrcholů $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ takovou, že $x_{i-1}x_i \in E(G)$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Říkáme, že cesta $P$ vede mezi vrcholy $x_0$ a $x_k$. Proto ji někdy značíme jako $x_0Px_k$. Díky tomu můžeme jednoduše označovat „podcesty“ (pro $0 \leq i \leq j \leq k$):

$$\begin{aligned} Px_i &:= (x_0 \ldots x_i) \\ x_iP &:= (x_i \ldots x_k) \\ x_iPx_j &:= (x_i \ldots x_j) \end{aligned}$$

  ale i některé operace, například zřetězení úseků $xPy$ a $yQz$ je cesta $xPyQz$.

- **Kružnice v grafu:** Kružnice v grafu $G$ je podgraf grafu $G$, který je izomorfní kružnici. Někdy za kružnici $C$ v $G$ bereme posloupnost vrcholů $(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ takovou, že $x_{i-1}x_i \in E(G)$ pro $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ a $x_0x_k \in E(G)$.

- **Hamiltonovské kružnice:** Kružnice je *hamiltovnoská* právě tehdy když obsahuje všech $n$ vrcholů grafu.

- **Souvislost grafu:** Graf $G$ je *souvislý,* pokud mezi každou dvojicí vrcholů $x, y \in V$ existuje cesta.

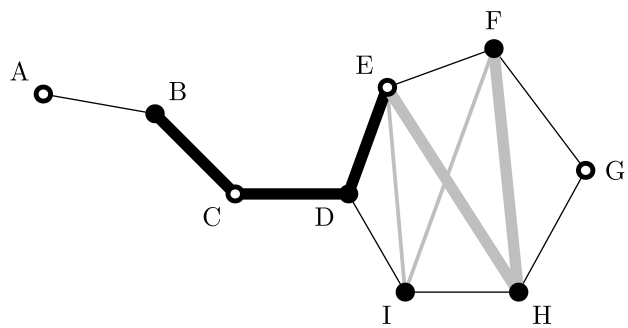
- **Klika v grafu:** *Klika* v grafu $G$ je indukovaný podgraf grafu $G$, který je izomorfní úplnému grafu. Někdy za kliku bereme pouze podmnožinu vrcholů $Q \subseteq V(G)$ takovou, že každé dva vrcholy $x, y \in Q$ jsou spojeny hranou $xy \in E(G)$.

[5] Hovorově „úplňáky“.

- **Nezávislá množina v grafu:** Vrcholy grafu $G$, mezi kterými nevede žádná hrana, se nazývají *nezávislé. Nezávislá množina* $W \subseteq V(G)$ v grafu $G$ je množina navzájem nezávislých vrcholů. Podgraf $G$ indukovaný nezávislou množinou je doplňkem úplného grafu.
- **Stromy:** *Strom* $T$ je souvislý graf bez kružnic. Pokud zakážeme pouze kružnice, ale nevyžadujeme souvislost, tak dostaneme graf skládající se z několika stromů. Takovému grafu se říká *les.* Vrcholy stromu stupně 1 se nazývají *listy.*

  O stromech koluje i několik grafových vtipů: Víte, proč pařez není strom? Protože obsahuje kružnice.[6] A víte, že souvislý les je strom?
- **Kostry:** *Kostra* grafu $G$ je strom $T \subseteq G$ na všech $n$ vrcholech.
- **Bipartitní graf:** Graf $G = (V, E)$ je *bipartitní,* právě tehdy když můžeme jeho vrcholy rozdělit do dvou množin $V_1$ a $V_2$ tak, že každá hrana vede mezi $V_1$ a $V_2$. $V = V_1 \cup V_2$. Množinám $V_1$ a $V_2$ se říká partity grafu.

**Příklad:** V následujícím grafu je cesta $(B, C, D, E, H, F)$ vyznačena tučně. Dále graf obsahuje kružnici $(D, E, F, G, H, I)$, ale i kružnici $(E, I, F, H)$. Klika $\{E, F, H, I\}$ je vyznačena šedě a nezávislá množina $\{A, C, E, G\}$ má vrcholy označeny bíle.

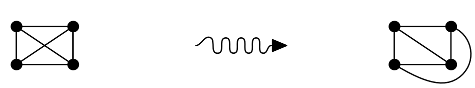



Rozmyslete si, jestli je vyznačená klika i nezávislá množina maximální. Také si rozmyslete, jak vypadá minimální souvislý podgraf tohoto grafu.

## 1.3 Rovinné grafy

Graf často kreslíme do roviny (na papír). Vrcholy kreslíme jako „puntíky“ a hrany jako čáry, které je spojují. Obrázku říkáme *nakreslení grafu* do roviny. Graf je *rovinný*, pokud lze nakreslit na papír bez křížení hran. Nakreslení do roviny bez křížení hran se říká *rovinné nakreslední* grafu. Jako příklad rovinných grafů uveďme graf sousedících států Jižní Ameriky, graf silniční sítě bez mostů a tunelů.

Pokud dostaneme nakreslení grafu, které není rovinné, tak to ještě neznamená, že graf není rovinný. Každý graf má řadu špatných nakreslení. Pro rovinnost stačí, aby existovalo jedno nakreslení bez křížení hran. Někdy můžeme křížící se hranu překreslit jako na následujícím obrázku.



Teď vezme do ruky nůžky a papír, na kterém je nakreslen graf, rozstříháme obrázek podél nakreslených hran. *Stěny* rovinného grafu jsou souvislé kusy roviny,

[6]letokruhy

na které se rovina rozpadne. Například graf na předchozím obrázku vpravo má 4 stěny (3 vnitřní a 1 vnější). Pozor, stěna je definována pouze pro rovinné nakreslení.

**Věta 1 (Eulerova formule)** *V rovinném grafu $G = (V, E)$ platí*

1. $|V| + |S| = |E| + 2$.
2. $|E| \leq 3|V| - 6$.

Stejná formule platí o pro konvexní mnohostěny (krychle, osmistěn, ...). Není divu, vždyť moucha sedící na stěně skleněného mnohostěnu vidí vrcholy a hrany jako rovinný graf (rozmyslete si, proč je graf rovinný).

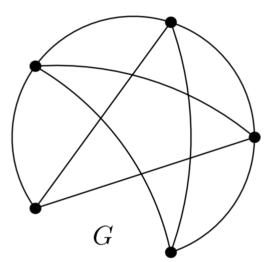
Druhé tvrzení věty je důsledkem prvního. Má velký význam pro odhad časové složitosti algoritmů pracujích na rovinných grafech. Ukazuje totiž, že rovinný graf nemůže mít příliš mnoho hran. Počet hran je $m \leq 3n - 6 = \mathcal{O}(n)$.

Řada problémů se dá v rovinných grafech řešit rychleji nebo jednodušeji než v obecných grafech. Příkladem je barvení vrcholů grafu co nejmenším počtem barev tak, aby každé dva vrcholy spojené hranou měli různou barvu. V obecných grafech je to velmi těžké.[7]

**Věta 2 (o 4 barvách)** *Vrcholy rovinného grafu lze obarvit 4 barvami tak, aby žádná hrana nespojovala dva vrcholy stejné barvy.*

Věta o 4 barvách je jednou z prvních vět, která byla dokázána s pomocí počítače.[8] Zkuste najít příklad rovinného grafu, jehož obarvení potřebuje alespoň 4 barvy.

**O rovinném nakreslení grafu.** Podívejte se na graf na obrázku. Je to rovinný graf?




**Jak poznat, jestli je graf rovinný?** Rovinné grafy jsou poměrně krásně charakterizovány následující větou.

**Věta 3 (Kuratowski)** *Graf $G$ je rovinný právě tehdy když neobsahuje dělení $K_5$ nebo dělení $K_{3,3}$ jako podgraf.*

Dělení $K_5$ je graf, který vznikne z $K_5$ tak, že některé jeho hrany podrozdělíme. Podrozdělení hrany $uv \in E$ je nahrazení hrany $uv$ cestou $uPv$, kde cesta $P$ obsahuje samé nově přidané vrcholy (kromě $u$ a $v$).

Kuratowského věta se dá použít v teoretických důkazech nebo pro nalezení „certifikátu“ nerovinnosti grafu (když se někdo zeptá, proč graf není rovinný, tak mu ukážete dělení $K_5$ nebo $K_{3,3}$, které je podgrafem). Algoritmicky je věta téměř nepoužitelná.

[7]Barvení obecného grafu je NP-úplný problém.

[8]Počítač nalezl 4-obarvení menších grafů z důkazu, pomocí kterých se dá obarvit libovolný rovinný graf.

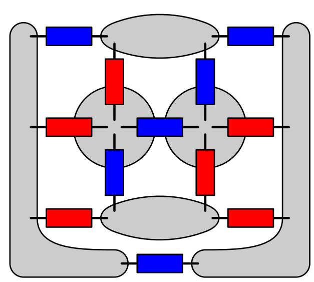
**Jak najít rovinné nakreslení grafu?** Existuje několik algoritmů, které nám naleznou rovinné nakreslení grafu a nebo odpoví, že graf není rovinný. Ačkoliv je jejich časová složitost jen $\mathcal{O}(n)$, jsou poměrně komplikované (jejich docela dobrý přehled naleznete v anglické Wikipedii pod heslem „planarity testing“). Pokud nevyžadujeme dobrou časovou složitost, tak nám poměrně dobře poslouží následující heuristika.

**Pružinková heuristika:** Heuristika využívá fyzikálních zákonů. Model, který si vytvoříme, odsimulujeme na počítači. Po určitém množtví kroků (iterací) dostaneme řešení, které sice není přesné, ale je mu velmi blízko.

Začneme s libovolným nakreslením grafu. Hrany grafu nahradíme pružinkami a do vrcholů umístíme náboje, které se vzájemně odpuzují. Potom necháme síly působit (odpudivé síly mezi vrcholy proti přitažlivým sílám pružinek). Působení sil realizujeme tak, že v několika iteracích pro každý vrchol spočítáme, kam se pohne. Skončíme, až nalezneme „téměř“ rovnovážný stav.[9] Odpudivé síly rozprostřou graf do co největší plochy, ale pružiny drží vrcholy spojené hranou blízko u sebe. Díky tomu dostaneme rovinné nakreslení (pokud je graf rovinný).

**Věta 4 (Fáry)** *Každý rovinný graf $G$ se dá nakreslit do roviny tak, aby vrcholy odpovídaly bodům a hrany odpovídaly rovným úsečkám.*

Rovinné nakreslení grafu má řadu aplikací. Například při návrhu jednovstvých tištěných spojů, anglicky VLSI designs.



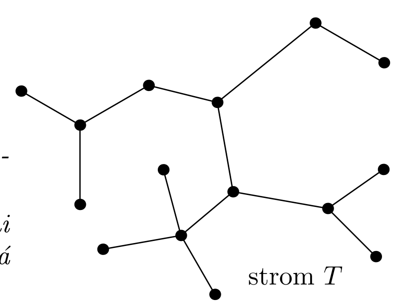
## 1.4 Stromy

Stromy jsou velmi důležitou třídou grafů. Mají velmi jednoduchou strukturu a proto se v nich řada věcí spočítá velmi jednoduše – téměř triviálně. Díky následujícím vlastnostem je používáme i při návrhu složitějších algoritmů.

Následující Lemma shrnuje základní vlastnosti stromu, které lze brát i jako ekvivalentní definice stromu.

**Lemma 1** *Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

- *$T$ je strom*
- *$T$ je souvislý graf s $n-1$ hranami.*
- *(minimální souvislý podgraf) Přidáním libovolné hrany k $T$ vznikne kružnice.*
- *(jednoznačnost cesty) Mezi libovolnými dvěmi vrcholy $T$ vede jednoznačně určená cesta.*




[9] Pozor na oscilace! Soustava pružinek se často rozkmitá. Proto je vhodné k pohybu vrcholů přidat tření, které oscilace ztlumí.

Jednoznačnou cestu z vrcholu $x$ do vrcholu $y$ ve stromě $T$ budeme značit $xTy$. Vrcholy stromu stupně 1 se nazývají *listy.*

Každý strom můžeme zkonstruovat z jednoho vrcholu postupným přilepováním listů. Tato rekurzivní konstrukce se velmi hodí jak v důkazech, tak v algoritmech. Nahlédnout to můžeme analýzou pozpátku. Natočíme si film o tom, jak postupně odtrháváme listy (najít list a odtrhnout je jednoduché). Když si film pustíme pozpátku, uvidíme jak strom vzniká z jednoho vrcholu postupným přilepováním listů.

## 1.5 Zakořeněné stromy

V algoritmech se častěji setkáme se stromy, které mají jeden význačný vrchol – kořen. Když pracujeme se stromem, tak většinou v jednom vrcholu začneme a z něj postupujeme do dalších vrcholů. Příkladem takového stromu je strom rekurzivních volání (vrcholy jsou instance funkcí[10]; 2 instance funkce jsou spojeny hranou, pokud jedna zavolala druhou). Začneme v hlavní funkci a odtamtud voláme všechny ostatní funkce.

Při popisu algoritmů se bez zakořeněných stromů neobejdeme. Často je používáme, aniž bychom rozuměli všem pojmům, a proto si je pojďme ujasnit.

*Zakořeněný strom* $T$ je strom s jedním význačným vrcholem, který nazýváme *kořen.* Místo slova vrchol, se někdy používá termín *uzel*, oba termíny mají stejný význam. Představme si, že jsme hrany stromu zorientovali směrem od kořene (z hran se staly šipky). Vrcholy, ze kterých nevychází žádná šipka, se nazývají *listy.* Ostatní vrcholy jsou *vnitřní vrcholy stromu.*

Vrchol $w$ je *syn (přímý následník)* vrcholu $v$, pokud z $v$ vede šipka do $w$. Naopak $v$ je *otec (přímý předchůdce)* vrcholu $w$.[11] Každý vrchol kromě kořene má právě jednoho otce, ale obráceně jeden vrchol může mít libovolný počet synů. Vrchol $u$ je *následník (potomek)* vrcholu $v$, pokud $v$ leží na cestě z kořene do $u$. Naopak $v$ je *předchůdce* $u$.

*Podstrom určený vrcholem* $x$ je podgraf $T$ indukovaný všemi následníky vrcholu $x$. Tento podstrom je opět zakořeněným stromem s kořenem $x$. Podstrom určený $x$ je ten kus grafu, který odpadne od zakořeněné části, když přeřízneme hranu vedoucí mezi $x$ a jeho otcem $y$. Proto někdy podstromu určenému $x$ říkáme větev $y$.

- *Stupeň vrcholu* $x$ v zakořeněném stromě $T$ je počet jeho synů.
- *Hloubka vrcholu* $x$ v $T$ je délka cesty z kořene do $x$. Kořen je tedy v hloubce nula.
- *Hloubka stromu* $T$ je největší hloubka v $T$, tedy délka nejdelší cesty od kořene k listu.
- $k$*-tá hladina* stromu $T$ je množina všech vrcholů stromu $T$ ležících v hloubce $k$. Hladiny začínáme počítat od nulté.
- *Šířka stromu* $T$ je velikost největší hladiny ve stromě $T$.
- *Výška stromu* $T$ je počet hladin, což je hloubka stromu $T$ plus jedna.

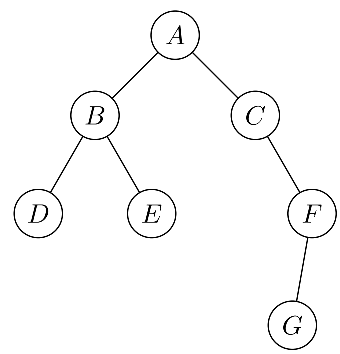
Do obrázku orientaci hran často nekreslíme. Hrany jsou orientovány z vrcholu ležícího výše do vrcholu ležícího níže. Proto kreslíme syny vrcholu $x$ pod vrchol

[10] To, co se ukládá na zásobník.

[11] Někdy se ve stejném významu ještě používají pojmy „rodič“ a „děti“.

$x$, navíc často rovnáme zleva doprava. Můžete si to představit tak, že graf uvázaný z kuliček a provázků chytneme za kořen, který zvedneme. Když tento model připlácneme a otiskneme na tabuli, dostaneme správné nakreslení.

**Příklad:** Na obrázku vpravo je zakořeněný strom $T$ o 7 vrcholech s kořenem $A$. Vrchol $B$ je otec vrcholů $D$, $E$. Naopak $D$, $E$ jsou synové vrcholu $B$. Vrcholy $A$, $C$ jsou předchůdci vrcholu $F$ a $G$ je jeho jediný následník/potomek. Podstrom určený vrcholem $B$ je indukován vrcholy $B$, $D$, $E$. Podstrom určený vrcholem $C$ je indukován vrcholy $C$, $F$, $G$.
Šířka stromu $T$ je 3, hloubka stromu $T$ je také 3 a výška stromu $T$ je 4. V nulté hladině je pouze vrchol $A$. Vrcholy ve 2. hladině jsou $\{D, E, F\}$




Často pracujeme se speciálními stromy. *Binární strom* je strom, ve kterém má každý je vrchol nejvýše dva syny. Ty potom často označujeme jako *levého* a *pravého syna.* Obecně, *$k$-ární strom* je strom, ve kterém má každý vrchol nejvýše $k$ synů.

*Stromová datová struktura* je reprezentace stromu v počítači. V každém vrcholu stromu $v$ si budeme pamatovat hodnotu $x(v)$, které se říká klíč (key).

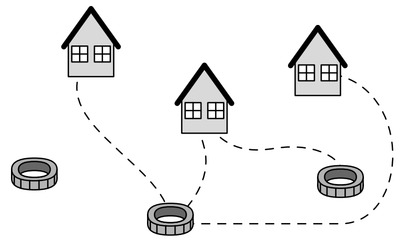
Při reprezentaci stromu v počítači je důležité, abychom se z každého vrcholu uměli dostat k jeho synům a z každého vrcholu, kromě kořene, k jeho rodiči. Je jedno, jestli si strom reprezentujeme dynamicky pomocí ukazatelů (pointrů) a nebo staticky v poli.

V reprezentaci stromu si často nepamatujeme pamatovat odkazy na otce. A to proto, že je můžeme zjistit jinak. Téměř vždy procházíme strom od kořene až se dostaneme do vrcholu $v$. Během průchodu si můžeme vrcholy na cestě od kořene k $v$ ukládat na zásobník. Tím získáme dokonce všechny předchůdce vrcholu $v$.

## 1.6 Příklady

1. (Graf známostí) Vrcholy grafu jsou jména lidí a dva vrcholy jsou spojeny hranou, pokud se 2 lidé odpovídající vrcholům znají. Dokažte následující tvrzení:
   (a) V každé skupině $n \geq 2$ lidí jsou dva, kteří znají stejný počet lidí ze skupiny.
   (b) Mezi šesti lidmi vždy existují 3 lidé, kteří se vzájemně znají a nebo 3 lidé, kteří se vzájemně neznají.[12]
   (c) Každá skupina lidí může být rozdělena na dvě skupiny tak, aby aspoň polovina známých člověka $X$ byla v jiné skupině než $X$, pro každého člověka $X$.
   (d) Pokud každý člověk zná alespoň polovinu lidí ze skupiny, tak můžeme lidi posadit kolem kulatého stolu tak, aby každý seděl mezi lidmi, které zná.
2. (Nakreslení grafu) Na Obrázku jsou 3 domečky a 3 studny. Vaším úkolem spojit každý domeček s každou studnou pěšinou tak, aby se pěšiny vzájemně nekřížili.

[12]Toto pozorování jde zobecnit. Existuje přirozené číslo $R(m, n)$ takové, že mezi alespoň $R(m, n)$ lidmi vždy existuje $m$ lidí, kteří se vzájemně znají a nebo $n$ lidí tak, že se vzájemně neznají. Říká se tomu Ramseyova věta.



Nezkoušejte to ale déle jak 10 minut, raději dokažte, proč to nejde.

3. Jaký je maximální počet vrcholů binárního stromu o $h$ hladinách? A jaký je maximální počet vrcholů $k$-árního stromu o $h$ hladinách? Co z toho plyne pro minimální výšku těchto stromů? Kolik může být maximální výška binárního stromu?

4. Dokažte, že v binárním stromě je počet vnitřních uzlů stupně dva roven počtu listů mínus jedna.

5. Dokažte, že v každém binárním stromě s $L$ listy existuje podstrom s $l \in \langle L/3, 2L/3 \rangle$ listy.

# Literatura

[1] R. Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, Berlin, 3rd edition, 2005.

[2] J. Matoušek and J. Nešetřil. *Kapitoly z diskrétní matematiky*. MatfyzPress, 1996.