

Tuto sadu domácích úkolů odevzdejte do **23.5.2021**. Nebojte se posílat částečná řešení. Prosím nevymýšlejte řešení hromadně na fórech. Maximálně ve třech lidech a to zásadně každý online a jen přes hovor! Ujistěte se, že každý bude sepisovat sám! Pouhé vyzrazení řešení není spolupráce na vymýšlení, každý musí přispět! Napište s kým jste spolupracovali.

[Úkol 4.1] 2 body Mějme náhodné veličiny X, Y které mají sdruženou hustotu (probability density function)

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 8xy & x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(všimněte si, kde je ta hustota nenulová!)

1. Ověřte, že je to pravděpodobnostní hustota, tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx dy = 1$$

2. Spočítejte marginální hustoty

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dx$$

3. Určete distribuční funkce

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds$$

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \int_{-\infty}^y f_Y(t) dt$$

$$F_{X,Y}(x, y) = \Pr[X \leq x \wedge Y \leq y] = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds$$

4. Jsou X, Y nezávislé? Tedy platí pro každé $s, t \in \mathbb{R}$

$$F_{X,Y}(s, t) = F_X(s)F_Y(t)$$

5. Spočítejte střední hodnotu náhodné veličiny $Z = X + 2Y$ pomocí LOTUS

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{měřitelná})$$

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

6. Nechť A je jev $X + Y \leq 1$, spočítejte

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x, y) dx dy$$

7. Spočítejte podmíněnou hustotu $f_{X|A}$, distribuční funkci $F_{X|A}$ a střední hodnotu $\mathbb{E}[X | A]$:

$$f_{X|A}(x) = \Pr[X \leq x | A] = \frac{\Pr[X \leq x \wedge A]}{\Pr[A]}$$

$$F_{X|A}(x) = \int_{-\infty}^x f_{X|A}(s) ds$$

$$\mathbb{E}[X | A] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|A}(x) dx$$

8. Určete podmíněnou hustotu

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \quad (\text{pokud } f_Y(y) > 0)$$

9. Určete podmíněnou distribuční funkci

$$F_{X|Y}(x | y) = \int_{-\infty}^x f_{X|Y}(s | y) ds$$

10. V tomto domácím úkolu nemusíte simulovat. Nejspíš byste vymysleli sami, jak to dělat. Ale ve skutečnosti to není zas tak jednoduché.