

# Řešená cvičení: NMAI059 Pravděpodobnost a statistika 1

Karel Král, TODO

7. dubna 2021

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu [kralka@iuuk.mff.cuni](mailto:kralka@iuuk.mff.cuni) . . . .

# Obsah

<b>1 Zadání</b>	<b>5</b>
1.1 1. Cvičení . . . . .	5
1.2 2. Cvičení . . . . .	6
1.3 3. Cvičení . . . . .	8
1.4 4. Cvičení . . . . .	10
1.5 5. Cvičení . . . . .	13
1.6 6. Cvičení . . . . .	16
<b>2 Tahák</b>	<b>19</b>
2.1 Pravděpodobnostní prostor . . . . .	19
2.2 Podmíněná pravděpodobnost . . . . .	19
2.3 Bayesova věta . . . . .	20
2.4 Nezávislé jevy . . . . .	20
2.5 Spojité náhodné veličiny . . . . .	20
<b>3 Řešení</b>	<b>23</b>
3.1 1. Cvičení . . . . .	23
3.2 2. Cvičení . . . . .	41
3.3 3. Cvičení . . . . .	55
3.4 4. Cvičení . . . . .	68
3.5 5. Cvičení . . . . .	84
3.6 6. Cvičení . . . . .	97



# Kapitola 1

## Zadání

### 1.1 Cvičení

1. Úvodní informace:

- (a) Slyšíte mě všichni dobře?
- (b) Literatura.
- (c) Pravidla zápočtu (domácí úkoly).

Řešení: [1](#)

2. Jak se generuje náhoda programem.

- Python3
- C++
- R

Řešení: [2](#)

3. Připomeňte si definici pravděpodobnostního prostoru (Definice [2.1](#)). Určete, co je

- *množina elementárních jevů (sample space)*, tedy množina  $\Omega$ ,
- *prostor jevů (event space)*, tedy množina  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ,
- *pravděpodobnost (probability)*, tedy funkce  $\text{Pr}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$

pro následující příklady:

- (a) Hod spravedlivou alkoholovou trojhrannou tužkou (není to kostka kvůli popisu prostoru jevů):

```
import random
drink = random.choice([
    "světlé pivo",
    "tmavé pivo",
    "slivovice",
])
```

- (b) Uniformně náhodné číslo z intervalu  $[0, 1)$ .

```
import random
print(random.random())
```

Řešení: **3**

4. Dokažte, že  $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ .

Řešení: **4**

5. Zopakujte si základní kombinatoriku:

- Kolik je různých permutací množiny  $\{A, B, C\}$ ?
- Kolik různých slov skládajících se z písmen  $\{A, B\}$  má délku 3?
- Kolik různých podmnožin množiny  $\{A, B, C, D, E\}$  má velikost 3?
- Kolik různých kombinací s opakováním z množiny  $\{A, B, C, D, E\}$  velikosti 3?

Řešení: **5**

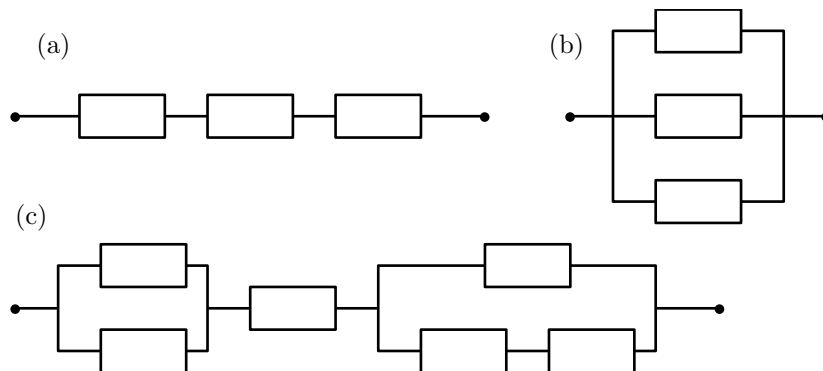
6. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šesti rozlišitelných spravedlivých šestistěnných kostek padnou aspoň na třech kostkách aspoň tři? Jaký je množina elementárních jevů, prostor jevů a pravděpodobnost?

Řešení: **6**

7. Necht'  $\Omega$  jsou všechny permutace prvních 100 přirozených čísel, prostor jevů jsou všechny podmnožiny  $\Omega$  a každý elementární jev je stejně pravděpodobný. Označme jev  $A_j$  že náhodně zvolená permutace  $\pi \in \Omega$  splňuje  $\pi(j) = j$  (pro  $1 \leq j \leq 100$ ). Jsou  $A_1, A_2$  nezávislé jevy?

Řešení: **7**

8. Každý obdélník na obrázku je součástka, která se může porouchat s pravděpodobností  $p$ . Přesněji řečeno porucha znamená, že skrz ní neteče proud. Poruchy součástek jsou na sobě nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že stále poteče proud mezi dvěma puntíky.



Řešení: **8**

## 1.2 Cvičení

1. Házíme cinknutou mincí – hlava padne s pravděpodobností  $p \in [0, 1)$ , orel padne s pravděpodobností  $1 - p$ . Házíme opakovaně dokud nepadne hlava.
  - (a) Jak vypadá pravděpodobnostní prostor?
  - (b) Jaká je pravděpodobnost, že hodíme právě třikrát ( $n$ -krát)?
  - (c) Jaká je pravděpodobnost, že hodíme nejvýš třikrát ( $n$ -krát)?
  - (d) Jaká je pravděpodobnost, že hodíme lišekrát?

(e) Simulujte předchozí.

Řešení: **1**

2. Hodíme cinknutou korunou (panna s pravděpodobností  $p_1 \in [0, 1]$ ) a cinknutou dvoukorunou (panna s pravděpodobností  $p_2 \in [0, 1]$ ). Oba hody jsou na sobě nezávislé.

(a) Určete pravděpodobnostní prostor.

(b) Připomněte si definici podmíněné pravděpodobnosti (Definice **2.2**).

(c) Spočítejte pravděpodobnost  $\Pr[\text{na obou padne panna} \mid \text{na koruně padne panna}]$ .

(d) Spočítejte pravděpodobnost  $\Pr[\text{na obou padne panna} \mid \text{padne aspoň jedna panna}]$ .

(e) Simulujte:

Řešení: **2**

3. Na louce rostou květiny, které mají buď bílé nebo červené květy. Náhodná květina má bílý květ s pravděpodobností  $\Pr[B] = 0.6$ , tedy pravděpodobnost že náhodná květina má červený květ je  $\Pr[C] = 0.4$ . Pravděpodobnost že červená květina je jedovatá je  $\Pr[J \mid C] = 0.25$ . Pravděpodobnost že bílá květina je jedovatá je  $\Pr[J \mid B] = 1/12$ . Snědli jsme náhodnou rostlinu a je nám zle, jaká je pravděpodobnost, že ta rostlina měla červený květ?

Řešení: **3**

4. V první krabici je  $b$  bílých míčků a  $c$  červených míčků, ve druhé krabici také. Napřed vytáhneme jeden míček z první krabice (uniformně náhodně) a dáme ho do druhé krabice. Pak vytáhneme jeden míček z druhé krabice (uniformně náhodně). Jaká je pravděpodobnost, že míček vytažený z druhé krabice je červený?

(a) Navrhněte vhodný pravděpodobnostní prostor.

(b) Spočítejte tu pravděpodobnost, kterou jsme chtěli.

(c) Simulujte.

Řešení: **4**

5. Tento příklad je vymyšlený, zejména čísla nesedí a reálný svět je malinko složitější (tím se ještě budeme zabývat), ale informace v něm nejsou daleko od pravdy. V zemi nám řídí nemoc  $C$ .

- Prostor elementárních jevů (sample space)  $\Omega$  jsou všichni občané.
- Označíme  $C^+ \subseteq \Omega$  množinu všech lidí, kteří dnes mají aktivní nemoc  $C$ , označíme  $C^- = \Omega \setminus C^+$  zdravé lidi.
- Umíme uniformně náhodně samplovat lidi, tedy  $\forall \omega \in \Omega: \Pr[\{\omega\}] = 1/|\Omega|$  (tady  $\omega$  je jeden člověk).
- Test nám pro libovolného člověka odpoví že je člověk zdravý nebo nemocný. Značme  $T^+ \subseteq \Omega$  množinu lidí pro které test odpoví, že jsou nemocní. Značme  $T^- = \Omega \setminus T^+$  množinu lidí pro které test odpoví, že jsou zdraví. Ale není to tak jednoduché, v příbalovém letáku testu se píše:

– *Sensitivity*: (true positive)  $\Pr[T^+ \mid C^+] = 0.9$

– *Specificity*: (true negative)  $\Pr[T^- \mid C^-] = 0.8$

z tohoto můžeme odvodit chyby:

– False positive = false alarm = type I error

$$\Pr[T^+ \mid C^-] = 1 - \Pr[T^- \mid C^-] = 0.2$$

– False negative = miss = type II error

$$\Pr[T^- | C^+] = 1 - \Pr[T^+ | C^+] = 0.1$$

- Provedli jsme jeden test u každého z uniformně náhodně vybraných 50000 lidí a pozitivních testů vyšlo 1000. Tedy předpokládáme, že  $\Pr[T^+] = \frac{1000}{50000} = \frac{1}{50} = 0.02$  (jak moc je tento předpoklad oprávněný budeme zkoumat nadále).
  - Zajímá nás  $\Pr[C^+]$  (vynásobeno 100 nám dá počet nemocných v procentech).
- (a) V čem se toto liší od reality?
  - (b) Spočítejte  $\Pr[C^+]$ .
  - (c) Co se stalo špatně?
  - (d) Jak by vyšlo předchozí kdyby  $\Pr[T^+ | C^+] = 0.99$ ,  $\Pr[T^- | C^-] = 0.98$ ,  $\Pr[T^+] = 0.2$ ?
  - (e) Simulujte předchozí.

Řešení: **5**

6. V šuplíku mám  $b \in \mathbb{N}$  párů bílých,  $c \in \mathbb{N}$  párů černých ponožek a  $s \in \mathbb{N}$  párů sepraných ponožek. Potřebuju si vytáhnout čtyři páry černých ponožek (jedu na prodloužený víkend tancovat). Když vytáhnou čtyři náhodné páry ponožek (mám je napárované v šuplíku), jaká je pravděpodobnost, že všechny budou černé?

Řešení: **6**

### 1.3 Cvičení

1. Rozmysleme si, proč nezávislost více jevů není to samé jako nezávislost po dvou.
  - (a) Najděte jevy  $A, B, C$  takové, že jevy jsou po dvou nezávislé, ale  $\Pr[A \cap B \cap C] \neq \Pr[A] \Pr[B] \Pr[C]$ .
  - (b) Najděte jevy  $A, B, C$  takové, že  $\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \Pr[B] \Pr[C]$ , ale jevy nejsou po dvou nezávislé.

Řešení: **1**

2. Házíte dvěma rozlišitelnými kostkami.
  - (a) Určete vhodný pravděpodobnostní prostor.
  - (b) Spočítejte pravděpodobnost, že aspoň na jedné kostce padla šestka, když víte jaký součet padl.

Řešení: **2**

3. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla.
  - (a) Určete vhodný pravděpodobnostní prostor.
  - (b) Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli dvouorlovou minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)
  - (c) Simulujte.

Řešení: **3**

4. Připomeňme co je náhodná veličina a její střední hodnota.  
Co kdyby pravděpodobnost kostky nebyla uniformní?



Řešení: [4](#)

5. Na stole jsou dvě obálky, v jedné je  $k$  korun, ve druhé  $\ell$  korun ( $k, \ell \in \mathbb{N}$ ). Můžete otevřít jednu obálku a na základě sumy v ní se rozhodnout jestli si necháte tu otevřenou nebo si vezmete tu druhou (nehledě na to, kolik je v té druhé). Umíte vymyslet způsob jak odejít s tou s větším obnosem s pravděpodobností ostře větší než jedna polovina? Určete střední hodnotu výhry.

Řešení: [5](#)

6. Spočítejte střední počet porovnání quick-sortu:

```
from random import randint

def partition(arr, begin, end):
    pivot_i = randint(begin, end - 1)
    (arr[pivot_i], arr[end-1]) = (arr[end-1], arr[pivot_i])
    pivot = arr[end - 1]
    i = begin
    for j in range(begin, end):
        if arr[j] < pivot:
            (arr[i], arr[j]) = (arr[j], arr[i])
            i += 1
    (arr[i], arr[end-1]) = (arr[end-1], arr[i])
    return i

def quick_sort(arr, begin, end):
    if end <= begin:
        return
    p = partition(arr, begin, end)
    quick_sort(arr, begin, p)
    quick_sort(arr, p+1, end)
```

- (a) Uvědomte si, že každá dvě čísla porovnáte nejvýš jednou (pokud se žádné číslo neopakuje). Pro jednoduchost budeme předpokládat, že se čísla neopakují (jinak bychom museli mluvit o jejich pozici v utříděném poli).
- (b) Vytvořte vhodný pravděpodobnostní prostor.
- (c) Definujte náhodnou proměnnou určující počet porovnaných dvojic, vyjádřete ji jako součet jednodušších a použijte větu o linearitě střední hodnoty.
- (d) S jakou pravděpodobností provede quick-sort aspoň  $10n \ln(n)$  porovnání?
- Sčítáme  $n$  kladných reálných čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, \infty)$ . Víme, že

$$\sum_{i=1}^n a_i = S$$

Pro kolik z těch čísel platí  $a_j \geq 5S/n$ ?

- Co kdybychom ta čísla sčítali váženě? Tedy formálně: mějme náhodnou proměnnou o které víme  $\Pr[X = j]$  pro  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  (kde pro jednoduchost předpokládáme  $\sum_{j=1}^m \Pr[X = j] = 1$ , tedy že  $X$  má hodnoty  $1, 2, \dots, m$ ). Víme  $\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^m j \Pr[X = j] = S$ . Jaká je pravděpodobnost  $\Pr[X \geq 5S]$ ?
- Gratuluji, vymysleli jste Markovovu nerovnost.

- Často bývá mnohem jednodušší použít Markovovu nerovnost než přímo počítat pravděpodobnost. Občas můžeme dostat i silnější odhady pomocí Čebyševovy nebo Černovovy nerovnosti. Na to budeme potřebovat rozptyl a další znalosti o náhodných proměnných.

Řešení: **6**

## 1.4 Cvičení

- Házím míčem na koš. V každém pokusu mám pravděpodobnost  $p$  že se trefím (jednotlivé hody jsou nezávislé). Skončím po prvním zásahu. Označme  $X$  celkový počet hodů.
  - Jaké je pravděpodobnostní rozdělení  $X$  (tj. distribuce)? Jinak řečeno určete pravděpodobnostní funkci  $p_X$  (tj. pro každé  $x$  určete  $p_X(x) = \Pr[X = x]$ ).
  - Jaká je  $\Pr[X \geq 10 \mid X \geq 5]$ ?
  - Jaká je  $\mathbb{E}[X]$ ?
  - Jaká je  $\mathbb{E}[X \mid X \text{ je sudé}]$ ?
  - Simulujte.

Řešení: **1**

- V testu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou  $-1/4$  bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností  $p$  jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.
  - Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?
  - A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?
  - Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?
  - Simulujte.

Řešení: **2**

- Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme  $X$  počet vytažených es,  $Y$  počet králů. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci  $p_{X,Y}$  a také marginální psní funkce  $p_X, p_Y$ .

Řešení: **3**

- Chceme nasbírat všechny z  $n$  druhů kuponů. Můžeme si koupit jeden kupon, který má uniformně náhodný druh. Kolikrát musíme koupit kupon, než posbíráme všechny?
  - Jaká je střední hodnota počtu koupených kuponů, než nasbíráme všechny?
  - Simulujte.

Řešení: **4**

- Připomeňte si, co je náhodná veličina, jaké máme typy náhodných veličin a jaké jsou jejich distribuce. A hlavně co vyjadřují.
  - Bernoulli
  - binomické

- (c) hypergeometrické
- (d) geometrické
- (e) Poissonovo

```

import matplotlib.pyplot as plt
from collections import Counter
from random import randint
from random import random
from random import sample
from numpy import random as npr

p = 0.3
n = 10
k = 5
S = 20
l = 10

def bernoulli(pr: float = p) -> bool:
    return int(random() < pr)

def geometric(pr: float = p) -> int:
    """pr is success probability, return the number of tosses until
    the first success."""
    assert pr > 0
    sample = 1
    fail_pr = 1 - pr
    while random() < fail_pr:
        sample += 1
    return sample

def binomicke(n=n, pr=p):
    return sum(bernoulli(pr) for _ in range(n))

def hypergeometric(n=n, N=S, k=k):
    return sum(sample([1]*k + [0]*(N-k), k=n))

def poisson(l=1):
    return npr.poisson(lam=l, size=1)[0]

N = 100000

def expected_value(X):
    """Vraci stredni hodnotu."""
    return sum(X() for _ in range(N)) / N

```

```

def variance(X):
    """Vraci rozptyl."""
    EX = expected_value(X)
    return sum((X() - EX)**2 for _ in range(N)) / N
    # return (sum(X()*2 for _ in range(N)) / N) - EX**2

def histogram(X, strX, fig):
    cnt = Counter(X() for _ in range(N))
    distribution = {}
    for c in cnt:
        distribution[c] = cnt[c] / N

    plt.figure(fig)
    plt.bar(distribution.keys(), distribution.values())
    # plt.show()
    # plt.xlabel("")
    # plt.ylabel("")
    plt.savefig(f'{strX}.pdf')

print('Bernoulli:')
print(f'E[X] = {expected_value(bernoulli)} (= {p})')
print(f'var[X] = {variance(bernoulli)} (= {p*(1-p)})')
histogram(bernoulli, "bernoulli", 0)
print('')

print('binomické')
print(f'E[X] = {expected_value(binomicke)} (= {n*p})')
print(f'var[X] = {variance(binomicke)} (= {n*p*(1-p)})')
histogram(binomicke, "binomicke", 1)
print('')

print('hypergeometrické')
print(f'E[X] = {expected_value(hypergeometric)} (= {n*k/S})')
print(f'var[X] = {variance(hypergeometric)} (= {n*(k/S)*(1-(k/S))*(S-n)/(S-1)})')
histogram(hypergeometric, "hypergeometric", 2)
print('')

print('geometrické')
print(f'E[X] = {expected_value(geometric)} (= {1/p})')
print(f'var[X] = {variance(geometric)} (= {(1-p)/p**2})')
histogram(geometric, "geometric", 3)
print('')

print('Poissonovo')
print(f'E[X] = {expected_value(poisson)} (= {1})')
print(f'var[X] = {variance(poisson)} (= {1})')
histogram(poisson, "poisson", 4)

```

```

# Možný výstup:
# Bernoulli:
# E[X] = 0.30003 (= 0.3)
# var[X] = 0.21018846799996171 (= 0.21)

# binomické
# E[X] = 3.00221 (= 3.0)
# var[X] = 2.111969109999777 (= 2.0999999999999996)

# hypergeometrické
# E[X] = 2.49898 (= 2.5)
# var[X] = 0.9866719879994746 (= 0.9868421052631579)

# geometrické
# E[X] = 3.33374 (= 3.3333333333333335)
# var[X] = 7.851098870500136 (= 7.777777777777778)

# Poissonovo
# E[X] = 10.00683 (= 10)
# var[X] = 9.947825008000336 (= 10)

```

Řešení: 5

## 1.5 Cvičení

1. Hodíme třikrát mincí. Označíme  $X$  počet rubů v prvních dvou hodech a  $Y$  počet líců v posledních dvou hodech.
  - (a) Určete pravděpodobnostní prostor.
  - (b) Určete předpis našich náhodných veličin.
  - (c) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci  $p_{X,Y}$  a také marginální pravděpodobnostní funkce  $p_X, p_Y$ .
  - (d) Určete distribuční funkce  $F_X, F_Y, F_{X,Y}$  (cumulative distribution function CDF).
  - (e) Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?
  - (f) Určete  $\Pr[X < Y]$ .
  - (g) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkce  $p_{X|Y}$ .
  - (h) Simulujte.

Řešení: 1

2. Bonusový příklad: tady si zadefinujeme Lebesgueovu míru a integrál.
  - (a) Definujte Lebesgueovu míru na  $\mathbb{R}$ .
  - (b) Dokažte, že pro diskrétní náhodnou veličinu, takovou že  $\text{Im}(X) \subseteq \mathbb{N}$ , platí:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \Pr[X = x] \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} n \Pr[X = n] \\
 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \Pr[X \geq n]
 \end{aligned}$$

- (c) Definujte Lebesgueův integrál (pro danou míru  $\Pr$ , obecně to ani nemusí být pravděpodobnostní míra, ale obecná  $\mu$ ).

Řešení: 2

3. Pro následující náhodné veličiny určete:

(a)

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, 3\} \\ \mathcal{F} &= \mathcal{P}(\Omega) \\ \Pr[\{\omega\}] &= 1/3 && \text{(pro libovolné } \omega \in \Omega, \text{ zbytek určen jednoznačně)} \\ X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(\omega) &= 2\omega + 1\end{aligned}$$

- Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?
- Je to diskrétní náhodná veličina?
- Jaká je její střední hodnota?
- Jaká je její distribuční funkce?
- Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?
- Jaká je její kvantilová funkce?

(b)

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathcal{F} &= \mathcal{P}(\Omega) \\ \Pr[\{n\}] &= 1/2^n && \text{(pro libovolné } n \in \mathbb{N}, \text{ zbytek určen jednoznačně)} \\ X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(\omega) &= 2\omega + 1\end{aligned}$$

- Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?
- Je to diskrétní náhodná veličina?
- Jaká je její střední hodnota?
- Jaká je její distribuční funkce?
- Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?
- Jaká je její kvantilová funkce?

(c)

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1] \\ \mathcal{F} &= \text{Lebesgueovsky měřitelné množiny} \\ \Pr[A] &= \lambda(A) && \text{(pro libovolné } A \in \mathcal{F}) \\ X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(\omega) &= \lceil 10x \rceil\end{aligned}$$

- Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?
- Je to diskrétní náhodná veličina?

- Jaká je její střední hodnota?
- Jaká je její distribuční funkce?
- Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?
- Jaká je její kvantilová funkce?

(d)

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1] \\ \mathcal{F} &= \text{Lebesgueovsky měřitelné množiny} \\ \Pr[A] &= \lambda(A) && \text{(pro libovolné } A \in \mathcal{F}) \\ X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(\omega) &= 10x\end{aligned}$$

- Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?
- Je to diskrétní náhodná veličina?
- Jaká je její distribuční funkce?
- Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?
- Jaká je její střední hodnota?
- Jaká je její kvantilová funkce?

(e)

$$\begin{aligned}\Omega &= [0, 1] \\ \mathcal{F} &= \text{Lebesgueovsky měřitelné množiny} \\ \Pr[A] &= \lambda(A)/2 + 1/2 && \text{(pro libovolné } A \in \mathcal{F} \text{ pokud } 0.1 \in A) \\ \Pr[A] &= \lambda(A)/2 && \text{(pro libovolné } A \in \mathcal{F} \text{ pokud } 0.1 \notin A) \\ X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(\omega) &= 10\omega\end{aligned}$$

- Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?
- Je to diskrétní náhodná veličina?
- Jaká je její distribuční funkce?
- Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?
- Jaká je její střední hodnota?
- Jaká je její kvantilová funkce?

(f) Pozorujte, že kvantil je jediná funkce, pro kterou platí:

$$\forall p \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}: Q_X(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x)$$

Řešení: 3

## 1.6 Cvičení

1.
  - Jedno promile lidí má nemoc  $C$ , značíme  $C^+ \subseteq \Omega$  množinu nemocných a  $C^- = \Omega \setminus C^+$  množinu zdravých. Člověka volíme uniformně náhodně, pak  $\Pr[C^+] = 0.001$ .
  - Máme test, který označí množinu lidí  $T^+ \subseteq \Omega$  za nemocné a  $T^- = \Omega \setminus T^+$  za zdravé. Test má následující parametry:
    - *Sensitivita*: (true positive)  $\Pr[T^+ | C^+] = 0.99$
    - *Specificita*: (true negative)  $\Pr[T^- | C^-] = 0.98$
  - (a) Uniformně náhodně jsme vybrali člověka  $c$ . Jaká je pravděpodobnost, že  $c \in C^+$  (tedy že je nemocný)?
  - (b) Člověku  $c$  jsme udělali jeden test a ten vyšel pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že  $c \in C^+$  (tedy že je nemocný)?
  - (c) Pro jistotu jsme člověku  $c$  udělali ještě jeden test a ten vyšel znovu pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že  $c \in C^+$  (tedy že je nemocný)? Předpokládejte, že výsledek druhého testu je nezávislý na tom prvním.
  - (d) Simulujte.

Poznámka: Toto je případ kdy je nemoc velice zřídkavá a ty nemáš symptomy. Pokud máš symptomy a jdeš na test, tak nejsi náhodně vybraný člověk! Tento příklad je tedy spíš situace jdu darovat krev a oni musí udělat povinný test na HIV a ten vyjde pozitivní, ale přesto bych se neměl tolik strachovat, ale v klidu jít na druhý test (už to že chodím darovat krev negativně koreluje s nakažením HIV).

Řešení: 1

2. Pojdme se podívat na další vlastnosti jednotlivých rozdělení:
  - (a) Bernoulli:
    - Kde se použije?
    - Jakou má střední hodnotu a rozptyl?
    - Co se stane, když sečtu dvě nebo obecně  $n$ -náhodných veličin  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , které jsou nezávislé a pro nějaké fixní  $p \in [0, 1]$  a každé  $j \in [n]$  platí že  $X_j \sim \text{Bern}(p)$ .
  - (b) geometrické:
    - Kde se použije?
    - Jakou má střední hodnotu a rozptyl?
    - Co se stane, když vezmeme minimum ze dvou nezávislých náhodných veličin  $X_1, X_2$ , které jsou kde  $X_1 \sim \text{Geom}(p_1)$  a  $X_2 \sim \text{Geom}(p_2)$ ?
  - (c) Binomické:
    - Kde se použije?
    - Jakou má střední hodnotu a rozptyl?
    - Co se stane, když sečtu dvě náhodné veličiny  $X_1, X_2$ , které jsou nezávislé a pro nějaké fixní  $p \in [0, 1]$  platí  $X_1 \sim \text{Bin}(n, p)$  a  $X_2 \sim \text{Bin}(m, p)$  (kde  $n, m \in \mathbb{N}$ ).
  - (d) Poissonovo:
    - Kde se použije?
    - Jakou má střední hodnotu a rozptyl?



- Co se stane, když sečtu dvě náhodné veličiny  $X_1, X_2$ , které jsou nezávislé a  $X_1 \sim Pois(\lambda)$ , a  $X_2 \sim Pois(\mu)$ .
- Co se stane, pokud zvolíme  $\lambda = np$  a porovnáme Poissonovo rozdělení a binomiální rozdělení?
- Pro odvážné: ukažte, že pokud  $X_1 \sim Pois(\lambda_1)$  a  $X_2 \sim Pois(\lambda_2)$  jsou nezávislé, pak  $\Pr[X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n] = \Pr[Y = k]$  kde  $Y \sim Bin(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})$ .

Řešení: **2**

3. de Mèrehovo problém hážeme spravedlivými šestistrannými kostkami:
- Jaká je pravděpodobnost, že padne ze čtyř hodů aspoň jedna šestka?
  - Jaká je pravděpodobnost, že padne z 24 hodů dvojicí kostek aspoň jedna dvojitá šestka?
  - De Mèrehovo problém spočíval v tom, jestli jsou odpovědi na části (a), (b) stejné. Tak se Chevalier de Mère zeptal Blaise Pascala a ten spolu s Pierre de Fermatem položili základy teorie pravděpodobnosti.
  - Umíte úlohu interpretovat jako otázku o binomickém rozdělení?
  - Umíte úlohu interpretovat jako otázku o geometrickém rozdělení?

Řešení: **3**

4. Odhadněte  $\pi$  pomocí náhodných pokusů.

Řešení: **4**

5. Nechť  $X$  je náhodná veličina. Vyjádřete pomocí  $F_X(t) = \Pr[X \leq t]$  pro každé  $t \in \mathbb{R}$  distribuční funkci náhodných veličin:
- $X^+ = \max(0, X)$
  - $-X$
  - $X^- = -\min(X, 0)$
  - $|X|$

Řešení: **5**

6. Mějme spojitou náhodnou veličinu  $X$  danou její pravděpodobnostní hustotou (probability density function – PDF)

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2/x^3 & t \geq 1 \end{cases}$$

- Spočítejte  $\Pr[X \in [5, 10]]$ .
- Spočítejte  $\Pr[X \geq 100]$ .
- Spočítejte  $\mathbb{E}[X]$ .
- Určete distribuční funkci (cumulative distribution function – CDF).

Řešení: **6**

7. Mějme spojitou nezápornou náhodnou veličinu  $X$ , která má hustotu (probability density function – PDF)  $f_x$  (a tedy cumulative distribution function – CDF  $F_X(t) = \int_0^t f_X(x) dx$ ). Ukažte, že  $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f_X(x) dx = \int_\Omega F_X(\omega) d\Pr(\omega) = \int X d\Pr$ .

Pokud by  $X$  nebyla nezáporná, tak ji můžeme vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných náhodných veličin.

Řešení: 7

# Kapitola 2

## Tahák

### 2.1 Pravděpodobnostní prostor

**Definice.** Pravděpodobnostní prostor je trojice  $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ , kde

1.  $\Omega$  je množina elementárních jevů (*sample space*) (je to množina)
2.  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  je prostor jevů (*event space*) (je to množina podmnožin  $\Omega$ , jednotlivé prvky  $\mathcal{F}$  nazýváme jevy)  $\mathcal{F}$  je  $\sigma$ -algebra, tedy musí platit:
  - (a)  $\emptyset \in \mathcal{F}$  a zároveň  $\Omega \in \mathcal{F}$  (celá množina elementárních jevů je jev)
  - (b)  $A \in \mathcal{F} \Rightarrow (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$  (prostor jevů je uzavřený na doplňky)
  - (c)  $(\forall n \in \mathbb{N}: A_n \in \mathcal{F}) \Rightarrow (\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{F}$  (prostor jevů je uzavřený na spočetná sjednocení, poznámka může se stát, že  $A_1 \neq A_2 = A_3 = \dots$ , speciálně tedy je uzavřený i na všechna konečná sjednocení)
3.  $\Pr$  je funkce  $\Pr: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  je pravděpodobnost jevu z prostoru jevů, musí splňovat:
  - (a)  $\Pr[\emptyset] = 0$  a zároveň  $\Pr[\Omega] = 1$
  - (b)  $\Pr$  je spočetně aditivní, tedy pro každou  $I \subseteq \mathbb{N}$  a každou posloupnost jevů  $(A_j)_{j \in I}$ , které jsou po dvou disjunktní (tedy  $\forall i, j \in I: i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ ) platí:

$$\Pr[\cup_{j \in I} A_j] = \sum_{j \in I} \Pr[A_j]$$

(tedy  $\Pr$  je pravděpodobnostní míra)

### 2.2 Podmíněná pravděpodobnost

**Definice.** Nechť  $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$  je pravděpodobnostní prostor. Nechť  $A, B \in \mathcal{F}$  a navíc  $\Pr[B] > 0$ . Pak definujeme podmíněnou pravděpodobnost

$$\Pr[A | B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

## 2.3 Bayesova věta

**Věta 1.** Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$  je pravděpodobnostní prostor. Necht'  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{F}$  je rozklad  $\Omega$  (na spočetně mnoho množin). Nech  $A \in \mathcal{F}$  a navíc platí  $\Pr[A] > 0$  a navíc  $\Pr[B_i] > 0$  pro každé  $i$ . Pak

$$\Pr[B_j | A] = \frac{\Pr[A | B_j] \Pr[B_j]}{\sum_i \Pr[A | B_i] \Pr[B_i]}$$

## 2.4 Nezávislé jevy

**Definice.** Necht'  $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$  je pravděpodobnostní prostor. Necht'  $A, B \in \mathcal{F}$  jsou dva jevy. Pak řekneme, že  $A, B$  jsou nezávislé jevy, pokud platí:

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \Pr[B]$$

(také se dá říct  $\Pr[A | B] = \Pr[A]$  pokud  $\Pr[B] > 0$ ).

## 2.5 Spojité náhodné veličiny

Spousta z tohoto platí pro obecné náhodné veličiny (tedy i pro spojité i pro diskrétní).

- *Distribuční funkce* (cumulative distribution function – CDF) náhodné veličiny  $X$ :

$$\begin{aligned} F_X: \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ F_X(x) &= \Pr[X \leq x] \end{aligned} \quad (\text{pro každé } x \in \mathbb{R})$$

Tohle má smysl pro každou náhodnou veličinu.

- *Hustota* (probability density function – PDF) náhodné veličiny  $X$ :

$$\begin{aligned} f_X: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \Pr[X \leq x] &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \end{aligned} \quad (\text{pro každé } x \in \mathbb{R})$$

Jen pro velice hezké spojité veličiny.

Můžeme psát také:

$$\begin{aligned} 1_A(t) &= \begin{cases} 1 & t \in A \\ 0 & t \notin A \end{cases} \quad (\text{indikátorová funkce}) \\ \Pr[X \in A] &= \int_A f_X(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(t) f_X(t) dt \end{aligned}$$

- *Střední hodnota* náhodné veličiny  $X$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\Omega} X(\omega) d\Pr(\omega) \\ &= (R) \int_0^{\infty} \Pr(\{x \in \mathbb{R} \mid X(x) > t\}) dt \end{aligned}$$

(Pokud  $X(\omega) \geq 0$  vždy, jinak vyjádříme  $X$  jako rozdíl dvou nezáporných funkcí)

$$= (R) \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt$$

kde  $(R)$  značí Riemannův integrál. Tato definice funguje pro každou náhodnou veličinu (i pro diskrétní). Definice náhodné veličiny obsahuje podmínku, že  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$ , což je přesně podmínka, abychom mohli určit pravděpodobnost v předchozím integrálu.

Pokud známe i hustotu, tak můžeme psát:

$$\mathbb{E}[X] = (R) \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt \quad (X \text{ nemusí být nezáporná})$$

Případně máme pro libovolnou funkci  $g$ :

$$\mathbb{E}[g(X)] = (R) \int_{-\infty}^{\infty} g(t) f_X(t) dt$$

- *Rozptyl* náhodné veličiny:

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Tohle má smysl pro každou náhodnou veličinu (kde je pravá strana definovaná).



# Kapitola 3

## Řešení

### 3.1 Cvičení

1. Úvodní informace:

(a) Slyšíte mě všichni dobře?

(b) Literatura.

*Řešení:* TODO

(c) Pravidla zápočtu (domácí úkoly).

*Řešení:* TODO

## 2. Jak se generuje náhoda programem.

## ● Python3 Řešení:

```

# https://docs.python.org/3/library/random.html
# Nepoužívejte pro šifrování!
import random
import scipy

# https://docs.python.org/3/library/itertools.html
import itertools

# Generuj náhodné celé číslo 1 <= x <= 10 (tedy x in range(1, 11))
x = random.randint(1, 10)
print(x)

# Generuj náhodný prvek dané neprázdné posloupnosti.
drink = random.choice([
    "světlé pivo",
    "tmavé pivo",
    "slivovice",
    "bílé víno",
    "červené víno",
    "čaj",
])
print(drink)

# Výsledek 'B' je třikrát pravděpodobnější než 'A'.
print(random.choice(['A', 'B', 'B', 'B']))

# Vrátí list k náhodným prvkům z dané sekvence s danými váhami
# (cum_weights jsou trochu rychlejší).
# https://docs.python.org/3/library/random.html#random.choices
print(random.choices(['A', 'B', 'C'], weights=[1/6, 1/6, 2/3], k=5))

# Náhodná permutace (mění přímo daný list).
my_list = ['a', 'b', 'c', 'd']
random.shuffle(my_list)
print(my_list)

# Vybere dva prvky dané posloupnosti, ve výsledku se nebudou opakovat
# pozice. Pokud se prvky opakují, tak se mohou ve výsledku opakovat.
print(random.sample(['w', 'x', 'y', 'z'], k=2)) # two distinct letters
print(random.sample(['w', 'x', 'y', 'x'], k=2)) # 'x' can repeat

# Pro přesné počítání (vrací iterable):
print(list(itertools.permutations([1, 2, 3])))
print(list(itertools.combinations('ABCD', 2)))
print(list(itertools.combinations_with_replacement('ABCD', 2)))

# Může se hodit scipy: sudo apt-get install python3-scipy
scipy.special.comb(n=5, k=2, exact=True) # vrátí n nad k

```

## ● C++ Řešení:

```
std::default_random_engine generator;
```



```
std::uniform_int_distribution<int> distribution(0, 9);
```

- **R Řešení:**

```
x <- "hello"
```

3. Připomeňte si definici pravděpodobnostního prostoru (Definice 2.1). Určete, co je

- množina elementárních jevů (*sample space*), tedy množina  $\Omega$ ,
- prostor jevů (*event space*), tedy množina  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ,
- pravděpodobnost (*probability*), tedy funkce  $\text{Pr}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$

pro následující příklady:

(a) Hod spravedlivou alkoholovou trojhrannou tužkou (není to kostka kvůli popisu prostoru jevů):

```
import random
drink = random.choice([
    "světlé pivo",
    "tmavé pivo",
    "slivovice",
])
```

**Řešení:** V počítači nám stačí předchozí kód (pseudonáhodné číslo vs náhodné číslo). Fyzicky můžeme generovat pomocí hodu trojhrannou tužkou, která má značky na stěnách (a zaručeně nemůže padnout nastojato).

- Množina elementárních jevů  $\Omega = \{\text{světlé pivo}, \text{tmavé pivo}, \text{slivovice}\}$
- Prostor jevů  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , tedy  $|\mathcal{F}| = 2^{|\Omega|} = 2^3$ :

$$\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{\text{světlé pivo}\}, \{\text{tmavé pivo}\}, \{\text{slivovice}\}, \{\text{světlé pivo}, \text{tmavé pivo}\}, \{\text{světlé pivo}, \text{slivovice}\}, \{\text{tmavé pivo}, \text{slivovice}\}, \{\text{světlé pivo}, \text{tmavé pivo}, \text{slivovice}\} \}$$

- Pravděpodobnost

$$\begin{aligned} \text{Pr}[\emptyset] &= 0 \\ \text{Pr}[\{\text{světlé pivo}\}] &= 1/3 \\ \text{Pr}[\{\text{tmavé pivo}\}] &= 1/3 \\ \text{Pr}[\{\text{slivovice}\}] &= 1/3 \\ \text{Pr}[\{\text{světlé pivo}, \text{tmavé pivo}\}] &= 2/3 \\ \text{Pr}[\{\text{světlé pivo}, \text{slivovice}\}] &= 2/3 \\ \text{Pr}[\{\text{tmavé pivo}, \text{slivovice}\}] &= 2/3 \\ \text{Pr}[\{\text{světlé pivo}, \text{tmavé pivo}, \text{slivovice}\}] &= 1 \end{aligned}$$

Většinou ale nepopisujeme jev jako podmnožinu elementárních jevů, ale nějak lidsky:

$$\text{Pr}[\text{nějaké pivo}] = \text{Pr}[\text{světlé pivo} \vee \text{tmavé pivo}] = \text{Pr}[\{\text{světlé pivo}, \text{tmavé pivo}\}] = 2/3$$

$$\Pr[\text{ne pivo}] = \Pr[\{\text{slivovice}\}] = 1 - \Pr[\{\text{světlé pivo, tmavé pivo}\}] = 1/3$$

(b) Uniformně náhodné číslo z intervalu  $[0, 1)$ .

```
import random
print(random.random())
```

**Řešení:** V počítači nám funkce `random.random` vrátí float  $x$ , který je přesně reprezentovatelný, platí  $0.0 \leq x < 1.0$  a zároveň  $x$  je celočíselný násobek  $2^{-53}$ . To ale znamená, že nikdy nedostaneme  $0.05954861408025609$  i když to je číslo přesně reprezentovatelné jako python float. Můžeme generovat i vícebitová čísla, ale vždy to bude číslo! A to je dobře, většina reálných čísel nejde reprezentovat konečnou posloupností symbolů (pozor,  $\sqrt{2}$  jde reprezentovat jako kořen polynomu, ale i třeba  $1/\pi$  jde reprezentovat například algoritmem, který ho počítá).

Jak bychom fyzikálně generovali uniformně náhodné číslo z intervalu  $[0, 1)$ ? Uniformně náhodné znamená, že každé číslo bude stejně pravděpodobné. Hod šipkou na interval má nevýhodu, že buď budou konce intervalu méně pravděpodobné než prostředek nebo se nám může stát že hodíme šipku mimo interval (nejspíš obojí). Můžeme ale udělat terč s jedním vyznačeným poloměrem, který bude kruh, připevnit jeho střed k vrtačce, roztočit a hodit šipku (tak abychom netrefili střed, ale určitě trefili kruh). Pak náhodné číslo  $x \in [0, 1)$  bude úhel který svírá vyznačný poloměr a naše šipka dělený  $2\pi$ .

- Toto je jen myšlenkový experiment, fyzická implementace je nejspíš poměrně nebezpečná. Doma to nezkoušejte!
- Můžete namítnout, že šipka nevybere přesně bod, že terč je tvořen atomy a tedy je také z nějakého pohledu diskrétní. Asi ano, ale já neříkal, že reálná čísla existují. Pro představu atom může mít poloměr okolo  $10^{-10}m$ , tedy na délce  $1m$  jich vedle sebe vyskládáme zhruba  $10^{10}$ . Srovnajte s přesností  $2^{-53} \approx 10^{-16}$ , tedy pokud bychom výsledek `random.random()` brali jako pozici v metrech, pak máme přesnost zhruba na dvě miliontiny atomu.
- množina elementárních jevů (*sample space*), tedy množina  $\Omega = [0, 1)$
- prostor jevů (*event space*), tedy množina  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

Napřed se zeptejme, jestli by nemohlo platit, že  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Asi bychom chtěli následující vlastnosti:

- pokud  $A \in \mathcal{F}$  je interval, pak  $\Pr[A]$  je rovna délce  $A$
- pokud  $A \in \mathcal{F}$  a navíc  $x + A = \{x + a \mid a \in A\} \subseteq \Omega$  pro nějaké reálné číslo  $x$ , pak  $\Pr[A] = \Pr[x + A]$ .
- každá podmnožina  $\Omega$  má přiřazenou nějakou pravděpodobnost

Ale to nejde, protože ne každá množina má míru (tady  $\Pr$  odpovídá takzvané pravděpodobnostní míře – míra celého prostoru je rovna jedné). Nejznámějším příkladem je [https://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski\\_paradox](https://en.wikipedia.org/wiki/Banach%E2%80%93Tarski_paradox) Hezké video: <https://www.youtube.com/watch?v=s86-Z-CbaHA>

Naše řešení:  $\mathcal{F}$  je množina Lebesgueovskými měřitelných podmnožin  $\Omega$ .

- pravděpodobnost (*probability*), tedy funkce  $\Pr: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  je Lebesgueova míra.

Pokud jste neslyšeli o tom, co je to míra, tak se nelekejte. Dobré k zapamatování:

- Pravděpodobnost je číslo mezi nulou a jedničkou (obecná míra celého prostoru nemusí být rovna jedné, ale nás zajímá pravděpodobnostní míra).

- “Nic se nestane” má pravděpodobnost nula –  $\Pr[\emptyset] = 0$  (tedy speciálně  $\emptyset$  je měřitelná).
- “Něco se stane” má pravděpodobnost jedna –  $\Pr[\Omega] = 1$  (tedy speciálně  $\Omega$  je měřitelná).
- “Stane se  $A$ ” má pravděpodobnost 1-“Nestane se  $A$ ” –  $\Pr[A] = 1 - \Pr[\Omega \setminus A]$  (tedy pokud je  $A$  měřitelná, pak je i její doplněk měřitelný).
- $\Pr[\text{Na kostce padne jedna tečka nebo dvě tečky}] = \Pr[\text{padne jedna tečka}] + \Pr[\text{padnou dvě tečky}]$  – pravděpodobnost sjednocení disjunktních množin je rovna součtu jejich pravděpodobností (platí také pro *spočetně* mnoho disjunktních množin a navíc sjednocení spočetně mnoha disjunktních měřitelných množin je taky měřitelné)
- Lebesgueova míra jednoho bodu je nulová (tedy ze spočetného disjunktního sjednocení máme že pravděpodobnost že uniformně náhodné reálné číslo z intervalu  $[0, 1)$  je racionální je nulová).  
Pozor na to, že sice platí  $\Pr[\{0.1\}] = 0$ , ale to neznamená, že jev že padne 0.1 je nemožný (akorát velice velice nepravděpodobný). Naopak pokud je jev nemožný  $\Pr[\text{na šestistěnné kostce padne sedm}]$ , pak je jeho pravděpodobnost nulová.
- Úsečka v  $[0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2$  má Lebesgueovu míru nula.

Takže ty definice, které vám přijdou divné jsou tam kvůli teorii míry (případně později kvůli teorii integrálu).

Pozor na to, že ne každá pravděpodobnost je Lebesgueova míra, můžeme uvažovat například  $\Omega = [0, 1)$ ,  $\mathcal{F}$  jsou Lebesgueovsky měřitelné,  $\Pr$  která  $\Pr[\{0.1\}] = 1/2$  a  $\Pr[A] = \lambda(A)/2 + 1/2$  pokud  $0.1 \in A$  a  $\Pr[A] = \lambda(A)/2$  jinak (kde  $\lambda(A)$  značí Lebesgueovu míru množiny  $A$ ).

Někdy také mluvíme o pravděpodobnostní distribuci, zatím to můžete brát jako synonymum k pravděpodobnosti.

4. **Dokažte, že**  $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ .

**Řešení:** Předpokládejme, že platí  $A \cap B, A \cup B, A, B \in \mathcal{F}$  (jinak by výraz nahoře neměl smysl). Z definice pravděpodobnostního prostoru (Definice 2.1) máme spočetnou aditivitu pro disjunktní jevy. Rozdělíme tedy  $A \cup B$  na disjunktní množiny:

$$C_1 = A \cap B$$

$$C_2 = A \setminus B$$

$$C_3 = B \setminus A$$

tedy máme  $A \cup B = C_1 \cup C_2 \cup C_3$  a zároveň  $C_i \cap C_j = \emptyset$  pro každé dvě  $1 \leq i < j \leq 3$ . Dle spočetné aditivity můžeme psát:

$$\begin{aligned} \Pr[A \cup B] &= \Pr[C_1 \cup C_2 \cup C_3] \\ &= \Pr[C_1] + \Pr[C_2] + \Pr[C_3] \end{aligned}$$

Máme také:

$$A = C_2 \cup C_1 = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

$$B = C_3 \cup C_1 = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$$

takže můžeme psát:

$$\begin{aligned} \Pr[A \cup B] &= \Pr[C_1] + \Pr[C_2] + \Pr[C_3] \\ &= \Pr[C_1] + \Pr[C_2] + 2\Pr[C_3] - \Pr[C_3] \\ &= (\Pr[C_1] + \Pr[C_3]) + (\Pr[C_2] + \Pr[C_3]) - \Pr[C_3] \\ &= (\Pr[A]) + (\Pr[B]) - \Pr[C_3] \\ &= \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B] \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

## 5. Zopakujte si základní kombinatoriku:

- Kolik je různých permutací množiny  $\{A, B, C\}$ ?

*Řešení:*  $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$ , obecně  $n!$  pokud máme  $n$  rozlišitelných prvků

```
import itertools

permutations = list(itertools.permutations(['A', 'B', 'C']))
print(f'There are {len(permutations)} permutations: {permutations}')

# There are 6 permutations:
#   [('A', 'B', 'C'),
#    ('A', 'C', 'B'),
#    ('B', 'A', 'C'),
#    ('B', 'C', 'A'),
#    ('C', 'A', 'B'),
#    ('C', 'B', 'A')]
```

- Kolik různých slov skládajících se z písmen  $\{A, B\}$  má délku 3?

*Řešení:*  $2^3 = 8$ , obecně  $n^r$  kde  $n$  je počet písmen,  $r$  délka slova

```
import itertools

all_words = list(itertools.product('AB', repeat=3))
print(f'There are {len(all_words)} words: {all_words}')

# There are 8 words:
#   [('A', 'A', 'A'),
#    ('A', 'A', 'B'),
#    ('A', 'B', 'A'),
#    ('A', 'B', 'B'),
#    ('B', 'A', 'A'),
#    ('B', 'A', 'B'),
#    ('B', 'B', 'A'),
#    ('B', 'B', 'B')]
```

- Kolik různých podmnožin množiny  $\{A, B, C, D, E\}$  má velikost 3?

*Řešení:*  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{5}{3} = 10$

```
import itertools

all_subsets = list(itertools.combinations('ABCDE', 3))
print(f'There are {len(all_subsets)} subsets: {all_subsets}')

# There are 10 subsets:
#   [('A', 'B', 'C'),
#    ('A', 'B', 'D'),
#    ('A', 'B', 'E'),
#    ('A', 'C', 'D'),
#    ('A', 'C', 'E'),
#    ('A', 'D', 'E'),
#    ('B', 'C', 'D'),
#    ('B', 'C', 'E'),
#    ('B', 'D', 'E'),
#    ('C', 'D', 'E')]
```

- Kolik různých kombinací s opakováním z množiny  $\{A, B, C, D, E\}$  velikosti 3?

**Řešení:**  $\binom{n+r-1}{r}$  kde  $n = 5$ ,  $r = 3$ . Protože máme  $n - 1$  svíslítek a  $r$  hvězdiček a kódujeme takto:

$$AAD = ** ||| * |$$

tedy

$$\text{počet A} | \text{počet B} | \text{počet C} | \text{počet D} | \text{počet E}$$

kde každý počet je reprezentován počtem hvězdiček a vybíráme které z  $n+r-1$  symbolů budou hvězdičky.

```
import itertools
```

```
sorted_sequences = list(itertools.combinations_with_replacement('ABCDE', r=3))
print(f'Máme {len(sorted_sequences)} sekvencí: {sorted_sequences}')
```

```
# There are 35 sorted sequences:
#      [('A', 'A', 'A'), ('A', 'A', 'B'), ('A', 'A', 'C'),
#      ('A', 'A', 'D'), ('A', 'A', 'E'), ('A', 'B', 'B'),
#      ('A', 'B', 'C'), ('A', 'B', 'D'), ('A', 'B', 'E'),
#      ('A', 'C', 'C'), ('A', 'C', 'D'), ('A', 'C', 'E'),
#      ('A', 'D', 'D'), ('A', 'D', 'E'), ('A', 'E', 'E'),
#      ('B', 'B', 'B'), ('B', 'B', 'C'), ('B', 'B', 'D'),
#      ('B', 'B', 'E'), ('B', 'C', 'C'), ('B', 'C', 'D'),
#      ('B', 'C', 'E'), ('B', 'D', 'D'), ('B', 'D', 'E'),
#      ('B', 'E', 'E'), ('C', 'C', 'C'), ('C', 'C', 'D'),
#      ('C', 'C', 'E'), ('C', 'D', 'D'), ('C', 'D', 'E'),
#      ('C', 'E', 'E'), ('D', 'D', 'D'), ('D', 'D', 'E'),
#      ('D', 'E', 'E'), ('E', 'E', 'E')]
```

6. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu šesti rozlišitelných spravedlivých šestistěnných kostek padnou aspoň na třech kostkách aspoň tři? Jaký je množina elementárních jevů, prostor jevů a pravděpodobnost?

**Řešení:**

- Množina elementárních jevů je  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^6 = \{111111, 111112, \dots, 666666\}$ , tedy  $|\Omega| = 6^6 = 46656$ .
- Prostor jevů je  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ , tedy  $|\mathcal{F}| = 2^{46656}$
- Pravděpodobnost  $\Pr[\{abcdef\}] = 1/6^6$  pro libovolná  $a, b, c, d, e, f \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

Jak takový příklad řešit? Uvědomit si přesně o čem mluvíme, pak zkusit přemýšlet o jednodušších jevech.

- Na jedné kostce padnou aspoň tři s pravděpodobností  $4/6 = 2/3$  (musí padnout 3, 4, 5, 6, tedy nepadne 1, 2).
- Pokud vybereme  $k$  kostek, pak pravděpodobnost, že přesně na těchto kostkách padne aspoň tři je přesně  $(2/3)^k(1/3)^{6-k}$  (kostky jsou nezávislé). Kupříkladu pokud vybereme první čtyři kostky, pak nás zajímá:

$$\Pr[\{ABCDef \mid A, B, C, D \in \{3, 4, 5, 6\}, e, f \in \{1, 2\}\}] = \frac{4^4 \cdot 2^2}{6^6} = (2/3)^4(1/3)^{6-4}$$

- Přesně  $k$  kostek vybereme  $\binom{6}{k}$  způsoby.
- Rozdělíme pravděpodobnostní prostor na jevy, kde přesně na  $k$  kostkách padne číslo aspoň tři (tedy máme disjunktí rozklad) a  $k \geq 3$ , tedy použijeme definici pravděpodobnosti a sečteme předchozí pro  $k \in \{3, 4, 5, 6\}$ :

$$\begin{aligned} \Pr[\text{aspoň na třech kostkách aspoň tři}] &= \binom{6}{3} (2/3)^3(1/3)^{6-3} \\ &\quad + \binom{6}{4} (2/3)^4(1/3)^{6-4} \\ &\quad + \binom{6}{5} (2/3)^5(1/3)^{6-5} \\ &\quad + \binom{6}{6} (2/3)^6(1/3)^{6-6} \\ &= 0.8998628257887514 \end{aligned}$$

Tady jsme vlastně použili větu z přednášky, že pokud  $B_0, B_1, \dots, B_{2^6-1}$  jsou rozklad  $\Omega$  (tedy  $B_i \neq B_j$  pro  $i \neq j$  a zároveň  $\cup B_i = \Omega$ ), pak  $\Pr[A] = \sum_i \Pr[A \mid B_i] \Pr[B_i]$ . Kde jev  $A$  je že na aspoň třech kostkách padne aspoň tři. Jev  $B_i$  je že na přesně určených kostkách padne aspoň tři (tedy jevy  $B_i, B_j$  jsou opravdu disjunktí). Konkrétně 22 zapsané binárně je 010110, pak jev  $B_{22}$  je jev že na druhé, čtvrté a páté kostce padlo číslo aspoň tři. Pak  $\Pr[A \mid B_x] = 1$  pokud  $x$  má v binárním zápisu aspoň tři jedničky a  $\Pr[A \mid B_x] = 0$  jinak. Už jsme spočítali, že  $\Pr[B_x] = (2/3)^k(1/3)^{6-k}$  pokud  $x$  má v binárním zápisu  $k$  jedniček.

Pomocí programu:

```
import itertools
import scipy.special
import random
```



```

# Přesný výsledek pomocí kombinatoriky:

def p(k):
    """ Probability that there are exactly k out of 6 dice with at least 3. """
    return scipy.special.comb(6, k, exact=True) * ((2/3)**k) * ((1/3)**(6-k))

exact_computed = sum(p(k) for k in range(3, 7))
print(f'Přesný výsledek: {exact_computed}')

# Přesný výsledek spočítaný hrubou silou:

def indicator(dice):
    """ Return 1 if at least three dice have at least 3, otherwise
    return 0. """
    if sum(1 for x in dice if x >= 3) >= 3:
        return 1
    else:
        return 0

all_outcomes = itertools.product(range(1, 7), repeat=6)
exact_bruteforce = sum(indicator(d) for d in all_outcomes) / (6**6)
print(f'Hrubá síla: {exact_bruteforce}')

# Simulace:

N = 1000 # Number of tries
simulated = sum(indicator(random.choices(range(1, 7), k=6))
                 for _ in range(N)) / N
print(f'Simulace: {simulated}')

# Možný výsledek:
# Přesný výsledek: 0.8998628257887514
# Hrubá síla: 0.8998628257887518
# Simulace: 0.903

```

Porovnejme naše metody:

- Výpočet vzorcem:
  - přesný výsledek
  - potřebovali jsme kombinatoriku a přemýšlet
  - pokud se změní zadání, tak řešení se změní celkem dost
  - velice rychlý výpočet
- Procházení všech možností:
  - jednodušší vymýšlení
  - potřebujeme programovat

- přesný výsledek (liší se v posledních místech floatu, dáno nepřesnostmi floatové reprezentace, `exact=True` nevrací nativní float)
- pokud se změní zadání, tak se řešení skoro nezmění
- pokud je množina elementárních jevů velká, tak se tento postup nepoužitelný
- Simulace:
  - jednoduché vymyšlení (skoro jako předchozí případ)
  - pokud se změní zadání, tak se řešení skoro nezmění
  - časová složitost není lineární ve velikosti množiny elementárních jevů ( $N$  krát vybíráme náhodný prvek  $\Omega$ , což často zvládáme v  $\mathcal{O}(\log |\Omega|)$  krocích)
  - nepřesný výsledek – závisí na náhodných bitech počítače a počtu pokusů
  - budeme potřebovat trochu teorie abychom odhadli jak jistí si jsme výsledkem

7. Nechť  $\Omega$  jsou všechny permutace prvních 100 přirozených čísel, prostor jevů jsou všechny podmnožiny  $\Omega$  a každý elementární jev je stejně pravděpodobný. Označme jev  $A_j$  že náhodně zvolená permutace  $\pi \in \Omega$  splňuje  $\pi(j) = j$  (pro  $1 \leq j \leq 100$ ). Jsou  $A_1, A_2$  nezávislé jevy?

**Řešení:**

- Počet permutací v  $A_j$  je přesně 99! (jeden prvek je fixní, zbytek permutujeme), tedy

$$\Pr[A_j] = \frac{99!}{100!} = \frac{1}{100}$$

- Počet permutací v  $A_1 \cap A_2$  je přesně 98! (dva prvky jsou fixní, zbytek permutujeme), tedy

$$\Pr[A_1 \cap A_2] = \frac{98!}{100!} = \frac{1}{9900}$$

- Dle definice nezávislých jevů bychom potřebovali  $\Pr[A_1] \Pr[A_2] = \Pr[A_1 \cap A_2]$  (Definice 2.4), ale to neplatí:

$$\Pr[A_1 \cap A_2] = \frac{1}{9900} \neq \frac{1}{10000} = \Pr[A_1] \Pr[A_2]$$

Zamysleme se nad počítačovým řešením:

```
import random

# indexujeme od nuly
def fixed(my_list, j):
    return my_list[j] == j

my_list = list(range(100))
N = 100000

A1 = 0
for _ in range(N):
    random.shuffle(my_list)
    A1 += 1 if fixed(my_list, 0) else 0
A1 = A1 / N
print(f'Pr[A_1] = Pr[A_2] = {A1} (= {1/100})')

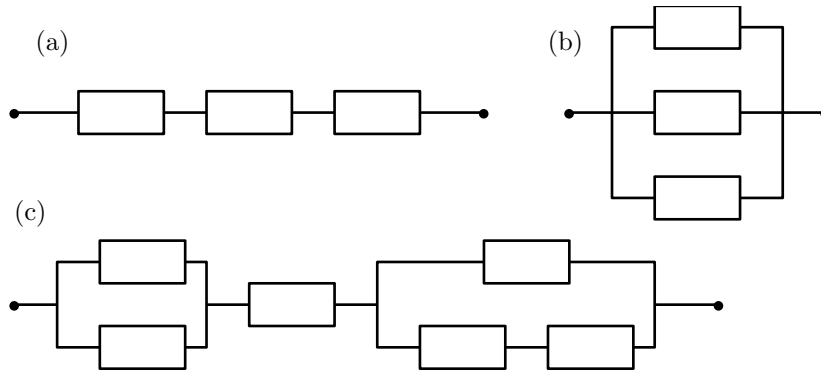
A1A2 = 0
for _ in range(N):
    random.shuffle(my_list)
    A1A2 += 1 if fixed(my_list, 0) and fixed(my_list, 1) else 0
A1A2 = A1A2 / N
print(f'Pr[A_1 and A_2] = {A1A2} (= {1/9900})')

# Možný výsledek:
# Pr[A_1] = Pr[A_2] = 0.00993 (= 0.01)
# Pr[A_1 and A_2] = 0.00012 (= 0.000101010101010101)
```

- jednoduchá simulace

- potřebujeme více pokusů, protože potřebujeme odhadnout s větší přesností (menší pravděpodobnost, tak abychom nedostali nulu)
- vůbec nemůžeme použít hrubou sílu, neboť  $100! \approx 9.33 \cdot 10^{157}$ , pro představu:
  - počítač vykoná zhruba  $10^9$  instrukcí za sekundu
  - lineární algoritmus (další permutaci najdeme v jednotkovém čase) by trval zhruba  $10^{148}$  sekund
  - stáří vesmíru se odhaduje na  $13.787 \cdot 10^9$  let
  - jeden rok trvá zhruba  $\pi \cdot 10^7$  sekund
  - stáří vesmíru je tedy zhruba  $4.34 \cdot 10^{17}$  sekund
  - tedy lineární algoritmus který by prošel všechny permutace 100 prvkové množiny by běžel zhruba  $10^{131}$  stáří vesmíru

8. Každý obdélník na obrázku je součástka, která se může porouchat s pravděpodobností  $p$ . Přesněji řečeno porucha znamená, že skrz ní neteče proud. Poruchy součástek jsou na sobě nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že stále poteče proud mezi dvěma puntíky.



**Řešení:**

(a) Jak postupujeme:

- Jedna součástka se neporouchá (tedy je ok, jev  $O$ , porouchá jev  $P$ ) s pravděpodobností  $\Pr[O] = 1 - \Pr[P] = 1 - p$ .
- Aby proud tek, tak všechny součástky musí být ok. Tedy nás zajímá

$$\Pr[O_1 \cap O_2 \cap O_3]$$

- Z nezávislosti jevů  $P_1, P_2$  máme i nezávislost jevů  $O_1, O_2$  (tedy jejich doplňků):
  - Chceme:  $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \Pr[B]$  právě tehdy když  $\Pr[\bar{A} \cap \bar{B}] = \Pr[\bar{A}] \Pr[\bar{B}]$  kde  $\bar{A} = \Omega \setminus A$  je doplněk
  - Z minulého příkladu přeuspořádáním dostaneme (pro libovolné jevy)

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cup B]$$

– Tedy:

$$\Pr[\bar{A} \cap \bar{B}] = \Pr[\bar{A}] + \Pr[\bar{B}] - \Pr[\bar{A} \cup \bar{B}]$$

– Použijeme že  $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$

– Tedy píšeme:

$$\begin{aligned} \Pr[\bar{A} \cap \bar{B}] &= \Pr[\bar{A}] + \Pr[\bar{B}] - \Pr[\bar{A} \cup \bar{B}] \\ &= \Pr[\bar{A}] + \Pr[\bar{B}] - \Pr[\overline{A \cap B}] \\ &= (1 - \Pr[A]) + (1 - \Pr[B]) - (1 - \Pr[A \cap B]) \\ &= 1 - \Pr[A] - \Pr[B] + \Pr[A \cap B] \quad (\text{z nezávislosti } A, B) \end{aligned}$$

- Chtěli jsme  $\Pr[\bar{A} \cap \bar{B}] = \Pr[\bar{A}] \Pr[\bar{B}] = (1 - \Pr[A])(1 - \Pr[B])$ , což je akorát jinak napsaný předchozí řádek.

- Z nezávislosti jevů  $O_1, O_2, O_3$  máme rovnou

$$\begin{aligned}\Pr[O_1 \cap O_2 \cap O_3] &= \Pr[O_1] \Pr[O_2] \Pr[O_3] \\ &= (1 - \Pr[P_1])(1 - \Pr[P_2])(1 - \Pr[P_3]) \\ &= (1 - p)^3\end{aligned}$$

- (b) Druhý příklad je podobný, ale potřebujeme aby aspoň jedna součástka fungovala, tedy chceme

$$\Pr[O_1 \cup O_2 \cup O_3]$$

Jako nápoředu použijte pozorování že  $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ .

Jednodušší postup je, uvědomit si, že se nemůžou porouchat všechny a použít nezávislost, tedy

$$\begin{aligned}\Pr[O_1 \cup O_2 \cup O_3] &= 1 - \Pr[P_1 \cap P_2 \cap P_3] \\ &= 1 - \Pr[P_1] \Pr[P_2] \Pr[P_3] \\ &= 1 - p^3\end{aligned}$$

- (c) Kombinace myšlenek předchozích.

Samozřejmě můžeme simulovat (všimněte si, jak se podmínka v indikátoru mechanicky překlápí na vzorec pravděpodobnosti):

```
from random import choices
from typing import Sequence

# Pravděpodobnost chyby konkrétní součástky (chyby jsou nezávislé).
p = 0.1
# Počet pokusů.
N = 1000000

def bernoulli_list(k: int, pr: float = p) -> Sequence[bool]:
    """Vrací k samplů z Bernoulliho rozdělení s pravděpodobností pr."""
    return choices([True, False], weights=[pr, 1-pr], k=k)

# a)
#   +-----+   +-----+   +-----+
# o---| 0 |---| 1 |---| 2 |---o
#   +-----+   +-----+   +-----+

def proud_tece_a(soucastky: Sequence[bool]) -> int:
    """Indikátor, jestli proud teče.
    soucastky[i] = i-tá součástka je porouchaná."""
    assert len(soucastky) == 3
    return int(not soucastky[0] and not soucastky[1] and not soucastky[2])

# Kolikrát proud tekł z N pokusů.
proud_tekl_a = sum(proud_tece_a(bernoulli_list(3)) for _ in range(N))
```

```

simulation_a = proud_tekl_a / N
answer_a = (1 - p)**3
error_a = abs(answer_a - simulation_a)
print(f'a) Simulováno: {simulation_a} (chyba {error_a})')

```

```

# b)
#           +-----+
#       +---| 0 |---+
#       |   +-----+   |
#       |   +-----+   |
#       |   +-----+   |
#  o---+---| 1 |---+---o
#       |   +-----+   |
#       |   +-----+   |
#       |   +-----+   |
#       +---| 2 |---+
#           +-----+

```

```

def proud_tece_b(soucastky: Sequence[bool]) -> int:
    """Indikátor, jestli proud teče.
    soucastky[i] = i-tá součástka je porouchaná."""
    assert len(soucastky) == 3
    return int(not (soucastky[0] and soucastky[1] and soucastky[2]))

```

```
proud_tekl_b = sum(proud_tece_b(bernoulli_list(3)) for _ in range(N))
```

```

simulation_b = proud_tekl_b / N
answer_b = 1 - (p**3)
error_b = abs(answer_b - simulation_b)
print(f'b) Simulováno: {simulation_b} (chyba {error_b})')

```

```

# c)
#           +-----+           +-----+
#       +---| 0 |---+           +-----| 3 |-----+
#       |   +-----+   |   +-----+   |           +-----+   |
#  o---+---+           +---| 2 |---+           +-----+   |
#       |   +-----+   |   +-----+   |   +-----+   +-----+   |
#       +---| 1 |---+           +---| 4 |---| 5 |---+
#           +-----+           +-----+   +-----+

```

```

def proud_tece_c(soucastky: Sequence[bool]) -> int:
    """Indikátor, jestli proud teče.
    soucastky[i] = i-tá součástka je porouchaná."""
    assert len(soucastky) == 6
    return int(not (soucastky[0] and soucastky[1]
                    and not soucastky[2]
                    and (not (soucastky[3] and (soucastky[4] or soucastky[5])))))

```

```
proud_tekl_c = sum(proud_tece_c(bernoulli_list(6)) for _ in range(N))
```

```
simulation_c = proud_tekl_c / N
answer_c = (1 - (p**2)) * (1 - p) * (1 - (p * (1 - ((1 - p)**2))))
error_c = abs(answer_c - simulation_c)
print(f'c) Simulováno: {simulation_c} (chyba {error_c})')

# Možný výsledek:
# a) Simulováno: 0.728696 (chyba 0.000304000000000082)
# b) Simulováno: 0.999005 (chyba 5.00000000032756e-06)
# c) Simulováno: 0.874083 (chyba 1.200000000012001e-05)
```



## 3.2 Cvičení

1. Házíme cinknutou mincí – hlava padne s pravděpodobností  $p \in [0, 1)$ , orel padne s pravděpodobností  $1 - p$ . Házíme opakovaně dokud nepadne hlava.

(a) Jak vypadá pravděpodobnostní prostor?

*Řešení:*

- *Množina elementárních jevů:* Série hodů, které uvažujeme můžeme kódovat pomocí  $H$  pokud padne hlava,  $O$  pokud padne orel, takže bychom mohli možné série hodů reprezentovat jako

$$\{H, OH, OOH, OOOH, OOOOH, \dots\}.$$

Ale to je poněkud nepraktické, raději budeme reprezentovat počtem hodů (poslední je určitě hlava, ty před ním jsou orlové):

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

- *Prostor jevů:* Máme spočetnou množinu elementárních jevů, takže můžeme brát jako prostor jevů celou potenční množinu množiny elementárních jevů:  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ .

Lehké cvičení z matematické analýzy: dokažte, že pokud každému elementárnímu jevu přiřadíme pravděpodobnost, tedy

$$\forall \omega \in \Omega: \Pr[\{\omega\}] \in [0, 1]$$

pak víme, že

–

$$\Pr[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\{\omega\}] = 1$$

–

$$\forall A \in \mathcal{F}: \Pr[A] = \sum_{\omega \in A} \Pr[\{\omega\}]$$

a tento výraz je dobře definovaný (vzpomeňte na absolutní konvergenci, neklesající posloupnost a omezenou posloupnost).

- *Pravděpodobnost:* Jak jsme viděli v předchozím bodě, tak stačí určit pravděpodobnost, že hodíme právě  $n$ -krát, což je

$$\Pr[\{n\}] = (1 - p)^{n-1}p \quad (\text{pro libovolné } n \in \mathbb{N}^+)$$

protože napřed musí padnout  $n - 1$  orlů a pak jedna hlava.

Zkontrolujme ještě, že se vše sečte na jedničku. Pro jistotu napřed zopakujme součty geometrické řady.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=0}^n q^j \\ &= 1 + q + q^2 + \dots + q^n \\ &= 1 + q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\ &= 1 + q(S - q^n) \end{aligned}$$

tedy

$$S = 1 + q(S - q^n)$$

$$\begin{aligned}
 S - qS &= 1 - q^{n+1} \\
 S &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{pokud } q \neq 1)
 \end{aligned}$$

a pro nekonečný případ

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^{\infty} q^j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n q^j \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \\
 &= \frac{1}{1 - q} \quad (\text{pokud } |q| < 1)
 \end{aligned}$$

Teď už můžeme aplikovat předchozí pro naši pravděpodobnost:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \in \Omega} \Pr[\{n\}] &= \sum_{n \in \Omega} (1 - p)^{n-1} p \\
 &= p(1 + (1 - p) + (1 - p)^2 + \dots) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

(b) **Jaká je pravděpodobnost, že hodíme právě třikrát ( $n$ -krát)?**

**Řešení:** To už jsme určili v předchozím bodě, ale tato vlastnost je tak důležitá, že to radši zopakujeme:

$$\Pr[\{n\}] = (1 - p)^{n-1} p \quad (\text{pro libovolné } n \in \mathbb{N}^+)$$

Připomeňme, že tomuto se také někdy říká geometrické rozdělení. Dejte pozor na to, že  $0 < p \leq 1$  (proč?). Hodí se, když při hodu kostkou házíme znovu a zajímá nás celkový počet hodů.

(c) **Jaká je pravděpodobnost, že hodíme nejvýš třikrát ( $n$ -krát)?**

**Řešení:** Využijeme součet geometrické posloupnosti:

$$\begin{aligned}
 \Pr[\{1, 2, \dots, n\}] &= \sum_{j=1}^n p(1 - p)^{j-1} \\
 &= p \sum_{j=1}^n (1 - p)^{j-1} \\
 &= p \frac{1 - (1 - p)^n}{1 - (1 - p)} \\
 &= 1 - (1 - p)^n
 \end{aligned}$$

(d) **Jaká je pravděpodobnost, že hodíme lišekrát?**

**Řešení:** Opět přímý výpočet:

$$\begin{aligned}
 \Pr[\{1, 3, 5, 7, \dots\}] &= \sum_{j=0}^{\infty} p(1 - p)^{2j} \\
 &= p \sum_{j=0}^{\infty} ((1 - p)^2)^j
 \end{aligned}$$

$$= p \sum_{j=0}^{\infty} ((1-p)^2)^j$$

$$= p \frac{1}{1 - (1-p)^2}$$

(e) Simulujte předchozí.

*Řešení:*

```
from random import random

def geometric(pr: float = 0.5) -> int:
    """pr is success probability, return the number of tosses until
    the first success."""
    assert pr > 0
    sample = 1
    fail_pr = 1 - pr
    while random() < fail_pr:
        sample += 1
    return sample

N = 1000000 # Pokusů
pr = 0.3

exactly_three_sim = sum(int(geometric(pr) == 3) for _ in range(N)) / N
exactly_three = pr * (1 - pr)**2
print(f'a) Pr[tři] = {exactly_three_sim} (= {exactly_three})')

at_most_three_sim = sum(int(geometric(pr) <= 3) for _ in range(N)) / N
at_most_three = 1 - (1 - pr)**3
print(f'b) Pr[nejvýš tři] = {at_most_three_sim} (= {at_most_three})')

odd_number_sim = sum(int(geometric(pr) % 2 == 1) for _ in range(N)) / N
odd_number = pr / (1 - (1 - pr)**2)
print(f'c) Pr[lišekrát] = {odd_number_sim} (= {odd_number})')

# Možný výstup:
# a) Pr[tři] = 0.147168 (= 0.14699999999999996)
# b) Pr[nejvýš tři] = 0.65664 (= 0.657)
# c) Pr[lišekrát] = 0.58815 (= 0.5882352941176471)
```

2. Hodíme cinknutou korunou (panna s pravděpodobností  $p_1 \in [0, 1]$ ) a cinknutou dvoukorunou (panna s pravděpodobností  $p_2 \in [0, 1]$ ). Oba hody jsou na sobě nezávislé.

(a) Určete pravděpodobnostní prostor.

**Řešení:**

- Množina elementárních jevů:

$$\Omega = \{P_1P_2, P_1O_2, O_1P_2, O_1O_2\}$$

kde  $P$  je panna  $O$  orel a index ukazuje na které minci to padlo.

- Prostor jevů:

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

- Pravděpodobnost: určíme znovu jen na jednoprvkových jevech (na obecném jevu suma):

$$\Pr[\{P_1P_2\}] = p_1p_2$$

$$\Pr[\{P_1O_2\}] = p_1(1 - p_2)$$

$$\Pr[\{O_1P_2\}] = (1 - p_1)p_2$$

$$\Pr[\{O_1O_2\}] = (1 - p_1)(1 - p_2)$$

- (b) Připomněte si definici podmíněné pravděpodobnosti (Definice 2.2).  
 (c) Spočítejte pravděpodobnost  $\Pr[\text{na obou padne panna} \mid \text{na koruně padne panna}]$ .

**Řešení:** Jev  $A$  „na obou padne panna“ je formálně  $A = \{P_1P_2\}$ , jev  $B$  „na koruně padne panna“ je formálně  $B = \{P_1P_2, P_1O_2\}$  (má pravděpodobnost ostře větší než jedna). Pak podmíněná pravděpodobnost je:

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$$

tedy

$$\begin{aligned} \Pr[\{P_1P_2\} \mid \{P_1P_2, P_1O_2\}] &= \frac{\Pr[\{P_1P_2\} \cap \{P_1P_2, P_1O_2\}]}{\Pr[\{P_1P_2, P_1O_2\}]} \\ &= \frac{\Pr[\{P_1P_2\}]}{\Pr[\{P_1P_2, P_1O_2\}]} \\ &= \frac{p_1p_2}{p_1p_2 + p_1(1 - p_2)} \\ &= p_2 \quad (\text{což dává smysl, protože ty hody jsou nezávislé}) \end{aligned}$$

- (d) Spočítejte pravděpodobnost  $\Pr[\text{na obou padne panna} \mid \text{padne aspoň jedna panna}]$ .

**Řešení:** Jev  $A$  „na obou padne panna“ je formálně  $A = \{P_1P_2\}$ , jev  $B$  „aspoň jedna panna“ je formálně  $C = \{P_1P_2, P_1O_2, O_1P_2\}$  (má pravděpodobnost ostře větší než jedna). Pak podmíněná pravděpodobnost je:

$$\begin{aligned} \Pr[\{P_1P_2\} \mid \{P_1P_2, P_1O_2, O_1P_2\}] &= \frac{\Pr[\{P_1P_2\} \cap \{P_1P_2, P_1O_2, O_1P_2\}]}{\Pr[\{P_1P_2, P_1O_2, O_1P_2\}]} \\ &= \frac{\Pr[\{P_1P_2\}]}{\Pr[\{P_1P_2, P_1O_2, O_1P_2\}]} \end{aligned}$$

$$= \frac{p_1 p_2}{p_1 p_2 + p_1(1 - p_2) + (1 - p_1)p_2}$$

(e) Simulujte:

*Řešení:*

```

from random import random

def toss(weights):
    """True = panna, False = Orel"""
    coins = [False] * len(weights)
    for i in range(len(weights)):
        coins[i] = random() < weights[i]
    return coins

N = 1000000
p1 = 0.1 # panna na první minci
p2 = 0.6 # panna na druhé minci

obe_panna = 0
prvni_je_panna = 0
aspon_jedna_panna = 0

for _ in range(N):
    coins = toss(weights=[p1, p2])
    if all(coins):
        obe_panna += 1
    if coins[0]:
        prvni_je_panna += 1
    if any(coins):
        aspon_jedna_panna += 1

pr_c_sim = obe_panna / prvni_je_panna
pr_c = p2

pr_d_sim = obe_panna / aspon_jedna_panna
pr_d = p1 * p2 / (p1 * p2 + p1 * (1 - p2) + (1 - p1) * p2)

print(f'Pr[obě panna|koruna panna] = {pr_c_sim} (= {pr_c})')
print(f'Pr[obě panna|aspoň jedna panna] = {pr_d_sim} (= {pr_d})')

# Možný výstup:
# Pr[obě panna|koruna panna] = 0.6017034618418556 (=0.6)
# Pr[obě panna|aspoň jedna panna] = 0.09411977858579801 (=0.09375)

```

3. Na louce rostou květiny, které mají buď bílé nebo červené květy. Náhodná květina má bílý květ s pravděpodobností  $\Pr[B] = 0.6$ , tedy pravděpodobnost že náhodná květina má červený květ je  $\Pr[C] = 0.4$ . Pravděpodobnost že červená květina je jedovatá je  $\Pr[J | C] = 0.25$ . Pravděpodobnost že bílá květina je jedovatá je  $\Pr[J | B] = 1/12$ . Snědli jsme náhodnou rostlinu a je nám zle, jaká je pravděpodobnost, že ta rostlina měla červený květ?

**Řešení:** Řešení 1 – použití Bayesovy věty (Věta 1) jako stroj:

- Máme  $\Omega$ , což je množina všech květin.
- Máme rozklad  $\Omega$  (víme, že kvetou buď bíle nebo červeně), tedy jevy  $B_1 = B, B_2 = C$ .
- Víme  $\Pr[J | C]$  i  $\Pr[J | B]$ .
- Zajímá nás  $\Pr[C | J]$ .
- Dosadíme do vzorce:

$$\begin{aligned} \Pr[C | J] &= \frac{\Pr[J | C] \Pr[C]}{\Pr[J | C] \Pr[C] + \Pr[J | B] \Pr[B]} \\ &= \frac{0.25 \cdot 0.4}{0.25 \cdot 0.4 + (1/12) \cdot 0.6} \\ &= 2/3 \end{aligned}$$

Řešení 2 – použijeme představivost a kreslíme:

- Necht' je na louce 100 kytek.
- Takže bílých je 60.
- Červených je 40.
- Jedovatých červených je 10.
- Jedovatých bílých je 5.
- Jedovatých je 15 (to je jmenovatel v Bayesově větě).
- Pravděpodobnost že kytky je červená když je jedovatá je  $10/15 = 2/3$ .

Pár poznámek:

- Čísla byla hezká, takže druhý postup je jednoduchý.
- Naprostá většina lidí nezvládá tento typ úlohy. Takže si nejlépe osvojte oba postupy. První je super pro počítač, druhý pro rychlý odhad.

Můžeme zkusit i naivní simulaci:

```
from enum import Enum
from random import random

def bernoulli(pr: float = 0.5) -> bool:
    return random() < pr

class Color(Enum):
    RED = 1
    WHITE = 2
```

```
class Plant:
    """Random plant."""
    def __init__(self):
        if bernoulli(0.6):
            self.color = Color.WHITE
            self.is_poisonous = bernoulli(1/12)
        else:
            self.color = Color.RED
            self.is_poisonous = bernoulli(0.25)

N = 1000000 # Pokusů
poisonous = 0 # Kolik jsme viděli jedovatých rostlin.
poisonous_red = 0 # Kolik z těch jedovatých bylo červených

for _ in range(N):
    p = Plant()
    if p.is_poisonous:
        poisonous += 1
        if p.color == Color.RED:
            poisonous_red += 1

assert poisonous > 0, "Pravděpodobnost Pr[A|B] není definovaná pokud Pr[B]=0"
print(f'Viděli jsme {poisonous_red} červených jedovatých rostlin')
print(f'z celkem {poisonous} jedovatých rostlin')
print(f'tedy Pr[červená|jedovatá] = {poisonous_red/poisonous} (= {2/3})')

# Možný výstup:
# Viděli jsme 100562 červených jedovatých rostlin
# z celkem 150617 jedovatých rostlin
# tedy Pr[červená|jedovatá] = 0.6676669964213867 (= 0.6666666666666666)
```

4. V první krabici je  $b$  bílých míčků a  $c$  červených míčků, ve druhé krabici také. Napřed vytáhneme jeden míček z první krabice (uniformně náhodně) a dáme ho do druhé krabice. Pak vytáhneme jeden míček z druhé krabice (uniformně náhodně). Jaká je pravděpodobnost, že míček vytažený z druhé krabice je červený?

(a) Navrhněte vhodný pravděpodobnostní prostor.

*Řešení:*

- *Množina elementárních jevů:*  $\Omega = \{B_1B_2, B_1C_2, C_1B_2, C_1C_2\}$  kde  $B_1B_2$  značí že jsme z první krabice vytáhli bílý míček (a dali ho do druhé krabice) a pak jsme z druhé krabice vytáhli bílý míček. . .
- *Prostor jevů:*  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ .
- *Pravděpodobnost:* znovu jen pro jednoprvkové jevy

$$\Pr[\{B_1B_2\}] = \left(\frac{b}{b+c}\right) \left(\frac{b+1}{b+1+c}\right)$$

$$\Pr[\{B_1C_2\}] = \left(\frac{b}{b+c}\right) \left(\frac{c}{b+1+c}\right)$$

$$\Pr[\{C_1B_2\}] = \left(\frac{c}{b+c}\right) \left(\frac{b}{b+1+c}\right)$$

$$\Pr[\{C_1C_2\}] = \left(\frac{c}{b+c}\right) \left(\frac{c+1}{b+1+c}\right)$$

(b) Spočítejte tu pravděpodobnost, kterou jsme chtěli.

*Řešení:* Použijeme podmíněnou pravděpodobnost (a projdeme možnosti, co se stane).

$$\begin{aligned} \Pr[2. \text{ červený}] &= \Pr[2. \text{ červený} \mid 1. \text{ bílý}] \Pr[1. \text{ bílý}] + \Pr[2. \text{ červený} \mid 1. \text{ červený}] \Pr[1. \text{ červený}] \\ &= \frac{c}{b+1+c} \frac{b}{b+c} + \frac{c+1}{b+1+c} \frac{c}{b+c} \\ &= \frac{bc}{(b+c)(b+1+c)} + \frac{c(c+1)}{(b+c)(b+1+c)} \\ &= \frac{c(b+c+1)}{(b+c)(b+1+c)} \\ &= \frac{c}{b+c} \end{aligned}$$

A to samé bychom dostali i přímo z rozepsání:

$$\begin{aligned} \Pr[\{B_1C_2, C_1C_2\}] &= \left(\frac{b}{b+c}\right) \left(\frac{c}{b+1+c}\right) + \left(\frac{c}{b+c}\right) \left(\frac{c+1}{b+1+c}\right) \\ &= \dots \\ &= \frac{c}{b+c} \end{aligned}$$

(c) Simulujte.

*Řešení:*

```
import random
```

```
bilych = 15
```



```
cervenych = 37

kbelik_1 = ['B'] * bilych + ['C'] * červenych
kbelik_2 = ['B'] * bilych + ['C'] * červenych

N = 1000000
cervenych_z_druheho = 0
for _ in range(N):
    druhy_kbelik = kbelik_2 + [random.choice(kbelik_1)]
    assert len(druh_y_kbelik) == 1 + len(kbelik_1)
    if random.choice(druh_y_kbelik) == 'C':
        červenych_z_druheho += 1

vysledek = červenych / (cervenych + bilych)
print(f'Nasimulovali jsme {cervenych_z_druheho/N} (={vysledek})')

# Možný výstup:
# Nasimulovali jsme 0.711212 (=0.7115384615384616)
```

5. Tento příklad je vymyšlený, zejména čísla nesedí a reálný svět je malinko složitější (tím se ještě budeme zabývat), ale informace v něm nejsou daleko od pravdy. V zemi nám řádí nemoc  $C$ .

- Prostor elementárních jevů (sample space)  $\Omega$  jsou všichni občané.
- Označíme  $C^+ \subseteq \Omega$  množinu všech lidí, kteří dnes mají aktivní nemoc  $C$ , označíme  $C^- = \Omega \setminus C^+$  zdravé lidi.
- Umíme uniformně náhodně samplovat lidi, tedy  $\forall \omega \in \Omega: \Pr[\{\omega\}] = 1/|\Omega|$  (tady  $\omega$  je jeden člověk).
- Test nám pro libovolného člověka odpoví že je člověk zdravý nebo nemocný. Značme  $T^+ \subseteq \Omega$  množinu lidí pro které test odpoví, že jsou nemocní. Značme  $T^- = \Omega \setminus T^+$  množinu lidí pro které test odpoví, že jsou zdraví. Ale není to tak jednoduché, v příbalovém letáku testu se píše:

– *Sensitivity*: (true positive)  $\Pr[T^+ | C^+] = 0.9$

– *Specificity*: (true negative)  $\Pr[T^- | C^-] = 0.8$

z tohoto můžeme odvodit chyby:

– False positive = false alarm = type I error

$$\Pr[T^+ | C^-] = 1 - \Pr[T^- | C^-] = 0.2$$

– False negative = miss = type II error

$$\Pr[T^- | C^+] = 1 - \Pr[T^+ | C^+] = 0.1$$

- Provedli jsme jeden test u každého z uniformně náhodně vybraných 50000 lidí a pozitivních testů vyšlo 1000. Tedy předpokládáme, že  $\Pr[T^+] = \frac{1000}{50000} = \frac{1}{50} = 0.02$  (jak moc je tento předpoklad oprávněný budeme zkoumat nadále).
- Zajímá nás  $\Pr[C^+]$  (vynásobeno 100 nám dá počet nemocných v procentech).

(a) V čem se toto liší od reality?

*Řešení:*

- Zejména v tom náhodném testování. Uvědomte si, že trasování nevybírá lidi náhodně. Ve skutečnosti je velmi těžké vybrat náhodného člověka (více o tom později).
- Sensitivita a specificita jsou opravdu důležité parametry testu (nezávisí na tom jaké je procento nemocných). Jejich výhoda je, že pokud známe četnost nemocí v populaci, pak můžeme pomocí Bayesovy věty spočítat pravděpodobnost, že náhodně vybraný člověk je nemocný, pokud test vyšel pozitivní. Pak se stejně dělá ještě další test, abychom si byli jistí (viz domácí úkol).
- Sensitivita a specificita se určují experimentálně, tedy je neznáme přesně (můžete zkusit v simulaci co to udělá).
- Milion komplikací při popisu skutečného světa, například nevíme na čem závisí pravděpodobnost chyby prvního nebo druhého druhu (třeba je pro danou krevní skupinu false positive pravděpodobnější...).

(b) Spočítejte  $\Pr[C^+]$ .

*Řešení:* Využijeme větu o úplné pravděpodobnosti: pokud  $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$  je rozklad  $\Omega$  (tedy  $B_1 \cap B_2 = \emptyset$  a navíc  $B_1 \cup B_2 = \Omega$ , připomeňme že věta platí i pro spočetný rozklad  $B_1, B_2, \dots$ ), pak pro libovolné  $A \in \mathcal{F}$  máme

$$\Pr[A] = \Pr[A | B_1] \Pr[B_1] + \Pr[A | B_2] \Pr[B_2]$$

Aplikujeme předchozí:

$$\begin{aligned}\Pr[T^+] &= \Pr[T^+ | C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ | C^-] \Pr[C^-] \\ &= \Pr[T^+ | C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ | C^-](1 - \Pr[C^+])\end{aligned}$$

přeuspořádáme

$$\begin{aligned}\Pr[T^+] &= \Pr[T^+ | C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ | C^-](1 - \Pr[C^+]) \\ \Pr[T^+] &= \Pr[T^+ | C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ | C^-] - \Pr[T^+ | C^-] \Pr[C^+] \\ \Pr[T^+] &= (\Pr[T^+ | C^+] - \Pr[T^+ | C^-]) \Pr[C^+] + \Pr[T^+ | C^-] \\ \Pr[C^+] &= \frac{\Pr[T^+] - \Pr[T^+ | C^-]}{\Pr[T^+ | C^+] - \Pr[T^+ | C^-]} \\ \Pr[C^+] &= \frac{0.02 - 0.2}{0.9 - 0.2} \\ \Pr[C^+] &\approx -0.257\end{aligned}$$

**(c) Co se stalo špatně?**

**Řešení:** Taková data bychom nečekali ani kdyby všichni byli zdraví (vyšlo nám příliš málo pozitivních).

Erratum:

- i. Původně bylo: Takže jsme rozhodně netestovali náhodný vzorek populace.
- ii. Problém tohoto vysvětlení: Ani kdybychom testovali jen zdravé lidi, tak by to nebylo dobré vysvětlení.
- iii. Lepší pokus o vysvětlení:
  - Možná, že parametry testu byly odhadnuty chybně.
  - Je možné, že laboratoř omylem poslala špatná data (například jeden laborant prohodil počet pozitivních a negativních výsledků u svých testů).
  - Je možné, že náhodou testy fungovaly mnohem lépe, než měly. Třeba jsme dostali várku nečekaně přesných testů. Speciálně není nemožné, že 20 hodů spravedlivou mincí nám dá 20 hlav, je to jen extrémně nepravděpodobné. Odhadem pravděpodobnosti takovéto chyby se budeme v rámci předmětu ještě zabývat.

**(d) Jak by vyšlo předchozí kdyby  $\Pr[T^+ | C^+] = 0.99, \Pr[T^- | C^-] = 0.98, \Pr[T^+] = 0.2$ ?**

**Řešení:**

$$\begin{aligned}\Pr[C^+] &= \frac{\Pr[T^+] - \Pr[T^+ | C^-]}{\Pr[T^+ | C^+] - \Pr[T^+ | C^-]} \\ &= \frac{0.2 - 0.02}{0.99 - 0.02} \\ &\approx 0.185\end{aligned}$$

Což dává smysl (je spíš pravděpodobné, že zdravého chybně označíme za nemocného než naopak).

**(e) Simulujte předchozí.**

**Řešení:**

```

from random import random

def bernoulli(pr: float = 0.5) -> bool:
    return random() < pr

class Human:
    """ _illness_probability is our unknown! """
    _illness_probability = 0.185

    """Random human."""
    def __init__(self):
        self.is_ill = bernoulli(Human._illness_probability)

class IllnessTest:
    sensitivity = 0.99 # = Pr[T+|C+]
    specificity = 0.98 # = Pr[T-|C-]

    def test(h: Human) -> bool:
        """Return True if the test says h is ill."""
        if h.is_ill:
            return bernoulli(IllnessTest.sensitivity)
        else:
            return not bernoulli(IllnessTest.specificity)

N = 50000 # Number of samples
false_positives = 0
true_positives = 0
ill_humans = 0

for _ in range(N):
    h = Human()
    if h.is_ill:
        ill_humans += 1
        if IllnessTest.test(h):
            # The test is positive and the human is ill.
            true_positives += 1
    else:
        if IllnessTest.test(h):
            # The test is positive and the human is healthy.
            false_positives += 1

pr_positive_test = (true_positives + false_positives) / N
pr_true_positive = true_positives / ill_humans
pr_false_positive = false_positives / (N - ill_humans)
illness_estimate = ((pr_positive_test - pr_false_positive)
                    / (pr_true_positive - pr_false_positive))

print(f'Pr[positive test]={pr_positive_test}')
print(f'Pr[false positive]={pr_false_positive} (={1-IllnessTest.specificity})')
print(f'Pr[true positive]={pr_true_positive} (={IllnessTest.sensitivity})')

```

```
print(f'Pr[nemoc]={illness_estimate} (={Human._illness_probability})')  
  
# Možný výstup:  
# Pr[positive test]=0.1976  
# Pr[false positive]=0.01945124938755512 (=0.020000000000000018)  
# Pr[true positive]=0.989760348583878 (=0.99)  
# Pr[nemoc]=0.1836 (=0.185)
```

6. V šuplíku mám  $b \in \mathbb{N}$  párů bílých,  $c \in \mathbb{N}$  párů černých ponožek a  $s \in \mathbb{N}$  párů sepraných ponožek. Potřebuju si vytáhnout čtyři páry černých ponožek (jedu na prodloužený víkend tancovat). Když vytáhnu čtyři náhodné páry ponožek (mám je napárované v šuplíku), jaká je pravděpodobnost, že všechny budou černé?

**Řešení:** Dle definice podmíněné pravděpodobnosti (Definice 2.2) můžeme napsat (která pravděpodobnost musí být nenulová?):

$$\begin{aligned}\Pr[A \cap B] &= \Pr[A] \Pr[B \mid A] \\ \Pr[A \cap B \cap C] &= \Pr[A] \Pr[B \mid A] \Pr[C \mid A \cap B]\end{aligned}$$

Tedy můžeme psát  $C_1, C_2, C_3, C_4$  jevy, že první, druhý, třetí, čtvrtý pár vytažených ponožek jsou černé.

$$\begin{aligned}\Pr[C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4] &= \Pr[C_1] \Pr[C_2 \mid C_1] \Pr[C_3 \mid C_1 \cap C_2] \Pr[C_4 \mid C_1 \cap C_2 \cap C_3] \\ &= \left(\frac{c}{b+c+s}\right) \left(\frac{c-1}{b+c-1+s}\right) \left(\frac{c-2}{b+c-2+s}\right) \left(\frac{c-3}{b+c-3+s}\right)\end{aligned}$$

Mohli bychom spočítat kolik je čtveřic černých ze všech čtveřic (ale předchozí postup bývá užitečný):

$$\Pr[C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4] = \frac{\binom{c}{4}}{\binom{b+c+s}{4}}$$

```
from random import sample
from scipy.special import comb

b = 10 # bílých ponožek
c = 15 # černých ponožek
s = 5  # sepraných ponožek

suplik = ['B'] * b + ['C'] * c + ['S'] * s

N = 1000000
cernych = 0
for _ in range(N):
    vyber = sample(suplik, k=4)
    if vyber == ['C'] * 4:
        cernych += 1

pr_vsechny_cerne = c*(c-1)*(c-2)*(c-3) / ((b+c+s)*(b+c-1+s)*(b+c-2+s)*(b+c-3+s))
print(f'Pr[4 cerne] = {cernych/N} ({pr_vsechny_cerne})')

pr_vsechny_cerne_komb_cislo = comb(c, 4, exact=True) / comb(b+c+s, 4, exact=True)
assert abs(pr_vsechny_cerne - pr_vsechny_cerne_komb_cislo) < 0.000001

# Možný výstup:
# Pr[4 cerne] = 0.049479 (=0.04980842911877394)
```

### 3.3 Cvičení

1. Rozmysleme si, proč nezávislost více jevů není to samé jako nezávislost po dvou.

(a) Najděte jevy  $A, B, C$  takové, že jevy jsou po dvou nezávislé, ale  $\Pr[A \cap B \cap C] \neq \Pr[A] \Pr[B] \Pr[C]$ .

**Řešení:** Mějme pravděpodobnostní prostor hod dvěma spravedlivými mincemi  $\Omega = \{HH, HO, OH, OO\}$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\Pr[HH] = \Pr[HO] = \Pr[OH] = \Pr[OO] = 1/4$ . Mějme jevy

$$A = \{HH, HO\}$$

$$B = \{HH, OH\}$$

$$C = \{HO, OH\}$$

tedy

$$\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[C] = 1/2$$

Ty jsou po dvou nezávislé:

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[\{HH\}] = 1/4$$

$$\Pr[A \cap C] = \Pr[\{HO\}] = 1/4$$

$$\Pr[B \cap C] = \Pr[\{OH\}] = 1/4$$

Ale

$$\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[\emptyset] = 0 \neq 1/8 = \Pr[A] \Pr[B] \Pr[C]$$

(b) Najděte jevy  $A, B, C$  takové, že  $\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \Pr[B] \Pr[C]$ , ale jevy nejsou po dvou nezávislé.

**Řešení:** Jedno z možných řešení: Uvažme pravděpodobnostní prostor s elementárními jevy  $\Omega = \{a, b, c, z\}$  a jevy  $A = \{a, z\}$ ,  $B = \{b, z\}$ ,  $C = \{c, z\}$ . Necht'  $\Pr[\{a\}] = \Pr[\{b\}] = \Pr[\{c\}] = p$  a  $\Pr[\{z\}] = q$ . Aby bylo  $\Pr[\Omega] = 1$ , musí platit  $3p + q = 1$ , tedy  $q = 1 - 3p$ . Pak máme  $\Pr[A] = \Pr[B] = \Pr[C] = p + q = 1 - 2p$ .

Chceme, aby jevy byly po třech nezávislé, tedy  $\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \Pr[B] \Pr[C]$ . Průnik všech tří obsahuje jenom  $z$ , takže má pravděpodobnost  $q$ , všechny tři jevy na pravé straně mají pravděpodobnost  $1 - 2p$ . Takže musí platit  $q = (1 - 2p)^3$ , tedy  $1 - 3p = (1 - 2p)^3$ . To je kubická rovnice s jedním kořenem v intervalu  $(0, 1)$ , konkrétně

$$q = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} \doteq 0.317.$$

Z toho dostaneme  $p = 1 - 3q \doteq 0.049$ . Máme tedy  $A, B, C$  po třech nezávislé.

Jak je to s nezávislostí po dvou? Průniky dvojic obsahují zase jenom  $z$ , takže by muselo platit  $q = (1 - 2p)^2$ , tedy  $1 - 3p = (1 - 2p)^2$ . Ale jelikož  $1 - 3p$  je už rovno  $(1 - 2p)^3$ , nemůže to být současně  $(1 - 2p)^2$ , leda by bylo  $1 - 2p = 1$ , čili  $p = 0$ .

## 2. Házíte dvěma rozlišitelnými kostkami.

## (a) Určete vhodný pravděpodobnostní prostor.

*Řešení:*

- Množina elementárních jevů  $\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, \dots, 66\}$  ( $|\Omega| = 36$ ).
- Prostor jevů  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ .
- Pravděpodobnost je pro každý elementární jev stejná, tedy  $\Pr[\{xy\}] = 1/36$  kde  $x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

## (b) Spočítejte pravděpodobnost, že aspoň na jedné kostce padla šestka, když víte jaký součet padl.

*Řešení:* Zajímá nás

$$\Pr[\{xy\} \mid x + y = k] \quad (\text{kde } x, y \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, k \in \{2, 3, \dots, 12\})$$

Napřed zkusme jen chvíli přemýšlet, například pokud  $k = 2$ , tak určitě víme, že ani na jedné kostce nepadla šestka (protože bychom dostali součet aspoň sedm). Takže už víme

$$\Pr[\{xy\} \mid x + y = 2] = \Pr[\{xy\} \mid x + y = 3] = \dots = \Pr[\{xy\} \mid x + y = 6] = 0$$

Pokud bychom na to šli z druhé strany, tak pokud součet je aspoň jedenáct, tak určitě aspoň na jedné kostce padla šestka (součet deset jde získat jako součet dvou pětěk).

$$\Pr[\{xy\} \mid x + y = 12] = \Pr[\{xy\} \mid x + y = 11] = 1$$

Jak tedy dopadne pravděpodobnost, když součet je deset? Označme si jev

$$D = \{46, 55, 64\}$$

kdy padl součet deset. Označme si jev aspoň jedna šestka

$$S = \{16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65\}.$$

$$\begin{aligned} \Pr[S \mid D] &= \frac{\Pr[S \cap D]}{\Pr[D]} \\ &= \frac{\Pr[\{46, 64\}]}{\Pr[\{46, 55, 64\}]} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Obdobně bychom mohli spočítat zbytek. Tohle je spíš práce pro počítač (takhle malý pravděpodobnostní prostor můžeme probrat celý).

```
# soucet[k] = kolikrát jsme viděli součet k
soucet = [0] * 13
# sestek[k] = kolikrát jsme viděli aspoň jednu šestku, když součet byl k
sestek = [0] * 13

for i in range(1, 7):
    for j in range(1, 7):
        soucet[i + j] += 1
```



```

        if (i == 6) or (j == 6):
            sestek[i + j] += 1

for s in range(2, 13):
    print(f'Pr[aspoň jedna šestka | součet = {s}] = {sestek[s]}/{soucet[s]}')

# Výstup:
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 2] = 0/1
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 3] = 0/2
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 4] = 0/3
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 5] = 0/4
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 6] = 0/5
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 7] = 2/6
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 8] = 2/5
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 9] = 2/4
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 10] = 2/3
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 11] = 2/2
# Pr[aspoň jedna šestka | součet = 12] = 1/1

```

Mohli bychom i simulovat i přesně počítat pomocí jazyka R, skript napsal Robert Šámal:

```

---
title: "cvici-simulace kostek"
output:
  pdf_document: default
  html_notebook: default
---

# Simulace

Napřed jednoduché hrátky s házením jednou kostkou.
Příkaz sample vrací datový typ vector, s tím se dá vektorově pracovat.

```{r}
N=10
kostka = sample(1:6, N, replace=TRUE)
kostka
#2*kostka
#kostka==1
#sum(kostka==1)
#kostka[c(1,2,3,4)]
#kostka[kostka<=3]
#sum(kostka==1)+sum(kostka==2)+sum(kostka==3)+sum(kostka==4)+sum(kostka==5)+sum(kostka==6)
```

A teď se dostáváme k simulaci domácího úkolu s kostkami.
Všimněte si, jak podmíněná pravděpodobnost znamená vlastně to,
že se omezíme (v čitateli i ve jmenovateli) na ty souřadnice, kde platí podmiňující jev.

```{r}
N = 10^4

kostka1 = sample(1:6, N, replace=TRUE)
kostka2 = sample(1:6, N, replace=TRUE)
soucet = kostka1 + kostka2

```

```

SD = soucet==10
PS = kostka1==6
NS = kostka1==6 | kostka2==6

cat("\nP(SD)=", sum(SD)/N)
cat("\nP(PS)=", sum(PS)/N)
cat("\nP(NS)=", sum(NS)/N)

cat("\nP(PS|SD)=", sum(PS & SD)/sum(SD))
cat("\nP(NS|SD)=", sum(NS & SD)/sum(SD))
cat("\nP(PS|NS)=", sum(PS & NS)/sum(NS))
cat("\nP(SD|NS)=", sum(SD & NS)/sum(NS))
cat("\nP(NS|PS)=", sum(NS & PS)/sum(PS))
cat("\nP(SD|PS)=", sum(SD & PS)/sum(PS))
cat("\n")
c(6/11, 1/6, 1/12, 1/3, 2/3, 2/11,11/36)
...

# Projití celého pravděpodobnostního prostoru

Funguje jen pro malé prostory, jinak trvá moc dlouho!

```{r}
Omega = expand.grid(k1=1:6,k2=1:6)
kostka1 = Omega$k1; kostka1
kostka2 = Omega$k2; kostka2
soucet = kostka1 + kostka2
N = length(kostka1)
SD = soucet==10

Omega$soucet = soucet
Omega$SD = SD
Omega

SD
PS = kostka1==6
NS = kostka1==6 | kostka2==6

cat("\nP(SD)=", sum(SD)/N)
cat("\nP(PS)=", sum(PS)/N)
cat("\nP(NS)=", sum(NS)/N)

cat("\nP(PS|SD)=", sum(PS & SD)/sum(SD))
cat("\nP(NS|SD)=", sum(NS & SD)/sum(SD))
cat("\nP(PS|NS)=", sum(PS & NS)/sum(NS))
cat("\nP(SD|NS)=", sum(SD & NS)/sum(NS))
cat("\nP(NS|PS)=", sum(NS & PS)/sum(PS))
cat("\nP(SD|PS)=", sum(SD & PS)/sum(PS))
cat("\n")
...

```

3. V truhle je sto mincí. Z nich 99 je normálních, ale jedna má na obou stranách orla.

(a) Určete vhodný pravděpodobnostní prostor.

*Řešení:*

- Množina elementárních jevů (mince jsou očíslované):

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} 1 - HHHHHH, \\ 1 - HHHHHO, \\ \dots \\ 1 - OOOOOO, \\ 2 - HHHHHH, \\ \dots \\ 99 - HHHHHH, \\ \dots \\ 99 - OOOOOO, \\ 100 - OOOOOO \end{array} \right\}$$

- Prostor jevů  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ .
- Pravděpodobnost vytažení každé mince je stejná. Pravděpodobnost že spravedlivou mincí naházíme něco je stejná jako že s ní naházíme něco jiného.

$$\Pr[j - ABCDEF] = \frac{1}{100 \cdot 2^6}$$

(pro každé  $1 \leq j \leq 99$ ,  $A, B, C, D, E, F \in \{H, O\}$ )

$$\Pr[100 - OOOOOO] = \frac{1}{100}$$

(b) Vytáhneme náhodnou minci a šestkrát s ní hodíme, pokaždé padne orel. Jaká je pravděpodobnost, že jsme si vytáhli dvourlovou minci? (Zkuste napřed odhadnout, pak spočítat.)

*Řešení:* Značme

$$O_2 = \{100 - OOOOOO\}$$

$$O_6 = \{1 - OOOOOO, 2 - OOOOOO, \dots, 100 - OOOOOO\}$$

pak píšeme

$$\begin{aligned} \Pr[\text{dvourlová} \mid \text{šest orlů}] &= \Pr[O_2 \mid O_6] \\ &= \frac{\Pr[O_2 \cap O_6]}{\Pr[O_6]} \\ &= \frac{\Pr[O_2]}{\Pr[O_6]} \\ &= \frac{\frac{1}{100}}{99 \frac{1}{100 \cdot 2^6} + \frac{1}{100}} \\ &\approx 0.3826 \end{aligned}$$

(c) Simulujte.

*Řešení:*

```
from random import choice
from random import choices

class FairCoin:
    dvou_orlova = False
    def toss(self):
        return choices([True, False], k=6)

class DvouOrlova:
    dvou_orlova = True
    def toss(self):
        return [True] * 6

mince = [FairCoin()] * 99 + [DvouOrlova()]

N = 10000000
sest_orlu = 0
dvouorlovych = 0

for _ in range(N):
    m = choice(mince)
    if all(m.toss()):
        sest_orlu += 1
        if m.dvou_orlova:
            dvouorlovych += 1

exact = 0.01 / (0.01 + 0.99*2**(-6))
print(f'Pr[dvouorlova|000000] = {dvouorlovych/sest_orlu} (={exact})')

# Možný výstup:
# Pr[dvouorlova|000000] = 0.3895867899186221 (=0.39263803680981596)
```

4. Připomeňme co je náhodná veličina a její střední hodnota.

*Řešení:* Například objem alkoholu.

```

from random import choice

alcohol_content = {
    "světlé pivo" : 0.045 * 0.5, # 4,5% 0.5 litru
    "tmavé pivo" : 0.04 * 0.5, # 4% 0.5 litru
    "slivovice" : 0.51 * 0.04, # 51% 0.04 litru
    "bílé víno" : 0.11 * 0.2, # 11% 0.2 litru
    "červené víno" : 0.11 * 0.2, # 11% 0.2 litru
    "čaj" : 0.52 * 0.04, # 52% 0.04 litru
}

def drink():
    # Vrací jeden elementární jev z Omega.
    return choice(list(alcohol_content.keys()))

def X(drink):
    # Vrací objem vypitého alkoholu v litrech.
    # X: Omega -> R
    return alcohol_content[drink]

N = 100
alkohol = 0.0
for _ in range(N):
    alkohol += X(drink())

EX = sum(alcohol_content.values()) / len(alcohol_content)

print(f'Střední hodnota objemu alkoholu v jednom drinku je {alkohol / N} (= {EX})')

# Možný výstup:
# E[alkohol] je 0.02108899999999999 (= 0.021283333333333335)

```

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in \text{Im}(x)} x \Pr[X = x] \\
 &= \sum_{x \in \text{Im}(x)} x \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}] \\
 &= 0.0225 \Pr[\{\text{světlé pivo}\}] \\
 &\quad + 0.02 \Pr[\{\text{tmavé pivo}\}] \\
 &\quad + 0.0204 \Pr[\{\text{slivovice}\}] \\
 &\quad + 0.022 \Pr[\{\text{červené víno, bílé víno}\}] \\
 &\quad + 0.0208 \Pr[\{\text{čaj}\}]
 \end{aligned}$$

Co kdyby pravděpodobnost kostky nebyla uniformní?

**Řešení:** Vzorec se nemění, akorát se mění pravděpodobnost jevů  $\Pr[X = x]$ .

5. Na stole jsou dvě obálky, v jedné je  $k$  korun, ve druhé  $\ell$  korun ( $k, \ell \in \mathbb{N}$ ). Můžete otevřít jednu obálku a na základě sumy v ní se rozhodnout jestli si necháte tu otevřenou nebo si vezmete tu druhou (nehledě na to, kolik je v té druhé). Umíte vymyslet způsob jak odejít s tou s větším obnosem s pravděpodobností ostře větší než jedna polovina? Určete střední hodnotu výhry.

**Řešení:** Uniformně náhodně zvolíme první obálku. Pokud vidíme  $m$  korun, pak házíme spravedlivou mincí, dokud nepadne hlava. Pokud celkový počet hodů je ostře menší než  $m$ , pak si obálku necháme, jinak si vezmeme tu druhou. Když  $k < \ell$  tak pravděpodobnost, že vyměníme obálku s  $k$  korunami je ostře větší než pravděpodobnost, že vyměníme obálku s  $\ell$  korunami.

Vzpomeňte na geometrické rozdělení z minulého cvičení. Pravděpodobnost, že odejdou s  $k$  korunami je

$$\begin{aligned} \Pr[\text{dostanu } k \text{ Kč}] &= \frac{1}{2}(1 - 0.5^{k-1}) + \frac{1}{2}0.5^{\ell-1} \\ &= \frac{1}{2} - 0.5^k + 0.5^\ell \\ &= \frac{1}{2} + (0.5^\ell - 0.5^k) \end{aligned}$$

Střední hodnota výhry

$$\mathbb{E}[\text{win}] = k \left( \frac{1}{2} + (0.5^\ell - 0.5^k) \right) + \ell \left( \frac{1}{2} + (0.5^k - 0.5^\ell) \right)$$

```
from random import randint
from random import random
```

```
def geometric(pr: float = 0.5) -> int:
    """pr is success probability, return the number of tosses until
    the first success."""
    assert pr > 0
    sample = 1
    fail_pr = 1 - pr
    while random() < fail_pr:
        sample += 1
    return sample

# Our unknown amounts.
envelopes = [5, 10]

N = 1000000 # Number of samples.
total_amount = 0 # Total sum that we got during all samples.
got_larger = 0 # Number of times we walked away with the larger sum.

for _ in range(N):
    # Pick the first envelope at random.
    chosen = randint(0, 1)
    if geometric() < envelopes[chosen]:
        # Keep this one.
        pass
    else:
```

```
        # Choose the other.
        chosen = 1 - chosen
    if envelopes[chosen] >= envelopes[1 - chosen]:
        got_larger += 1
    total_amount += envelopes[chosen]

print(f'Pr[selected larger] = {got_larger / N}')
print(f'E[win] = {total_amount / N}')

# Possible outcome:
# Pr[selected larger] = 0.530087
# E[win] = 7.650435
```



## 6. Spočítejte střední počet porovnání quick-sortu:

```

from random import randint

def partition(arr, begin, end):
    pivot_i = randint(begin, end - 1)
    (arr[pivot_i], arr[end-1]) = (arr[end-1], arr[pivot_i])
    pivot = arr[end - 1]
    i = begin
    for j in range(begin, end):
        if arr[j] < pivot:
            (arr[i], arr[j]) = (arr[j], arr[i])
            i += 1
    (arr[i], arr[end-1]) = (arr[end-1], arr[i])
    return i

def quick_sort(arr, begin, end):
    if end <= begin:
        return
    p = partition(arr, begin, end)
    quick_sort(arr, begin, p)
    quick_sort(arr, p+1, end)

```

- (a) Uvědomte si, že každá dvě čísla porovnáte nejvýš jednou (pokud se žádné číslo neopakuje). Pro jednoduchost budeme předpokládat, že se čísla neopakují (jinak bychom museli mluvit o jejich pozici v utříděném poli).
- (b) Vytvořte vhodný pravděpodobnostní prostor.

**Řešení:** Tohle je příklad ne příliš pěkného pravděpodobnostního prostoru. Uvidíte, že daleko lépe se bude pracovat s náhodnými proměnnými.

Ale běh algoritmu je dán permutací na vstupu a volbami pivotů. Tedy například můžeme vzít jako jeden elementární jev vstupní permutaci a stack-trace algoritmu (na které intervaly se rekurzí a jaké pivoty se volí).

Prostor jevů bude potenční množina (množina elementárních jevů je konečná).

Navrhnout pravděpodobnost není tak jednoduché (zkuste). Počítat s ní není nic moc příjemného.

I kdybychom si uvědomili, že doba běhu naší implementace nezávisí na vstupní permutaci (místo výběru pivota někde bychom ho vybrali jinde), tak tento pravděpodobnostní prostor není žádný med.

- (c) Definujte náhodnou proměnnou určující počet porovnaných dvojic, vyjádřete ji jako součet jednodušších a použijte větu o linearitě střední hodnoty.

**Řešení:** Zajímá nás střední hodnota  $C$ , což je počet porovnání. Každé dva prvky výsledku potenciálně mohou být porovnány. Tedy volme  $C_{i,j}$  náhodnou proměnnou, která je rovna jedné pokud  $i$ -té nejmenší číslo je porovnáno s  $j$ -tým nejmenším číslem (kde bereme  $1 \leq i < j \leq n$ ) a nule jinak. Takovým  $C_{i,j}$  říkáme *indikátorová proměnná*.

Uvědomme si, že pokud nějaké  $k$ -té nejmenší číslo kde  $i < k < j$  je zvoleno jako pivot před tím, než se pivotem stane  $i$  nebo  $j$ , tak  $C_{i,j} = 0$ , ale jinak je rovna jedné. Tedy

můžeme psát

$$\Pr[C_{i,j} = 1] = \frac{2}{j-i+1}$$

Nás zajímá střední hodnota

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C_{i,j}] &= 1 \cdot \frac{2}{j-i+1} + 0 \cdot \left(1 - \frac{2}{j-i+1}\right) \\ &= \frac{2}{j-i+1} \end{aligned}$$

Ve skutečnosti nás ale zajímá střední hodnota počtu všech porovnání

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n C_{i,j}\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbb{E}[C_{i,j}] && \text{(linearita střední hodnoty)} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{d=1}^{n-i} \frac{2}{d+1} && (d = j - i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} 2(H_{n-i+1} - 1) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} 2 \ln(n) \\ &= 2n \ln(n) \end{aligned}$$

(d) S jakou pravděpodobností provede quick-sort aspoň  $10n \ln(n)$  porovnání?

- Sčítáme  $n$  kladných reálných čísel  $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, \infty)$ . Víme, že

$$\sum_{i=1}^n a_i = S$$

Pro kolik z těch čísel platí  $a_j \geq 5S/n$ ?

**Řešení:** Nejvýš pro  $n/5$  z těch čísel. I kdyby ostatní byla nulová a tato velká byla přesně tolik, pak  $(n/5)(5S/n) = S$ .

- Co kdybychom ta čísla sčítali váženě? Tedy formálně: mějme náhodnou proměnnou o které víme  $\Pr[X = j]$  pro  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$  (kde pro jednoduchost předpokládáme  $\sum_{j=1}^m \Pr[X = j] = 1$ , tedy že  $X$  má hodnoty  $1, 2, \dots, m$ ). Víme  $\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^m j \Pr[X = j] = S$ . Jaká je pravděpodobnost  $\Pr[X \geq 5S]$ ?

**Řešení:** Obdobně

$$S = \mathbb{E}[X]$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^m j \Pr[X = j] && \text{(protože } \text{Im}(X) = \{1, 2, \dots, m\}\text{)} \\ &\geq \sum_{j=5S}^m j \Pr[X = j] \\ &\geq \sum_{j=5S}^m 5S \Pr[X = j] \\ &= 5S \Pr[X \geq 5S] \end{aligned}$$

tedy

$$\Pr[X \geq 5S] \leq 1/5$$

- Gratuluji, vymysleli jste Markovovu nerovnost.
- Často bývá mnohem jednodušší použít Markovovu nerovnost než přímo počítat pravděpodobnost. Občas můžeme dostat i silnější odhady pomocí Čebyševovy nebo Černovovy nerovnosti. Na to budeme potřebovat rozptyl a další znalosti o náhodných proměnných.

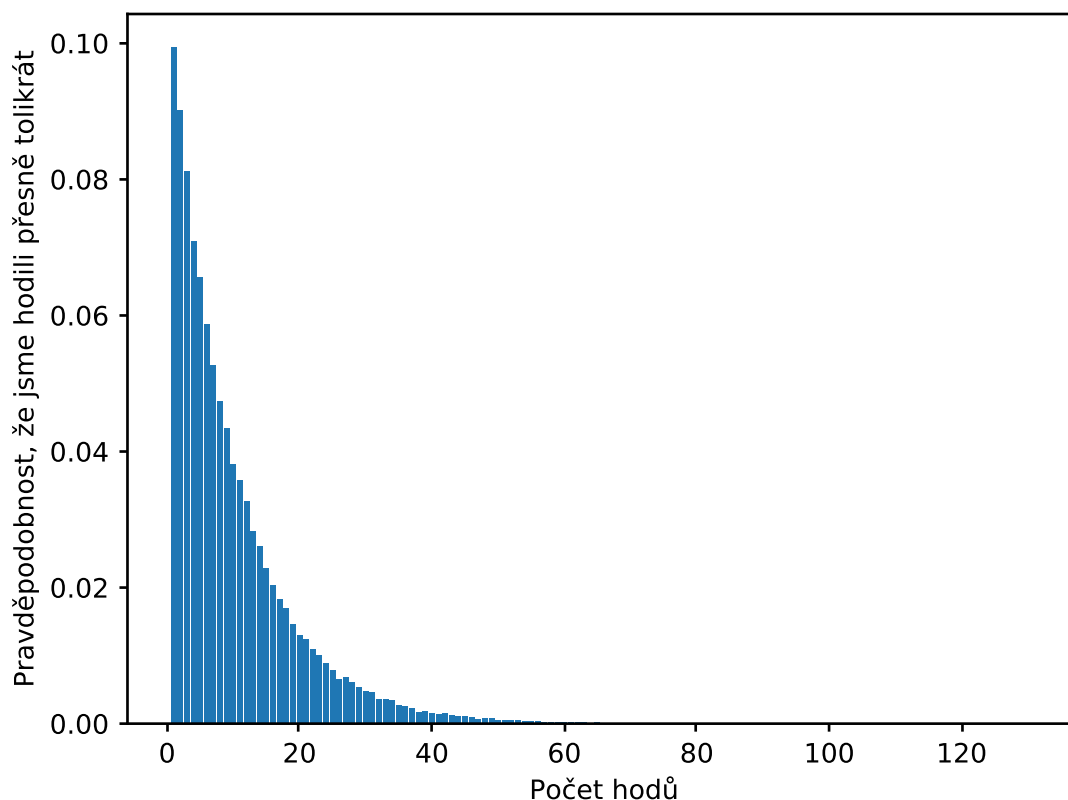
### 3.4 Cvičení

1. Házím míčem na koš. V každém pokusu mám pravděpodobnost  $p$  že se trefím (jednotlivé hody jsou nezávislé). Skončím po prvním zásahu. Označme  $X$  celkový počet hodů.

(a) Jaké je pravděpodobnostní rozdělení  $X$  (tj. distribuce)? Jinak řečeno určete pravděpodobnostní funkci  $p_X$  (tj. pro každé  $x$  určete  $p_X(x) = \Pr[X = x]$ ).

**Řešení:** Je to geometrická distribuce, tedy  $n - 1$  hodů musí jít vedle a poslední se musí podařit.

$$p_X(n) = (1 - p)^{n-1}p$$



Obrázek 3.1: Histogram s jakou pravděpodobností jsme udělali právě tolik hodů.

(b) Jaká je  $\Pr[X \geq 10 \mid X \geq 5]$ ?

**Řešení:** Můžeme si rozepsat na disjunktní jevy:

$$\begin{aligned} \Pr[X \geq 10 \mid X \geq 5] &= \frac{\Pr[X \geq 10 \text{ a zároveň } X \geq 5]}{\Pr[X \geq 5]} \\ &= \frac{\Pr[X \geq 10]}{\Pr[X \geq 5]} \\ &= \frac{\sum_{j=10}^{\infty} p(1-p)^j}{\sum_{j=5}^{\infty} p(1-p)^j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1-p)^{10}/p}{(1-p)^5/p} \\
 &= (1-p)^5
 \end{aligned}$$

(c) Jaká je  $\mathbb{E}[X]$ ?

*Řešení:* Na přednášce bylo  $\mathbb{E}[X] = 1/p$ .

(d) Jaká je  $\mathbb{E}[X \mid X \text{ je sudé}]$ ?

*Řešení:*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X \mid X \text{ je sudé}] &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \Pr[X = x \mid X \text{ je sudé}] \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} (2j) \Pr[X = 2j]
 \end{aligned}$$

(e) Simulujte.

*Řešení:*

```

import matplotlib.pyplot as plt
from collections import Counter
from random import random

def geometric(pr: float = 0.5) -> int:
    """pr is success probability, return the number of tosses until
    the first success."""
    assert pr > 0
    sample = 1
    fail_pr = 1 - pr
    while random() < fail_pr:
        sample += 1
    return sample

N = 100000

# a)
cnt = Counter(geometric(0.1) for _ in range(N))
distribution = {}
for c in cnt:
    distribution[c] = cnt[c] / N

plt.bar(distribution.keys(), distribution.values())
plt.xlabel("Počet hodů")
plt.ylabel("Pravděpodobnost, že jsme hodili přesně tolikrát")
# plt.show()
plt.savefig('lemma_o_dzbanu.pdf')

# b)

```

```
p = 0.1
geq5 = 0
geq10_when_geq5 = 0
for _ in range(N):
    res = geometric(p)
    if res >= 5:
        geq5 += 1
        if res >= 10:
            geq10_when_geq5 += 1
print(f'Pr[X>=10 | X>=5] = {geq10_when_geq5/geq5} (={(1-p)**5})')

# c)
print(f'E[X] = {sum(geometric(p) for _ in range(N)) / N} (={1/p})')

# Možný výstup:
# Pr[X>=10 | X>=5] = 0.5907960009158209 (=0.5904900000000001)
# E[X] = 10.01754 (=10.0)
```

2. V testu je 20 otázek s volbami a,b,c,d. Za správnou odpověď (vždy je jen jedna odpověď správná) je 1 bod, za špatnou  $-1/4$  bodu, za nevyplněnou otázku nula. Každá otázka je s pravděpodobností  $p$  jednou z těch, co se Kvído naučil a tedy zná správnou odpověď. Pokud správnou odpověď nezná, ví o tom, a může se rozhodnout, zda tipovat.

- (a) Jaká je střední hodnota počtu bodů, které Kvído získá, pokud bude odpovídat jenom otázky, u kterých zná odpověď?

**Řešení:** Odpověď na otázku  $j$  zná s pravděpodobností  $p$ . Označme tedy náhodnou veličinu  $X_j$  počet bodů za  $j$ -tou otázku. Z linearity střední hodnoty:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{počet bodů, netipuje}] &= \sum_{j=1}^{20} \mathbb{E}[X_j] \\ &= \sum_{j=1}^{20} p \\ &= 20p\end{aligned}$$

- (b) A co když bude tipovat, když nezná správnou odpověď?

**Řešení:** S pravděpodobností  $p$  prostě zná odpověď. Pokud nezná a tipne, pak s pravděpodobností  $1/4$  dostane bod, s pravděpodobností  $3/4$  ztratí  $1/4$  bodu. Pravděpodobnost, že dostane jeden bod tedy je

$$\Pr[Y_j = 1] = p + (1 - p)/4 = (1 + 3p)/4$$

a pravděpodobnost, že ztratí čtvrtbod

$$\Pr[Y_j = -1/4] = (1 - p)3/4 = (3 - 3p)/4$$

Označíme  $Y_j$  počet bodů za  $j$ -tou otázku, když tipuje a použijeme linearitu střední hodnoty. Tedy můžeme psát

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{počet bodů, tipuje}] &= \sum_{j=1}^{20} 1(1 + 3p)/4 + (-1/4)(3 - 3p)/4 \\ &= 20(1(1 + 3p)/4 + (-1/4)(3 - 3p)/4) \\ &= 20\left(\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{16}\right) + p\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{16}\right)\right)\end{aligned}$$

- (c) Jak by se musela změnit penalizace za chybnou odpověď, aby byly odpovědi v částech a, b stejné?

**Řešení:** Potřebovali bychom, aby  $\mathbb{E}[X_j] = \mathbb{E}[Y_j]$  (pro každé  $p$ ). Jinak řečeno střední hodnota tipu je nulová ( $m$  je penalizace, tedy bodová ztráta):

$$\begin{aligned}0 &= 1/4 - m3/4 \\ m &= 1/3\end{aligned}$$

- (d) Simulujte.

**Řešení:**

```

from random import random

def bernoulli(pr: float = 0.5) -> bool:
    return random() < pr

def one_question(p: float, guess: bool, m: float = 1/4) -> float:
    """ Knows the answer with probability p. Return points. """
    if random() < p:
        # Knows the answer
        return 1
    else:
        if not guess:
            return 0
        if random() < 0.25:
            # Guessed the correct answer
            return 1
        else:
            return -m

def test(p: float, guess: bool, m: float = 1/4) -> float:
    return sum(one_question(p=p, guess=guess, m=m) for _ in range(20))

def student(p):
    N = 100000
    print(f'p = {p}')
    # a) netipuje
    netipuje_sim = sum(test(p, False) for _ in range(N)) / N
    print(f'E[bodů netipuje] = {netipuje_sim} (=20 * p)')
    # b) tipuje
    with_guess = 20 * ((1/4 - 3/16) + p * (3/4 + 3/16))
    tipuje_sim = sum(test(p, True) for _ in range(N)) / N
    print(f'E[bodů tipuje] = {tipuje_sim} (=with_guess)')
    # c) spravedlivý test
    tipuje_spravedlivy_sim = sum(test(p, True, m=1/3) for _ in range(N)) / N
    print(f'E[bodů ve "spravedlivém" testu] = {tipuje_spravedlivy_sim} (=20 * p)')

for p in [0.0, 0.2, 0.8, 1.0]:
    student(p)

# Možný výstup:
# p = 0.0
# E[bodů netipuje] = 0.0 (=0.0)
# E[bodů tipuje] = 1.254 (=1.25)
# E[bodů ve "spravedlivém" testu] = -0.009413333333333343 (=0.0)
# p = 0.2
# E[bodů netipuje] = 3.9956 (=4.0)
# E[bodů tipuje] = 5.0054 (=5.0)
# E[bodů ve "spravedlivém" testu] = 4.0109466666666663 (=4.0)
# p = 0.8

```



```
# E[bodů netipuje] = 16.0001 (=16.0)
# E[bodů tipuje] = 16.249 (=16.25)
# E[bodů ve "spravedlivém" testu] = 16.00237333333326 (=16.0)
# p = 1.0
# E[bodů netipuje] = 20.0 (=20.0)
# E[bodů tipuje] = 20.0 (=20.0)
# E[bodů ve "spravedlivém" testu] = 20.0 (=20.0)
```

3. Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme  $X$  počet vytažených es,  $Y$  počet králů. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci  $p_{X,Y}$  a také marginální psní funkce  $p_X, p_Y$ .

**Řešení:** Z 52 karet jsou tam 4 esové karty a 4 králové (ani jeden král není eso, ani naopak). Náhodné veličiny  $X, Y$  mohou nabývat hodnot 0, 1, 2. Ale tím, že vytáhneme jen dvě karty, tak musí platit  $X + Y \leq 2$ .

$$p_{X,Y}(0,0) = \frac{44}{52} \cdot \frac{43}{51}$$

$$p_{X,Y}(1,0) = \frac{4}{52} \cdot \frac{44}{51} + \frac{44}{52} \cdot \frac{4}{51} \text{ vytáhnou eso jako první nebo druhé}$$

$$p_{X,Y}(0,1) = 2 \frac{4}{52} \cdot \frac{44}{51}$$

$$p_{X,Y}(2,0) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

$$p_{X,Y}(1,1) = 2 \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \text{ záleží na pořadí – napřed eso, pak král nebo naopak}$$

$$p_{X,Y}(0,2) = \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51}$$

$$p_{X,Y}(x,y) = 0 \text{ jinak}$$

Z definice

$$\begin{aligned} p_X(x) &= \sum_{y \in \text{Im}(Y)} p_{X,Y}(x,y) \\ &= p_{X,Y}(x,0) + p_{X,Y}(x,1) + p_{X,Y}(x,2) \end{aligned}$$

Mělo by nám vyjít:

$$\begin{aligned} p_X(0) &= \frac{48}{52} \cdot \frac{47}{51} \\ &= \frac{2256}{2652} \\ &= p_{X,Y}(0,0) + p_{X,Y}(0,1) + p_{X,Y}(0,2) \\ &= \frac{44}{52} \cdot \frac{43}{51} + 2 \frac{4}{52} \cdot \frac{44}{51} + \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \\ &= \frac{44 \cdot 43 + 8 \cdot 44 + 12}{52 \cdot 51} \\ &= \frac{2256}{2652} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_X(1) &= \frac{4}{52} \cdot \frac{48}{51} + \frac{48}{52} \cdot \frac{4}{51} \text{ vytáhnou eso jako první nebo druhé} \\ &= \frac{384}{2652} \\ &= p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,1) + p_{X,Y}(1,2) \\ &= p_{X,Y}(1,0) + p_{X,Y}(1,1) + 0 \\ &= 2 \frac{4}{52} \cdot \frac{44}{51} + 2 \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \\ &= \frac{384}{2652} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_X(2) &= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \\ &= p_{X,Y}(2,0) + p_{X,Y}(2,1) + p_{X,Y}(2,2) \\ &= p_{X,Y}(2,0) + 0 + 0 \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \end{aligned}$$

4. Chceme nasbírat všechny z  $n$  druhů kuponů. Můžeme si koupit jeden kupon, který má uniformně náhodný druh. Kolikrát musíme koupit kupon, než posbíráme všechny?

(a) Jaká je střední hodnota počtu koupených kuponů, než nasbíráme všechny?

**Řešení:** Označme náhodnou veličinu  $t_i$ , která říká kolik musíme koupit kuponů, abychom získali  $i$ -tý druh když už máme  $i - 1$  druhů. Pravděpodobnost, že ten další kupon bude nového druhu je:

$$\Pr[\text{dostaneme nový druh, když už máme } i - 1 \text{ druhů}] = \frac{n - (i - 1)}{n}$$

Takže  $t_i$  má geometrické rozdělení (čekáme na první úspěch). Střední hodnota  $t_i$  je:

$$\mathbb{E}[t_i] = \frac{n}{n - (i - 1)}$$

Z linearity střední hodnoty:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\text{sbíráání}] &= \mathbb{E}[t_1 + t_2 + \dots + t_n] \\ &= \mathbb{E}[t_1] + \mathbb{E}[t_2] + \dots + \mathbb{E}[t_n] \\ &= \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{n-(n-1)} \\ &= nH_n \\ &= n \log(n) + n \cdot 0.577 \dots + 1/2 + \mathcal{O}(1/n) \end{aligned} \quad (\text{Wikipedia})$$

(b) Simulujte.

**Řešení:**

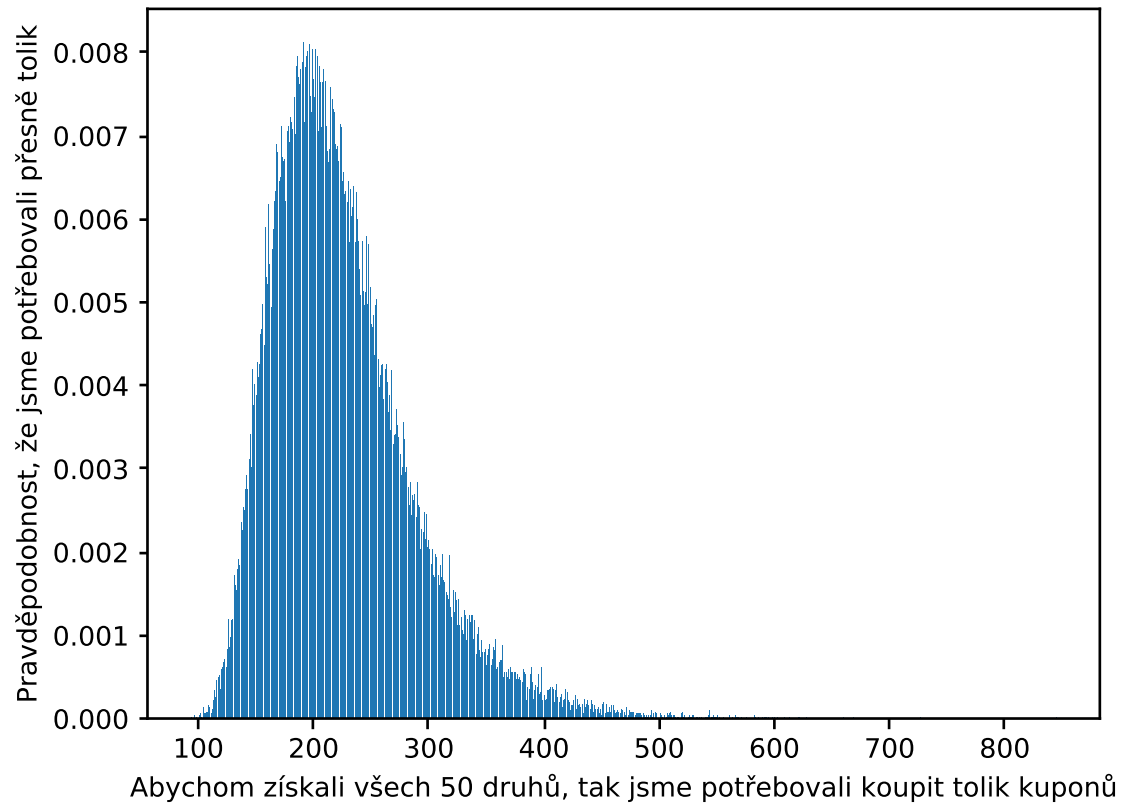
```
import matplotlib.pyplot as plt
from collections import Counter
from random import randint

def catch_them_all(n: int = 50) -> int:
    coupons = [False] * n
    coupons_collected = 0
    coupons_bought = 0
    while coupons_collected < len(coupons):
        new_coupon = randint(0, len(coupons) - 1)
        coupons_bought += 1
        if not coupons[new_coupon]:
            coupons[new_coupon] = True
            coupons_collected += 1
    return coupons_bought

N = 50000
cnt = Counter(catch_them_all(50) for _ in range(N))
distribution = {}
for c in cnt:
    distribution[c] = cnt[c] / N

plt.bar(distribution.keys(), distribution.values())
plt.xlabel("Abychom získali všech 50 druhů, tak jsme potřebovali koupit tolik kuponů")
```

```
plt.ylabel("Pravděpodobnost, že jsme potřebovali přesně tolik")  
# plt.show()  
plt.savefig('coupon_collector.pdf')
```

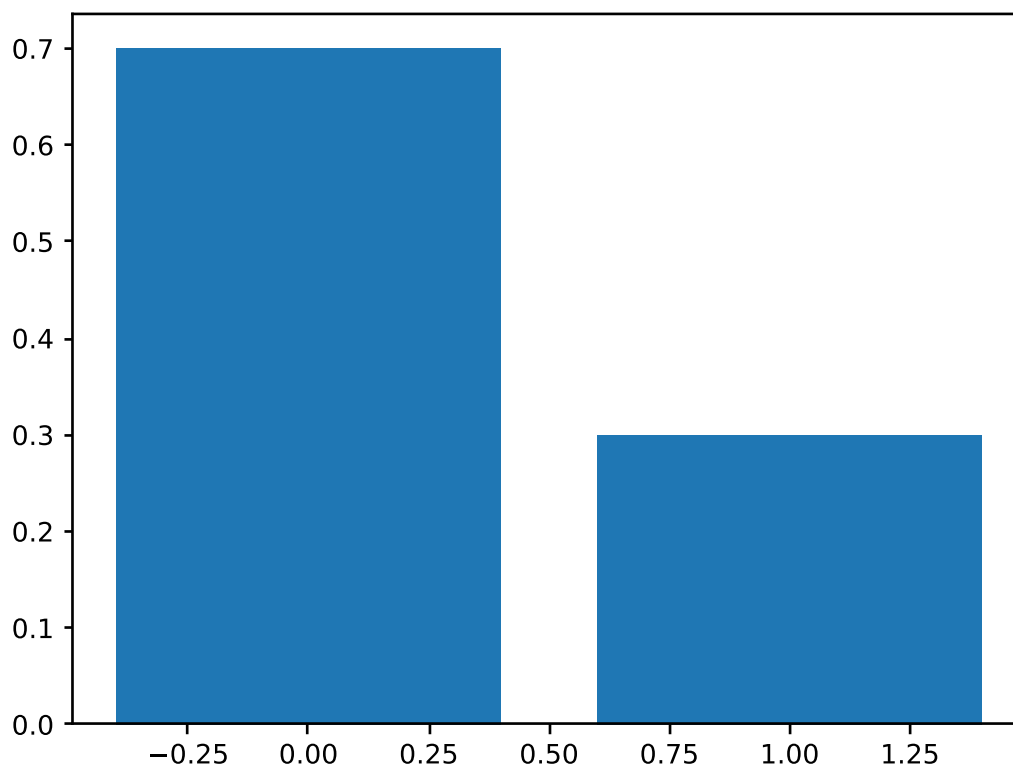


Obrázek 3.2: Histogram s jakou pravděpodobností jsme potřebovali právě tolik kuponů.

5. Připomeňte si, co je náhodná veličina, jaké máme typy náhodných veličin a jaké jsou jejich distribuce. A hlavně co vyjadřují.

(a) Bernoulli

*Řešení:*  $X \sim \text{Bern}(p)$  pokud  $\Pr[X = 1] = p$  a  $\Pr[X = 0] = 1 - p$  (tedy hod mincí se stranami 0/1).



Obrázek 3.3: Bernoulli

(b) binomické

*Řešení:* Součet několika Bernoulliho.

(c) hypergeometrické

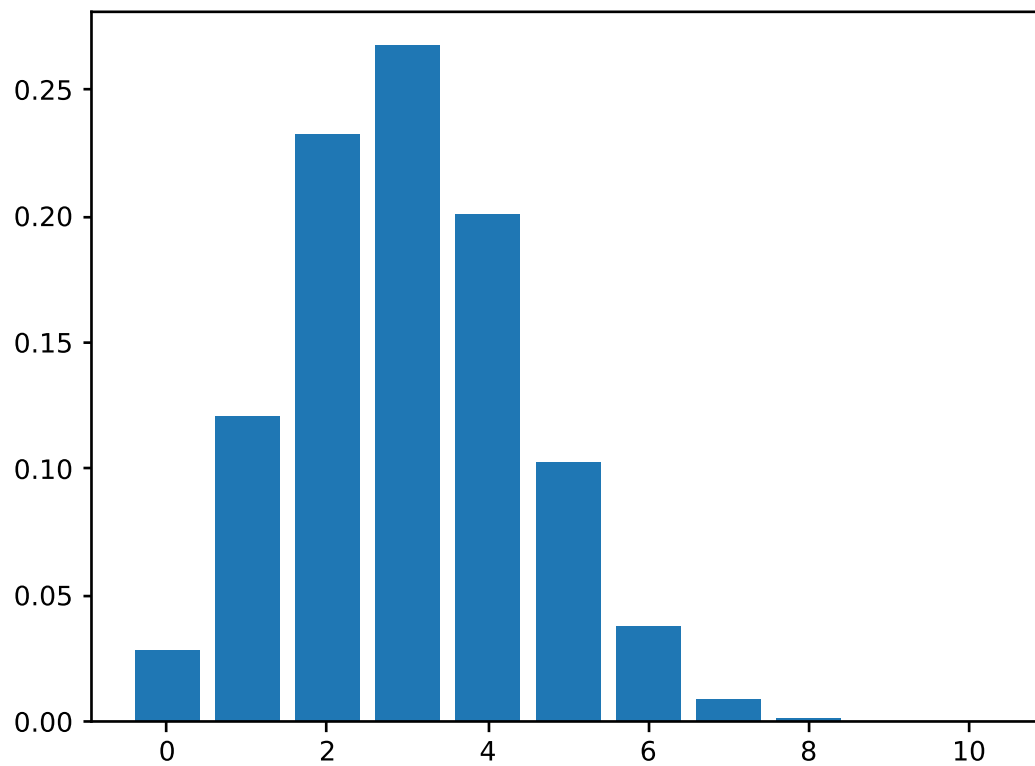
*Řešení:* Když vybereme  $n$  věcí z  $N$  věcí bez vracení a  $k$  je “správných”, tak tohle je počet správných.

(d) geometrické

*Řešení:* Čekání na první úspěch Bernoulliho hodu.

(e) Poissonovo

*Řešení:* Kolik jevů čekáme během času, když jsou všechny nezávislé a střední hodnota je  $\lambda$  (emaily chodí nezávisle, průměrně 10 emailů za hodinu, kolik jich přijde?).



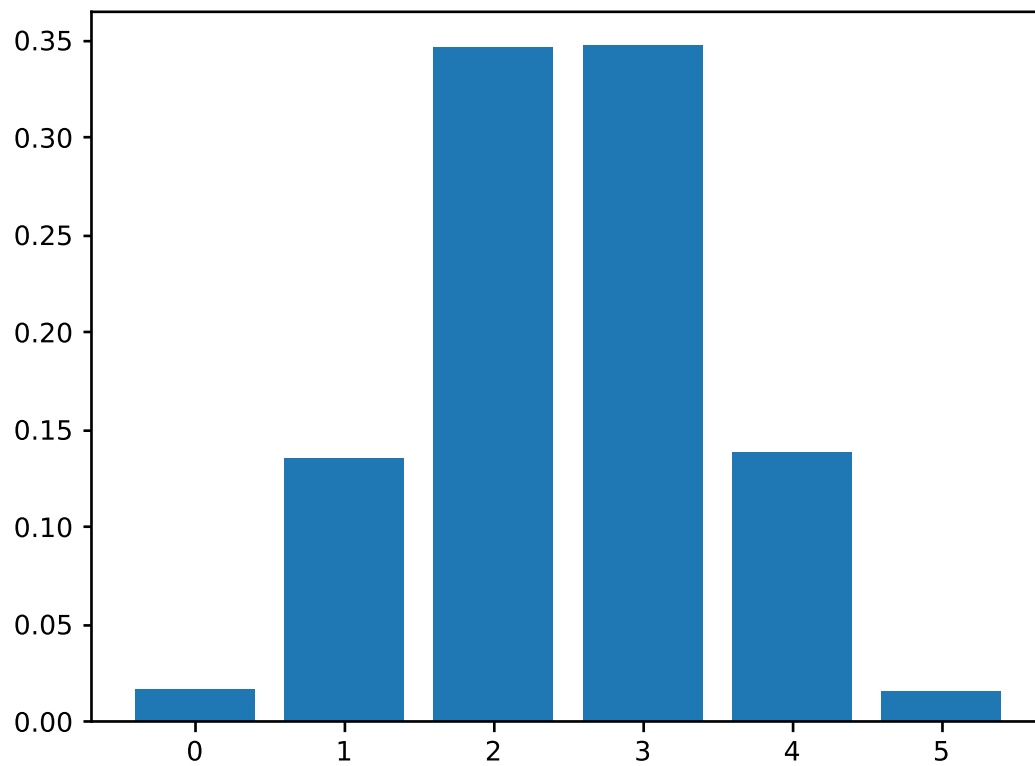
Obrázek 3.4: binomické

```
import matplotlib.pyplot as plt
from collections import Counter
from random import randint
from random import random
from random import sample
from numpy import random as npr
```

```
p = 0.3
n = 10
k = 5
S = 20
l = 10
```

```
def bernoulli(pr: float = p) -> bool:
    return int(random() < pr)
```

```
def geometric(pr: float = p) -> int:
    """pr is success probability, return the number of tosses until
    the first success."""
```



Obrázek 3.5: hypergeometrické

```
assert pr > 0
sample = 1
fail_pr = 1 - pr
while random() < fail_pr:
    sample += 1
return sample

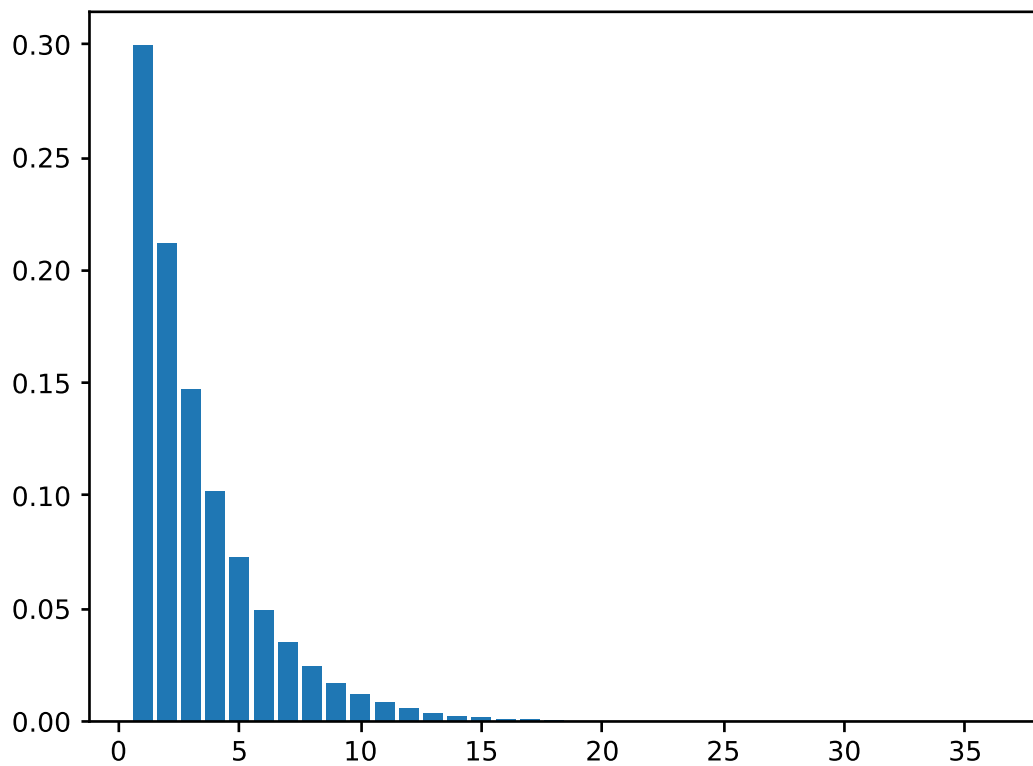
def binomicke(n=n, pr=p):
    return sum(bernoulli(pr) for _ in range(n))

def hypergeometric(n=n, N=S, k=k):
    return sum(sample([1]*k + [0]*(N-k), k=n))

def poisson(l=1):
    return npr.poisson(lam=1, size=1)[0]
```

N = 100000





Obrázek 3.6: geometrické

```

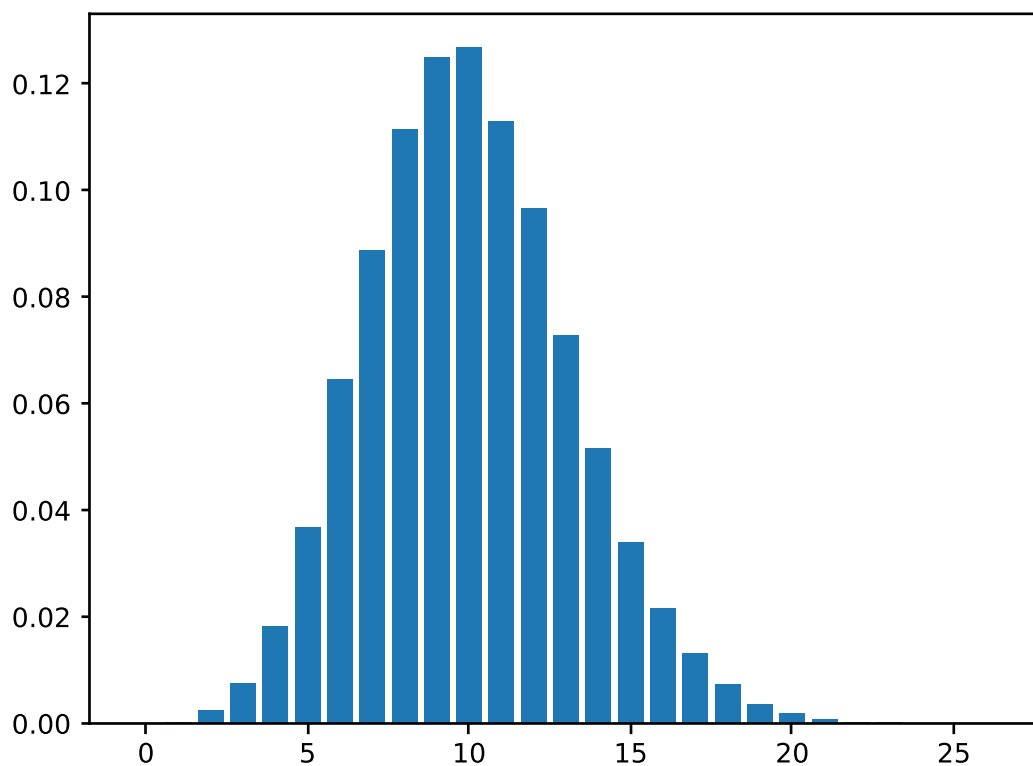
def expected_value(X):
    """Vrací střední hodnotu."""
    return sum(X() for _ in range(N)) / N

def variance(X):
    """Vrací rozptyl."""
    EX = expected_value(X)
    return sum((X() - EX)**2 for _ in range(N)) / N
    # return (sum(X()*2 for _ in range(N)) / N) - EX**2

def histogram(X, strX, fig):
    cnt = Counter(X() for _ in range(N))
    distribution = {}
    for c in cnt:
        distribution[c] = cnt[c] / N

    plt.figure(fig)

```



Obrázek 3.7: Poissonovo

```

plt.bar(distribution.keys(), distribution.values())
# plt.show()
# plt.xlabel("")
# plt.ylabel("")
plt.savefig(f'{strX}.pdf')

print('Bernoulli:')
print(f'E[X] = {expected_value(bernoulli)} (= {p})')
print(f'var[X] = {variance(bernoulli)} (= {p*(1-p)})')
histogram(bernoulli, "bernoulli", 0)
print('')

print('binomické')
print(f'E[X] = {expected_value(binomicke)} (= {n*p})')
print(f'var[X] = {variance(binomicke)} (= {n*p*(1-p)})')
histogram(binomicke, "binomicke", 1)
print('')

```

```

print('hypergeometrické')
print(f'E[X] = {expected_value(hypergeometric)} (= {n*k/S})')
print(f'var[X] = {variance(hypergeometric)} (= {n*(k/S)*(1-(k/S))*(S-n)/(S-1)})')
histogram(hypergeometric, "hypergeometric", 2)
print('')

print('geometrické')
print(f'E[X] = {expected_value(geometric)} (= {1/p})')
print(f'var[X] = {variance(geometric)} (= {(1-p)/p**2})')
histogram(geometric, "geometric", 3)
print('')

print('Poissonovo')
print(f'E[X] = {expected_value(poisson)} (= {1})')
print(f'var[X] = {variance(poisson)} (= {1})')
histogram(poisson, "poisson", 4)

# Možný výstup:
# Bernoulli:
# E[X] = 0.30003 (= 0.3)
# var[X] = 0.21018846799996171 (= 0.21)

# binomické
# E[X] = 3.00221 (= 3.0)
# var[X] = 2.111969109999777 (= 2.0999999999999996)

# hypergeometrické
# E[X] = 2.49898 (= 2.5)
# var[X] = 0.9866719879994746 (= 0.9868421052631579)

# geometrické
# E[X] = 3.33374 (= 3.3333333333333335)
# var[X] = 7.851098870500136 (= 7.777777777777778)

# Poissonovo
# E[X] = 10.00683 (= 10)
# var[X] = 9.947825008000336 (= 10)

```

### 3.5 Cvičení

1. **Hodíme třikrát mincí. Označíme  $X$  počet rubů v prvních dvou hodech a  $Y$  počet líců v posledních dvou hodech.**

- (a) **Určete pravděpodobnostní prostor.**

*Řešení:*

- Množina elementárních jevů:

$$\Omega = \{LLL, LLR, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR\}$$

- Prostor jevů:

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$$

- Pravděpodobnost

$$\Pr[\{\omega\}] = 1/8 \quad (\text{pro každé } \omega \in \Omega)$$

Zbytek jednoznačně určen axiomy.

- (b) **Určete předpis našich náhodných veličin.**

*Řešení:*

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

kde

$$X(LLL) = X(LLR) = 0$$

$$X(LRL) = X(LRR) = 1$$

$$X(RLL) = X(RLR) = 1$$

$$X(RRL) = X(RRR) = 2$$

$$Y(LRR) = Y(RRR) = 0$$

$$Y(LRL) = Y(RRL) = 1$$

$$Y(LLR) = Y(RLR) = 1$$

$$Y(LLL) = Y(RLL) = 2$$

Po náhodné veličině  $X$  požadujeme, aby

$$\forall x \in \mathbb{R}: \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

pro diskrétní jsme chtěli

$$\forall x \in \mathbb{R}: \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\} \in \mathcal{F}$$

ale vzhledem k tomu, že  $\text{Im}(X)$  je konečná množina nebo spočetná množina (dle definice diskrétní náhodné veličiny), tak to je jedno, protože  $\mathcal{F}$  je  $\sigma$ -algebra a ta je uzavřená na spočetná sjednocení.

Naše náhodná veličina je diskrétní a tato podmínka je celkem jednoduchá, protože naše  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  (což je možné proto, že  $\Omega$  je konečná a bylo by to možné i pro spočetnou množinu  $\Omega$ ).

- (c) Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci  $p_{X,Y}$  a také marginální pravděpodobnostní funkce  $p_X, p_Y$ .

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
 p_{X,Y}(0,0) &= 0 && \text{(druhý hod je buď rub nebo líc)} \\
 p_{X,Y}(0,1) &= 1/8 && \text{(jev } \{LLR\}) \\
 p_{X,Y}(0,2) &= 1/8 && \text{(jev } \{LLL\}) \\
 p_{X,Y}(1,0) &= 1/8 && \text{(jev } \{LRR\}) \\
 p_{X,Y}(1,1) &= 1/4 && \text{(jev } \{RLR, LRL\}) \\
 p_{X,Y}(1,2) &= 1/8 && \text{(jev } \{RLL\}) \\
 p_{X,Y}(2,0) &= 1/8 && \text{(jev } \{RRR\}) \\
 p_{X,Y}(2,1) &= 1/8 && \text{(jev } \{RRL\}) \\
 p_{X,Y}(2,2) &= 0 && \text{(druhý hod je buď rub nebo líc)}
 \end{aligned}$$

Častější a přehlednější může být reprezentace tabulkou:

$p_{X,Y}$	0	1	2
0	0	1/8	1/8
1	1/8	1/4	1/8
2	1/8	1/8	0

Tabulka 3.1: Sdružená pravděpodobnostní funkce (řádky odpovídají možným hodnotám  $X$ , sloupce možným hodnotám  $Y$ ).

Marginální pravděpodobnostní funkce  $p_X$  je součet řádků:

$$\begin{aligned}
 p_X(x) &= \sum_{y \in \text{Im}(Y)} \Pr[X = x \wedge Y = y] = \sum_{y \in \text{Im}(Y)} p_{X,Y}(x, y) \\
 p_X(0) &= 1/4 \\
 p_X(1) &= 1/2 \\
 p_X(2) &= 1/4
 \end{aligned}$$

Všimněte si, že to přesně odpovídá  $p_X(n) = \Pr[X = n]$  pro každé  $n \in \mathbb{N}$ .

Marginální pravděpodobnostní funkce  $p_Y$  je součet sloupců:

$$\begin{aligned}
 p_Y(0) &= 1/4 \\
 p_Y(1) &= 1/2 \\
 p_Y(2) &= 1/4
 \end{aligned}$$

- (d) Určete distribuční funkce  $F_X, F_Y, F_{X,Y}$  (cumulative distribution function CDF).

**Řešení:** Z definice:

$$\begin{aligned}
 F_X: \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\
 F_X(x) &= \Pr[X \leq x] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}]
 \end{aligned}$$

tedy máme:

$$F_X(x) = 0 \quad \text{(pro } x \in (-\infty, 0))$$

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1/4 && (\text{pro } x \in [0, 1)) \\ F_X(x) &= 3/4 && (\text{pro } x \in [1, 2)) \\ F_X(x) &= 1 && (\text{pro } x \in [2, \infty)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= 0 && (\text{pro } y \in (-\infty, 0)) \\ F_Y(y) &= 1/4 && (\text{pro } y \in [0, 1)) \\ F_Y(y) &= 3/4 && (\text{pro } y \in [1, 2)) \\ F_Y(y) &= 1 && (\text{pro } y \in [2, \infty)) \end{aligned}$$

Sdružená distribuční funkce  $F_{X,Y}$  je pak:

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &: \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] \\ F_{X,Y}(x, y) &= \Pr[X \leq x \wedge Y \leq y] \end{aligned}$$

tedy například:  $F_{X,Y}(0.1, 1.33) = 1/8$ .

**(e) Jsou  $X$  a  $Y$  nezávislé?**

**Řešení:** Nezávislost jsme měli definovanou jen pro diskrétní náhodné veličiny a to konkrétně podmínkou:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}: \Pr[X = x \wedge Y = y] = \Pr[X = x] \Pr[Y = y]$$

Tato podmínka není splněná například pro  $x = 0, y = 0$ :

$$\Pr[X = 0 \wedge Y = 0] = 0 \neq 1/64 = \Pr[X = 0] \Pr[Y = 0]$$

Obecně je nezávislost definovaná pomocí distribuční funkce (cumulative distribution function CDF)  $F_X$  definované jako:

$$\begin{aligned} F_X &: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ F_X(x) &= \Pr[X \leq x] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}] \end{aligned}$$

Pak řekneme, že  $X, Y$  jsou nezávislé, pokud platí:

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

nebo když máme hustotu, pak:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Pro diskrétní náhodné veličiny jsou ty dvě definice ekvivalentní (jednoduché cvičení na sumy).

**(f) Určete  $\Pr[X < Y]$ .**

**Řešení:**

$$\begin{aligned} \Pr[X < Y] &= p_{X,Y}(0, 1) + p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(1, 2) \\ &= 1/8 + 1/8 + 1/8 \\ &= 3/8 \end{aligned}$$

(g) Určete podmíněnou pravděpodobnostní funkce  $p_{X|Y}$ .

**Řešení:** Dle definice:

$$\begin{aligned} p_{X|Y}(x|y) &= \Pr[X = x \mid Y = y] \\ p_{X|Y}(0|0) &= 0 \\ p_{X|Y}(0|1) &= 1/4 \\ p_{X|Y}(0|2) &= 1/2 \\ p_{X|Y}(1|0) &= 1/2 \\ p_{X|Y}(1|1) &= 1/2 \\ p_{X|Y}(1|2) &= 1/2 \\ p_{X|Y}(2|0) &= 1/2 \\ p_{X|Y}(2|1) &= 1/4 \\ p_{X|Y}(2|2) &= 0 \end{aligned}$$

Opět je elegantnější tabulka:

$p_{X Y}$	0	1	2
0	0	1/4	1/2
1	1/2	1/2	1/2
2	1/2	1/4	0

Tabulka 3.2: Všimněte si, že je to ta samá tabulka jako Tabulka 3.1 akorát sloupce jsou škálované tak, aby se sečetli na jedničku.

(h) Simulujte.

**Řešení:**

```
from random import choices

def sample():
    """True je rub, False je líc"""
    return choices([True, False], k=3)

def X(omega):
    """X: Omega -> R"""
    return int(omega[0]) + int(omega[1])

def Y(omega):
    """Y: Omega -> R"""
    return int(not omega[1]) + int(not omega[2])

N = 1_000_000
p_XY = [[0,0,0], [0,0,0], [0,0,0]]
for _ in range(N):
    omega = sample()
    p_XY[X(omega)][Y(omega)] += 1

for i in range(3):
    for j in range(3):
        p_XY[i][j] /= N
```

```

print('Sdružená pravděpodobnostní funkce')
print(f'  0      1      2')
print(f'0 {p_XY[0][0]:.3f} {p_XY[0][1]:.3f} {p_XY[0][2]:.3f}')
print(f'1 {p_XY[1][0]:.3f} {p_XY[1][1]:.3f} {p_XY[1][2]:.3f}')
print(f'2 {p_XY[2][0]:.3f} {p_XY[2][1]:.3f} {p_XY[2][2]:.3f}')

print('Pravděpodobnost X<Y')
pr_X_leq_Y = 0
for _ in range(N):
    omega = sample()
    if X(omega) < Y(omega):
        pr_X_leq_Y += 1

print('')
print(f'Pr[X < Y] = {pr_X_leq_Y} (=3/8)')

p_XY = [[0,0,0], [0,0,0], [0,0,0]]
for _ in range(N):
    omega = sample()
    p_XY[X(omega)][Y(omega)] += 1

p_Y = [0,0,0]
p_Y[0] = p_XY[0][0] + p_XY[1][0] + p_XY[2][0]
p_Y[1] = p_XY[0][1] + p_XY[1][1] + p_XY[2][1]
p_Y[2] = p_XY[0][2] + p_XY[1][2] + p_XY[2][2]
for i in range(3):
    for j in range(3):
        p_XY[j][i] /= p_Y[i]

print('')
print('Podmíněná pravděpodobnostní funkce')
print(f'  0      1      2')
print(f'0 {p_XY[0][0]:.3f} {p_XY[0][1]:.3f} {p_XY[0][2]:.3f}')
print(f'1 {p_XY[1][0]:.3f} {p_XY[1][1]:.3f} {p_XY[1][2]:.3f}')
print(f'2 {p_XY[2][0]:.3f} {p_XY[2][1]:.3f} {p_XY[2][2]:.3f}')

# Možný výstup:
# Sdružená pravděpodobnostní funkce
#  0      1      2
# 0 0.000 0.125 0.125
# 1 0.125 0.250 0.125
# 2 0.125 0.125 0.000
# Pravděpodobnost X<Y

# Pr[X < Y] = 375133 (=0.375)

# Podmíněná pravděpodobnostní funkce
#  0      1      2
# 0 0.000 0.249 0.502
# 1 0.500 0.500 0.498
# 2 0.500 0.251 0.000

```



## 2. Bonusový příklad: tady si zadefinujeme Lebesgueovu míru a integrál.

(a) Definujte Lebesgueovu míru na  $\mathbb{R}$ .**Řešení:**

- Napřed definujeme délku intervalu  $\ell([a, b]) = \ell((a, b)) = b - a$  pro libovolná dvě reálná čísla  $a \leq b \in \mathbb{R}$ .
- Pak definujeme vnější míru pro každou  $E \subseteq \mathbb{R}$ :

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \mid (I_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ je posloupnost otevřených intervalů, t.ž. } E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \right\}$$

- Pak  $E \in \mathcal{F}$  (což je Lebesgueova  $\sigma$ -algebra) právě když

$$\forall A \subseteq \mathbb{R}: \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \cap (\mathbb{R} \setminus E))$$

- Pro libovolné  $E \in \mathcal{F}$  položíme Lebesgueovu míru

$$\begin{aligned} \lambda: \mathcal{F} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda(E) &= \lambda^*(E) \end{aligned} \quad (\text{pro libovolné } E \in \mathcal{F})$$

(b) Dokažte, že pro diskrétní náhodnou veličinu, takovou že  $\text{Im}(X) \subseteq \mathbb{N}$ , platí:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \Pr[X = x] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} n \Pr[X = n] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \Pr[X \geq n] \end{aligned}$$

**Řešení:** Tohle je poměrně jednoduché, protože absolutně konvergentní řady můžeme přeuspořádat:

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{N}} n \Pr[X = n] &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\ell=1}^n \Pr[X = n] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k \geq n} \Pr[X = k] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \Pr[X \geq n] \end{aligned}$$

(c) Definujte Lebesgueův integrál (pro danou míru  $\Pr$ , obecně to ani nemusí být pravděpodobnostní míra, ale obecná  $\mu$ ).**Řešení:** Necht

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \\ f(x) &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{pro každé } x \in \mathbb{R})$$

$$\int f d\Pr = (R) \int_0^{\infty} \Pr(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\}) dt$$

Kde ten Riemannův integrál vždy existuje, protože  $\Pr(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\})$  je neklesající funkce. Z toho taky vidíme, že  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\}$  musí být měřitelná množina (pro náhodné veličiny je v definici  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$ , což je to samé, protože  $\sigma$ -algebry jsou uzavřené na doplněk).

3. Pro následující náhodné veličiny určete:

(a)

$$\begin{aligned}\Omega &= \{1, 2, 3\} \\ \mathcal{F} &= \mathcal{P}(\Omega) \\ \Pr[\{\omega\}] &= 1/3 && \text{(pro libovolné } \omega \in \Omega, \text{ zbytek určen jednoznačně)} \\ X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(\omega) &= 2\omega + 1\end{aligned}$$

- Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?

*Řešení:* Ano, pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  platí  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ .

- Je to diskrétní náhodná veličina?

*Řešení:* Ano,  $\text{Im}(X) = \{3, 5, 7\}$ , což je konečná množina (tedy nejvýš spočetná).

- Jaká je její střední hodnota?

*Řešení:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \Pr[X = x] \\ &= 3 \Pr[X = 3] + 5 \Pr[X = 5] + 7 \Pr[X = 7] \\ &= 3 \frac{1}{3} + 5 \frac{1}{3} + 7 \frac{1}{3} \\ &= 5\end{aligned}$$

- Jaká je její distribuční funkce?

*Řešení:*

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x]$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pokud } x \in (-\infty, 3) \\ 1/3 & \text{pokud } x \in [3, 5) \\ 2/3 & \text{pokud } x \in [5, 7) \\ 1 & \text{pokud } x \in [7, \infty) \end{cases}$$

- Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?

*Řešení:* Ne, protože  $F_X$  není spojitá.

- Jaká je její kvantilová funkce?

*Řešení:*

$$Q_X: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q_X(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq F_X(x)\}$$

$$Q_X(p) = \begin{cases} -\infty & \text{pokud } p = 0 \\ 3 & \text{pokud } p \in (0, 1/3] \\ 5 & \text{pokud } p \in (1/3, 2/3] \\ 7 & \text{pokud } p \in (2/3, 1] \end{cases}$$

Poznámka: určitě znáte percentil – měl jsem percentil 95% v testu znamená, že 95% ostatních mělo skóre menší nebo rovné mému. Obdobně medián je  $Q_X(1/2)$ . Dávejte pozor, jestli je percentil definovaný jako menší rovno nebo ostře menší (v literatuře se používá obojí)!

(b)

$$\begin{aligned}\Omega &= \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathcal{F} &= \mathcal{P}(\Omega) \\ \Pr\{\{n\}\} &= 1/2^n && \text{(pro libovolné } n \in \mathbb{N}, \text{ zbytek určen jednoznačně)} \\ X: \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ X(\omega) &= 2\omega + 1\end{aligned}$$

- **Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?**

*Řešení:* Ano, pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  platí  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ .

- **Je to diskrétní náhodná veličina?**

*Řešení:* Ano,  $\text{Im}(X) = \{3, 5, 7, 9, 11, \dots\}$  (množina všech lichých čísel která jsou aspoň tři), což je spočetně velká množina.

- **Jaká je její střední hodnota?**

*Řešení:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \Pr[X = x] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \Pr[X = (2n+1)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)2^{-n} \\ &= 5\end{aligned}$$

- **Jaká je její distribuční funkce?**

*Řešení:*

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \Pr[X \leq x] \\ F_X(x) &= 0 && \text{(pokud } x < 1) \\ F_X(x) &= \sum_{n=1}^{\lfloor (x-1)/2 \rfloor} (2n+1)2^{-n} \\ &= 2^{-\lfloor (x-1)/2 \rfloor} \left( -2(\lfloor (x-1)/2 \rfloor) + 5 \cdot 2^{\lfloor (x-1)/2 \rfloor} - 5 \right) && \text{(jinak)}\end{aligned}$$

- **Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?**

*Řešení:* Ne, protože  $F_X$  není spojitá.

- **Jaká je její kvantilová funkce?**

*Řešení:* Pro číslo  $p \in (0,1)$  definujme  $j(p)$  tak, že pokud  $p = 0.p_1p_2p_3\dots$  kde  $p_i \in \{0,1\}$  je binární zápis čísla  $p$  (tedy  $p = \sum_{i=1}^{\infty} p_i 2^{-i}$ ), nechť  $k(p) =$

$\min \{i \in \mathbb{N} \mid p_i = 0\}$ , pak definujeme  $j(p) = \sum_{i=1}^{k(p)} 2^{-i}$ . Tedy například  $j(0.11101101) = 0.1111 = 15/16$ .

$$Q_X: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q_X(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq F_X(x)\}$$

$$Q_X(p) = \begin{cases} -\infty & \text{pokud } p = 0 \\ \infty & \text{pokud } p = 1 \\ 2(k(p) - 1) + 1 & \text{pokud } p \in (0, 1) \text{ a } j(p) < p \\ 2k(p) + 1 & \text{jinak} \end{cases}$$

(c)

$$\Omega = [0, 1]$$

$$\mathcal{F} = \text{Lebesgueovsky měřitelné množiny}$$

$$\Pr[A] = \lambda(A) \quad (\text{pro libovolné } A \in \mathcal{F})$$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X(\omega) = \lceil 10x \rceil$$

- Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?

**Řešení:** Ano, pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  platí  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$  (každý interval je Lebesgueovsky měřitelný).

- Je to diskrétní náhodná veličina?

**Řešení:** Ano,  $\text{Im}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  je konečná množina. Příklad s obdobnou diskrétní náhodnou veličinou, kde  $\text{Im}(X)$  by byl nespočetný vynecháme.

- Jaká je její střední hodnota?

**Řešení:** Napřed určíme pravděpodobnost:

$$\Pr[X = 0] = 0$$

$$\Pr[X = j] = 1/10 \quad (\text{pro každé } j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\})$$

ted' můžeme spočítat střední hodnotu:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in \text{Im}(X)} x \Pr[X = x] \\ &= 0 \cdot 0 + \frac{1}{10} (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\ &= 5.5 \end{aligned}$$

- Jaká je její distribuční funkce?

**Řešení:**

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr[X \leq x] \\ F_X(x) &= 0 && (\text{pokud } x < 1) \\ F_X(x) &= 1/10 && (\text{pro } x \in [1, 2)) \\ F_X(x) &= 2/10 && (\text{pro } x \in [2, 3)) \end{aligned}$$

$$F_X(x) = 1 \quad (\text{pro } x \in [10, \infty))$$

- Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?

*Řešení:* Ne, protože  $F_X$  není spojitá.

- Jaká je její kvantilová funkce?

*Řešení:*

$$Q_X: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$Q_X(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq F_X(x)\}$$

$$Q_X(p) = \begin{cases} -\infty & \text{pokud } p = 0 \\ 1 & \text{pokud } p \in (0, 1/10] \\ 2 & \text{pokud } p \in (1/10, 2/10] \\ 3 & \text{pokud } p \in (2/10, 3/10] \\ 4 & \text{pokud } p \in (3/10, 4/10] \\ 5 & \text{pokud } p \in (4/10, 5/10] \\ 6 & \text{pokud } p \in (5/10, 6/10] \\ 7 & \text{pokud } p \in (6/10, 7/10] \\ 8 & \text{pokud } p \in (7/10, 8/10] \\ 9 & \text{pokud } p \in (8/10, 9/10] \\ 10 & \text{pokud } p \in (9/10, 1] \end{cases}$$

(d)

$$\Omega = [0, 1]$$

$$\mathcal{F} = \text{Lebesgueovsky měřitelné množiny}$$

$$\Pr[A] = \lambda(A) \quad (\text{pro libovolné } A \in \mathcal{F})$$

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X(\omega) = 10x$$

- Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?

*Řešení:* Ano, pro libovolné  $x \in \mathbb{R}$  platí  $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ . Protože každý interval je Lebesgueovsky měřitelný a my máme:

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \begin{cases} \emptyset & \text{pro } x \in (-\infty, 0) \\ [0, x/10] & \text{pro } x \in [0, 10] \\ [0, 1] & \text{pro } x \in (10, \infty) \end{cases}$$

- Je to diskrétní náhodná veličina?

*Řešení:* Ne,  $\text{Im}(X) = [0, 10]$  je nespočetná množina.

- Jaká je její distribuční funkce?

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= \Pr[X \leq x] \\
 F_X(x) &= 0 && \text{(pokud } x < 0) \\
 F_X(x) &= x/10 && \text{(pokud } x \in [0, 10]) \\
 F_X(x) &= 1 && \text{(pro } x \in [10, \infty))
 \end{aligned}$$

- **Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?**

**Řešení:** Ano, konečně máme  $F_X$  spojitou! Hustota je:

$$\begin{aligned}
 f_X(x) &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 F_X(x) &= \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \\
 f_X(x) &= 1/10 && \text{pro } x \in [0, 10] \\
 f_X(x) &= 0 && \text{pro } x \in (-\infty, 0) \cup (10, \infty)
 \end{aligned}$$

(uniformní rozdělení).

- **Jaká je její střední hodnota?**

**Řešení:** Dle definice:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\
 &= \int_0^{10} x/10 dx \\
 &= [x^2/20]_0^{10} \\
 &= 5 && \text{(což dává smysl, hodnoty jsou rovnoměrně mezi } [0, 10])
 \end{aligned}$$

- **Jaká je její kvantilová funkce?**

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
 Q_X &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\
 Q_X(p) &= \inf \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq F_X(x)\} \\
 Q_X(p) &= 10p && \text{(pro } p \in (0, 1]) \\
 Q_X(p) &= -\infty && \text{(pro } p = 0)
 \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
 \Omega &= [0, 1] \\
 \mathcal{F} &= \text{Lebesgueovský měřitelné množiny} \\
 \Pr[A] &= \lambda(A)/2 + 1/2 && \text{(pro libovolné } A \in \mathcal{F} \text{ pokud } 0.1 \in A) \\
 \Pr[A] &= \lambda(A)/2 && \text{(pro libovolné } A \in \mathcal{F} \text{ pokud } 0.1 \notin A) \\
 X &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\
 X(\omega) &= 10\omega
 \end{aligned}$$

- Je to náhodná veličina na daném pravděpodobnostním prostoru?

*Řešení:* Úplně stejně jako minule.

- Je to diskrétní náhodná veličina?

*Řešení:* Ano,  $\text{Im}(X) = [0, 10]$  je nespočetná množina.

- Jaká je její distribuční funkce?

*Řešení:*

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \Pr[X \leq x] \\ F_X(x) &= 0 && \text{(pokud } x < 0) \\ F_X(x) &= x/20 && \text{(pokud } x \in [0, 1)) \\ F_X(x) &= 1/2 + x/20 && \text{(pokud } x \in [1, 10)) \\ F_X(x) &= 1 && \text{(pro } x \in [10, \infty)) \end{aligned}$$

- Je to spojitá veličina? Jinak řečeno máme pro tuto hustotu (probability density function PDF)?

*Řešení:* A zase je  $F_X$  nespojitá, takže  $X$  není spojitá veličina.

- Jaká je její střední hodnota?

*Řešení:* Nejobecnější definice:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{\Omega} X(\omega) d\Pr(\omega) \\ &= (R) \int_0^{\infty} \Pr(\{x \in \mathbb{R} \mid X(x) > t\}) dt && \text{(protože } X(\omega) \geq 0) \\ &= (R) \int_0^{\infty} (1 - F_X(t)) dt \\ &= (R) \int_0^1 (1 - t/20) dt + (R) \int_1^{10} (1 - (1/2 + t/20)) dt \\ &= [x - x^2/40]_0^1 + [x/2 - x^2/40]_1^{10} \\ &= 39/40 + (5 - 2.5) - (1/2 - 1/40) \\ &= 3 \end{aligned}$$

- Jaká je její kvantilová funkce?

*Řešení:*

$$\begin{aligned} Q_X &: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ Q_X(p) &= \inf \{x \in \mathbb{R} \mid p \leq F_X(x)\} \\ Q_X(0) &= -\infty \\ Q_X(p) &= 20p && \text{(pro } p \in (0, 0.05)) \\ Q_X(p) &= 1 && \text{(pro } p \in [0.05, 0.55)) \\ Q_X(p) &= 20p - 10 && \text{(pro } p \in [0.55, 1]) \end{aligned}$$

(f) Pozorujte, že kvantil je jediná funkce, pro kterou platí:

$$\forall p \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}: Q_X(p) \leq x \Leftrightarrow p \leq F_X(x)$$



## 3.6 Cvičení

1.

BAYES HW 1.2

- Jedno promile lidí má nemoc  $C$ , značíme  $C^+ \subseteq \Omega$  množinu nemocných a  $C^- = \Omega \setminus C^+$  množinu zdravých. Člověka volíme uniformně náhodně, pak  $\Pr[C^+] = 0.001$ .
- Máme test, který označí množinu lidí  $T^+ \subseteq \Omega$  za nemocné a  $T^- = \Omega \setminus T^+$  za zdravé. Test má následující parametry:
  - *Sensitivita*: (true positive)  $\Pr[T^+ | C^+] = 0.99$
  - *Specifická*: (true negative)  $\Pr[T^- | C^-] = 0.98$

(a) Uniformně náhodně jsme vybrali člověka  $c$ . Jaká je pravděpodobnost, že  $c \in C^+$  (tedy že je nemocný)?

Řešení:

$$\Pr[C^+] = 0.001$$

Vybrali jsme náhodného člověka a nic jiného o tom člověku nevíme. Takže racionálně odhadujeme pravděpodobnost, že je nemocný zlomkem nemocných v populaci.

(b) Člověku  $c$  jsme udělali jeden test a ten vyšel pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že  $c \in C^+$  (tedy že je nemocný)?

Řešení:

$$\begin{aligned} \Pr[C^+ | T^+] &= \frac{\Pr[C^+] \Pr[T^+ | C^+]}{\Pr[T^+ | C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ | C^-] \Pr[C^-]} \\ &= \frac{0.001 \cdot 0.99}{0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999} \\ &= 0.0472 \end{aligned}$$

Vytáhli jsme náhodného člověka, ale pak jsme provedli test, který vyšel pozitivně. Takže je rozumné předpokládat, že pravděpodobnost, že náš člověk je nemocný je vyšší. O kolik přesně upravíme náš odhad nemocnosti nám kvantifikuje právě Bayesova věta.

(c) Pro jistotu jsme člověku  $c$  udělali ještě jeden test a ten vyšel znovu pozitivní. Jaká je pravděpodobnost, že  $c \in C^+$  (tedy že je nemocný)? Předpokládejte, že výsledek druhého testu je nezávislý na tom prvním.

Řešení:

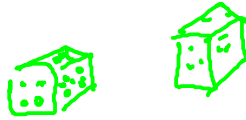
$$\begin{aligned} \Pr[C^+ | T^{++}] &= \frac{\Pr[C^+] \Pr[T^{++} | C^+]}{\Pr[T^{++} | C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^{++} | C^-] \Pr[C^-]} \\ &= \frac{\Pr[C^+] (\Pr[T^+ | C^+])^2}{(\Pr[T^+ | C^+])^2 \Pr[C^+] + (\Pr[T^+ | C^-])^2 \Pr[C^-]} \\ &= \frac{0.001 \cdot (0.99)^2}{(0.99)^2 \cdot 0.001 + (0.02)^2 \cdot 0.999} \\ &= 0.71 \end{aligned}$$

Někteří z vás se správně zamysleli, jestli nezávislost testů platí i pokud výsledek podmíníme tím, že daný člověk je nemocný nebo ne. Někteří jste argumentovali, že pokud  $A, B, C$  jsou jevy, pak následující je rovnost (což obecně neplatí)

A, B nezávislé

$$\Pr[A \cap B | C] \neq \Pr[A | C] \Pr[B | C]$$

jevy



Jako protipříklad vezměte hod dvěma spravedlivými rozlišitelnými šestistrannými kostkami,

*A, B nezávislé*

$A =$  první kostka sudé číslo =  $\{2x, 4x, 6x \mid x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

$B =$  druhá kostka sudé číslo =  $\{x2, x4, x6 \mid x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$

$C =$  součet rovný čtyřem =  $\{13, 22, 31\}$  *"konvoluce"*

$$\Pr[A \cap B \mid C] = 1/3 \neq 1/9 = \Pr[A \mid C] \Pr[B \mid C]$$

Je tedy správné předpokládat nezávislost dvou testů, zejména pak pokud podmiňujeme tím, že člověk je zdravý (nebo nemocný)? Asi to úplně správné není a nejspíš by to měl výrobce testů vyzkoušet. Prakticky však můžeme vzít testy z různých várek (různé datum výroby). A konec konců, ono nám stejně nic moc jiného nezbývá.

**Řešení:** Opět se ale na tento problém můžeme dívat jako na problém, kdy jsme si vytáhli člověka náhodně z nějaké podmnožiny všech lidí, kde pravděpodobnost, že je člověk nemocný je  $\Pr[C^+] = \frac{0.001 \cdot 0.99}{0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999}$ . Ta podmnožina jsou přesně lidé, kterým vyšel první test pozitivní, takže die minulého bodu máme pravděpodobnost, že je nemocný danou. Opět musíme předpokládat něco o tom druhém testu – zejména to, že sensitivita a specifita jsou stejné na této podmnožině lidí. Pak můžeme počítat:

$$\begin{aligned} \Pr[C^+ \mid T^+] &= \frac{\Pr[C^+] \Pr[T^+ \mid C^+]}{\Pr[T^+ \mid C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ \mid C^-] \Pr[C^-]} \\ &= \frac{\frac{0.001 \cdot 0.99}{0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999} \cdot 0.99}{0.99 \cdot \frac{0.001 \cdot 0.99}{0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999} + 0.02 \cdot \left(1 - \frac{0.001 \cdot 0.99}{0.99 \cdot 0.001 + 0.02 \cdot 0.999}\right)} \\ &= 0.71 \end{aligned}$$

Tohle je poměrně užitečný pohled na Bayesovu větu:

- $\Pr[C^+ \mid T^+]$  je takzvaná posterior probability (to, co si myslíme, když uvidíme nějakou evideenci – nějakou stopu, že tomu tak je).
- $\Pr[C^+]$  a  $\Pr[T^+]$ , což je prior (to, co jsme si mysleli předtím).

Místo  $\Pr[T^+]$  se skoro vždy používá rozpis  $\Pr[T^+ \mid C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ \mid C^-] \Pr[C^-]$  (protože to jsou věci, které v praxi známe).

Jen mimochodem poznamenejme, že tyhle dva postupy jsou ekvivaletní, což můžeme ukázat manipulací se symboly:

$$\begin{aligned} \Pr[T^+ \mid C^+] &= \frac{\Pr[C^+] \Pr[T^+ \mid C^+]}{\Pr[T^+ \mid C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ \mid C^-] \Pr[C^-]} \Pr[T^+ \mid C^+] \\ &= \frac{\Pr[C^+] \Pr[T^+ \mid C^+]}{\Pr[T^+ \mid C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ \mid C^-] \Pr[C^-]} \left( \frac{\Pr[C^+] \Pr[T^+ \mid C^+]}{\Pr[T^+ \mid C^+] \Pr[C^+] + \Pr[T^+ \mid C^-] \Pr[C^-]} \right) \\ &= \frac{\Pr[C^+] (\Pr[T^+ \mid C^+])^2}{(\Pr[T^+ \mid C^+])^2 \Pr[C^+] + (\Pr[T^+ \mid C^-])^2 \Pr[C^-]} \end{aligned}$$

(d) Simulujte.

**Řešení:**

```
from random import random
```

```
def bernoulli(pr: float = 0.5) -> bool:
    return random() < pr
```

```

class Human:
    """ _illness_probability is our unknown! """
    _illness_probability = 0.001

    """Random human."""
    def __init__(self):
        self.is_ill = bernoulli(Human._illness_probability)

class IllnessTest:
    sensitivity = 0.99 # = Pr[T+|C+]
    specificity = 0.98 # = Pr[T-|C-]

    def test(h: Human) -> bool:
        """Return True if the test says h is ill."""
        if h.is_ill:
            return bernoulli(IllnessTest.sensitivity)
        else:
            return not bernoulli(IllnessTest.specificity)

N = 10000000 # Number of samples
positive_test1 = 0
positive_test2 = 0
ill_given_positive_test = 0
ill_given_2_positive_tests = 0

for _ in range(N):
    h = Human()
    if IllnessTest.test(h):
        positive_test1 += 1
        if h.is_ill:
            ill_given_positive_test += 1
    if IllnessTest.test(h):
        positive_test2 += 1
        if h.is_ill:
            ill_given_2_positive_tests += 1

pr_c_given_t = (Human._illness_probability * IllnessTest.sensitivity
                / (IllnessTest.sensitivity * Human._illness_probability
                  + (1 - IllnessTest.specificity) * (1 - Human._illness_probabilit

pr_c_given_2t = (Human._illness_probability * IllnessTest.sensitivity**2
                 / (IllnessTest.sensitivity**2 * Human._illness_probability
                   + (1 - IllnessTest.specificity)**2 * (1 - Human._illness_probabi

print(f'Pr[C+|T+] = {ill_given_positive_test/positive_test1} (={pr_c_given_t})')
print(f'Pr[C+|T++] = {ill_given_2_positive_tests/positive_test2} (={pr_c_given_2t})')

# Možný výstup:
# Pr[C+|T+] = 0.04761131747562618 (=0.047210300429184504)
# Pr[C+|T++] = 0.7123386457056321 (=0.7103718199608607)

```

**Poznámka:** Toto je případ kdy je nemoc velice zřídka a ty nemáš symptomy. Pokud máš symptomy a jdeš na test, tak nejsi náhodně vybraný člověk! Tento příklad je tedy spíš situace jdu darovat krev a oni musí udělat povinný test na HIV a ten vyjde pozitivní, ale přesto bych se neměl tolik strachovat, ale v klidu jít na druhý test (už to že chodím darovat krev negativně koreluje s nakažením HIV).

"rozdělení : n spojitých"  
 na víku je OK pozitivní analýza (nevytáhně se)  
 na rovnice / písemce řešení se je budete muset

2. Pojdme se podívat na další vlastnosti jednotlivých rozdělení:

(a) Bernoulli:

- Kde se použije?

**Řešení:** Pokus, který má jen dva výsledky  $X = 0$  nebo  $X = 1$  kde  $X \sim \text{Bern}(p)$  a  $p \in [0, 1]$ . Zápis  $X \sim \text{Bern}(p)$  znamená, že  $\Pr[X = 1] = p$ . Například hod (cinklou) mincí kde  $X: \{\text{hlava, orel}\} \rightarrow \{0, 1\}$ .

- Jakou má střední hodnotu a rozptyl?

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
 X &\sim \text{Bern}(p) && (p \in [0, 1]) \\
 \Pr[X = 1] &= p = 1 - \Pr[X = 0] \\
 \mathbb{E}[X] &= p \\
 \text{var}(E) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = p - p^2
 \end{aligned}$$

$X = \sum_{j=1}^n X_j$

$X_1 \sim \text{Bern}(p), X_2 \sim \text{Bern}(p), \dots, X_n \sim \text{Bern}(p)$  nezávislé

- Co se stane, když sečtu dvě nebo obecně  $n$ -náhodných veličin  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , které jsou nezávislé a pro nějaké fixní  $p \in [0, 1]$  a každé  $j \in [n]$  platí že  $X_j \sim \text{Bern}(p)$ .

**Řešení:** Dostanu  $X = \sum_{j=1}^n X_j$  náhodnou veličinu. O té vím, že  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ , tedy že je rozdělená podle binomického rozdělení ( $n$  hodů, každý vyjde s pravděpodobností  $p$ ,  $X$  rovno počtu těch, které vyšly).



Poznámka: ta nezávislost je velice důležitý předpoklad! Pokud bychom například měli  $X_1 \sim \text{Bern}(p)$  a pak  $X_1 = X_2 = \dots = X_n$ , pak určitě nejsou nezávislé a jejich součet není rozdělený jako binomické rozdělení.

(b) geometrické:

- Kde se použije?

**Řešení:** Čekání na první úspěch v sérii Bernoulliho pokusů.

- Jakou má střední hodnotu a rozptyl?

**Řešení:**

$$\begin{aligned}
 X &\sim \text{Geom}(p) && (p \in [0, 1]) \\
 \Pr[X = n] &= (1 - p)^{n-1} p && (n = 1, 2, \dots) \\
 \mathbb{E}[X] &= 1/p && \leftarrow \text{(lemma o džbánu)} \\
 \text{var}(E) &= \frac{1 - p}{p^2}
 \end{aligned}$$

- Co se stane, když vezmeme minimum ze dvou nezávislých náhodných veličin  $X_1, X_2$ , které jsou kde  $X_1 \sim \text{Geom}(p_1)$  a  $X_2 \sim \text{Geom}(p_2)$ ?

**Řešení:** Dostaneme  $X = \min(X_1, X_2)$  kde  $X \sim \text{Geom}(1 - (1 - p_1)(1 - p_2))$

$$\begin{aligned}
 \Pr[X = k] &= \Pr[\min(X_1, X_2) = k] \\
 &= \Pr[X_1 = k, X_2 < k] + \Pr[X_1 < k, X_2 = k] + \Pr[X_1 = X_2 = k] \\
 &= (1 - p_1)^{k-1} p_1 \left( \sum_{j=1}^{k-1} (1 - p_2)^{j-1} p_2 \right)
 \end{aligned}$$

$$+ \left( \sum_{j=1}^{k-1} (1-p_1)^{j-1} p_1 \right) (1-p_2)^{k-1} p_2$$

$$+ (1-p_1)^{k-1} p_1 (1-p_2)^{k-1} p_2$$

zbytek výpočtu pro odvázné.

(c) Binomické:

- Kde se použije?

**Řešení:** Počet úspěchů z  $n$  pokusů. Například pokud testovou otázku znám s pravděpodobností  $p$  a celkem je otázek  $n$ , tak mám správně  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  z nich.

- Jakou má střední hodnotu a rozptyl?

**Řešení:**

$X \sim \text{Bin}(n, p)$  (n ∈ ℕ, p ∈ [0, 1])

$\Pr[X = j] = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$  (pro libovolné 0 ≤ j ≤ n)

$E[X] = np$  (linearita střední hodnoty)

$\text{var}(E) = n(p - p^2)$  (rozptyl nezávislých je součet rozptylů – domácí úkol)

*Lineární E*  
*střední hodnoty*  
*jednoduchý*  
*rozptyl*  
 $E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2]$

*že správně*

- Co se stane, když sečtu dvě náhodné veličiny  $X_1, X_2$ , které jsou nezávislé a pro nějaké fixní  $p \in [0, 1]$  platí  $X_1 \sim \text{Bin}(n, p)$  a  $X_2 \sim \text{Bin}(m, p)$  (kde  $n, m \in \mathbb{N}$ ).

**Řešení:** Pokud  $X = X_1 + X_2$ , pak  $X \sim \text{Bin}(n + m, p)$  (napřed udělám  $n$  pokusů a pak  $m$  nebo rovnou udělám  $n + m$  pokusů).

Můžeme to dokázat i formálně pomocí takzvané konvoluce:

*konvoluce (výsledek u násobení polynomů)*

$$\Pr[X = j] = \sum_{k=0}^j \Pr[X_1 = k] \Pr[X_2 = j - k]$$

*2 + (j-2) = j*  
 (některé z pravděpodobností mohou být nulové)

$$= \sum_{k=0}^j \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \binom{m}{j-k} p^{j-k} (1-p)^{m-(j-k)}$$

$$= p^j (1-p)^{m+n-j} \sum_{k=0}^j \binom{n}{k} \binom{m}{j-k}$$

*re distribuce*

$$= p^j (1-p)^{m+n-j} \binom{n+m}{j}$$

*m | m*  
*2 | j-2*

(d) Poissonovo:

- Kde se použije?

**Řešení:** Pokud známe průměrný počet výskytů za nějaký čas a každý výskyt je nezávislý na ostatních (příklady z [https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson_distribution)):

– Například počet atomů, které se rozpadnou za minutu v našem vzorku.

*5 lidských těle 5000 rozpadů za 1 (možná za min?)*

$E[\text{stick před rozpadem}] = \frac{\# \text{ lidí Geigerova počítače}}{\text{minuta}}$  Pois má míru

alkohol? # náhodnět. izolace r? abych u pro Binom  
 $\mu = Pr[1 \text{ ized. se na 1 min rozpadne}] \checkmark$

- Počet záplav na daném území ve sto letech (aby pojišťovna mohla spočítat kolik má být pojistné aby s dobrou pravděpodobností neprodělala).

- Počet gólů v jednom fotbalovém zápase.  $E = 2,5$

Většinou je to jen aproximace v našem vzorku není nekonečně mnoho atomů, záplav ve sto letech taky nebude milion, počet gólů ve fotbalovém zápase taky nebude libovolně velký).

• Jakou má střední hodnotu a rozptyl?

Řešení:

$X \sim Pois(\lambda)$  *stímle se může líp rozšířit* ( $\lambda > 0$ )  
 $Pr[X = k] = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$  *dobře srovnání s binomial (factorial... Stirling) na exponenty log tabulky* ( $k \in \mathbb{N}$ )  
 $E[X] = \lambda$   
 $var(E) = \lambda$

*rozp. / p*  
 $\lambda$   
 $\mu$  rozp. / a

• Co se stane, když sečtu dvě náhodné veličiny  $X_1, X_2$ , které jsou nezávislé a  $X_1 \sim Pois(\lambda)$ , a  $X_2 \sim Pois(\mu)$ .

Řešení: Dokážeme, že  $X = X_1 + X_2$  je rozdělená  $X \sim Pois(\lambda + \mu)$ :

$$\begin{aligned}
 Pr[X = k] &= \sum_{j=0}^k Pr[X_1 = j] Pr[X_2 = k - j] \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} \frac{\mu^{k-j} e^{-\mu}}{(k-j)!} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{j=0}^k \frac{\lambda^j}{j!} \frac{\mu^{k-j}}{(k-j)!} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} \lambda^j \mu^{k-j}}{k!} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j \mu^{k-j}}{k!} \\
 &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^k}{k!}
 \end{aligned}$$

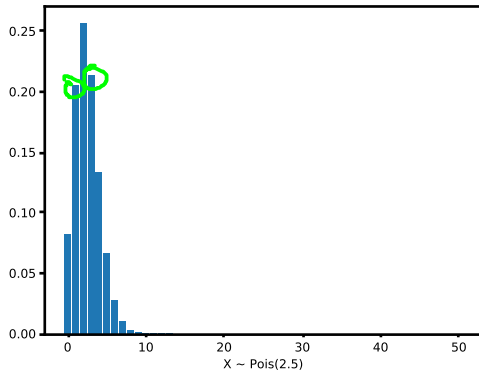
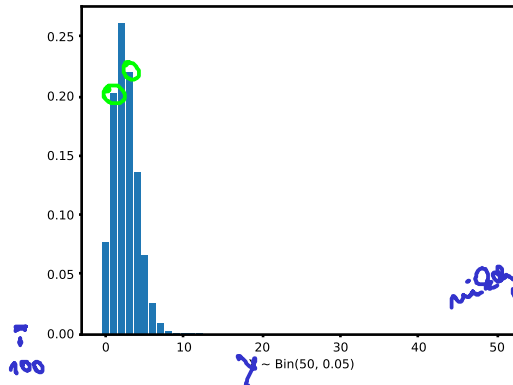
*binomial věta*

$n.p. = E[X \sim Bin(n, p)] \approx E[Y \sim Pois(\lambda)] = \lambda$

• Co se stane, pokud zvolíme  $\lambda = np$  a porovnáme Poissonovo rozdělení a binomiální rozdělení?

Řešení: Pokud  $n \geq 20, p \leq 0.05$  (nebo  $n \geq 100, np \leq 10$ ), pak ta rozdělení jsou dost podobná. Porovnejte na obrázcích pro první volbu  $n = 50, p = 0.05, \lambda = np = 2.5$ :

$$P_n[X=100] = \frac{e^{-100} 100^{100}}{100!} \ll 1 \quad \lambda = 2.5 \quad e = 2.71$$

(a) Poissonovo rozdělení s parametrem  $\lambda$ .

(b) Binomiální rozdělení

Obrázek 3.8: Aproximace binomiálního rozdělení Poissonovým.

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.special import comb

n = 50
p = 0.05
l = n * p # lambda is a python keyword

poisson = {}
for k in range(n+1):
    poisson[k] = l**k * math.exp(-l) / math.factorial(k)

plt.figure(0)
plt.bar(poisson.keys(), poisson.values())
plt.xlabel(f'X ~ Pois({l})')
# plt.ylabel("")
# plt.show()
plt.savefig(f'poisson.pdf')

binomial = {k: comb(n, k, True) * p**k * (1-p)**(n-k) for k in range(n+1)}

plt.figure(1)
plt.bar(binomial.keys(), binomial.values())
plt.xlabel(f'X ~ Bin({n}, {p})')
# plt.ylabel("")
# plt.show()
plt.savefig(f'binomial.pdf')
```

Mimochodem to, že volíme  $\lambda = np$  a rozdělení jsou si podobná dává smysl, mají stejnou střední hodnotu a skoro i rozptyl (pro malé  $p$ ). Pokud bychom měli konstantní  $\lambda = np$  a limitili  $Bin(n, \lambda/n)$  pro  $n$  větší a větší, tak bychom dostali totéž rozdělení.

- Pro odvážné: ukažte, že pokud  $X_1 \sim Pois(\lambda_1)$  a  $X_2 \sim Pois(\lambda_2)$  jsou nezávislé, pak  $\Pr[X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n] = \Pr[Y = k]$  kde  $Y \sim Bin(n, \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2})$ .



## 3. de Mèreho problém házeme spravedlivými šestistrannými kostkami:

(a) Jaká je pravděpodobnost, že padne ze čtyř hodů aspoň jedna šestka?

**Řešení:** Můžeme spočítat pravděpodobnost, že ani v jednom ze čtyř hodů nepadne šestka a pak vzít pravděpodobnost doplňku:

$$\begin{aligned} \Pr[\text{ze čtyř hodů aspoň jedna šestka}] &= 1 - \Pr[\text{v žádném ze čtyř hodů nepadne šestka}] \\ &= 1 - (5/6)^4 \\ &= 0.5177 \end{aligned}$$

doplňková ... axiom  $\Pr[A] = 1 - \Pr[\Omega \setminus A]$

(b) Jaká je pravděpodobnost, že padne z 24 hodů dvojicí kostek aspoň jedna dvojité šestka?

**Řešení:** Obdobně:

$$1 - (35/36)^{24} = 0.4914$$

(c) De Mèreho problém spočíval v tom, jestli jsou odpovědi na části (a), (b) stejné. Tak se Chevalier de Mère zeptal Blaise Pascala a ten spolu s Pierre de Fermatem položili základy teorie pravděpodobnosti. 1610 ~ 1620

(d) Umíte úlohu interpretovat jako otázku o binomickém rozdělení?

**Řešení:** V první části se ptáme na otázku  $\Pr[X \geq 1]$ , kde  $X \sim \text{Bin}(4, 1/6)$ . Ve druhé části se ptáme na otázku  $\Pr[X \geq 1]$ , kde  $X \sim \text{Bin}(24, 1/36)$ .

(e) Umíte úlohu interpretovat jako otázku o geometrickém rozdělení?

**Řešení:** V první části se ptáme na otázku  $\Pr[Y \leq 4]$ , kde  $Y \sim \text{Geom}(1/6)$ . Ve druhé části se ptáme na otázku  $\Pr[Y \leq 24]$ , kde  $Y \sim \text{Geom}(1/36)$ .



$$S_{\text{okruh}} n=1 = \pi$$

4. Odhadněte  $\pi$  pomocí náhodných pokusů.

**Řešení:** Budeme generovat bod  $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$  uniformně náhodně, tedy  $x \sim U(0, 1)$  a  $y \sim U(0, 1)$  nezávislé. Pomocí experimentu odhadneme pravděpodobnost, že  $(x, y)$  leží ve čtvrtkruhu poloměru 1, tedy jestli  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

```
from random import random
```

```
N = 1_000_000
```

```
ve_cvtvrkruhu = 0
```

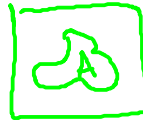
```
for _ in range(N):
    x = random()
    y = random()
    if x**2 + y**2 <= 1:
        ve_cvtvrkruhu += 1
```

```
# Kruh poloměru 1 má obsah pi
print(f'pi = {4*ve_cvtvrkruhu/N}')

```

```
# Možný výstup:
# pi = 3.14286

```



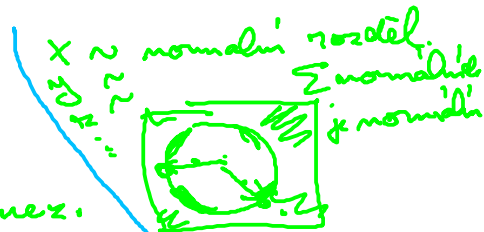
$$Pr[(x, y) \in A] = \frac{Pr[A]}{n}$$

$x \sim U(0, 1)$   
 $y \sim U(0, 1)$

"obsah A"

"míra A"

← náhodný bod  $\in [0, 1]$



$x \sim$  normální rozdělení  
 $y \sim$  normální rozdělení  
 $\Sigma$  normální  
 $\neq$  normální



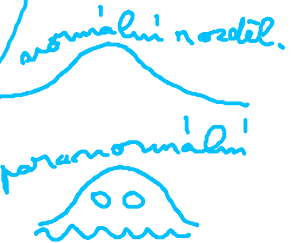
$x, y, z \sim U(0, 1)$  nez.  
 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

dimenze  $d \rightarrow \infty$  (velik!) → 0

$$\frac{V(B(0, 1))}{2^d} \rightarrow 0$$



"málo jsou velik!"



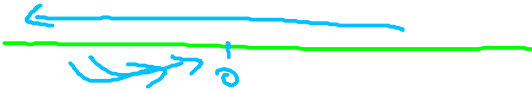
5. Nechť  $X$  je náhodná veličina. Vyjádřete pomocí  $F_X(t) = \Pr[X \leq t]$  pro každé  $t \in \mathbb{R}$  distribuční funkci náhodných veličin:

(a)  $X^+ = \max(0, X)$

$F_{X^+}$  ?

Řešení:

$$\begin{aligned} \Pr[X^+ \leq t] &= \Pr[\max(0, X) \leq t] \\ &= \Pr[X \leq t] \\ &= F_X(t) \end{aligned} \quad (\text{pro } t \geq 0)$$

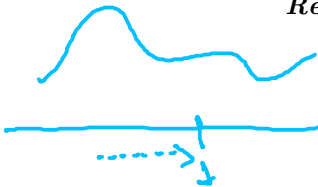


Pro záporná  $t$ :

$$F_{X^+}(t) = \Pr[\max(0, X) \leq t] = 0 \quad (\text{pro } t < 0)$$

(b)  $-X$

Řešení:



$$\begin{aligned} F_{-X}(t) &= \Pr[-X \leq t] = \Pr[X \geq -t] \\ &= 1 - \Pr[X < -t] \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow (-t)^-} F_X(x) \end{aligned} \quad \neq 1 - F_X(-t) \quad \text{protože } \Pr[X = -t] > 0$$

(limita když  $x$  se blíží k  $-t$  zleva)



(c)  $X^- = -\min(X, 0)$

Řešení:

$$\begin{aligned} \Pr[X^- \leq t] &= \Pr[-\min(0, X) \leq t] \\ &= \Pr[-t \leq X] \\ &= 1 - \Pr[X < -t] \\ &= 1 - \lim_{x \rightarrow (-t)^-} F_X(x) \end{aligned} \quad (\text{pro } t \geq 0)$$

(d)  $|X|$

Řešení: Rovnou jako absolutní hodnota:

$$\begin{aligned} \Pr[|X| \leq t] &= \Pr[-t \leq X \leq t] \\ &= F_X(t) - \lim_{x \rightarrow (-t)^-} F_X(x) \end{aligned} \quad (\text{pro } t \geq 0)$$



6. Mějme spojitou náhodnou veličinu  $X$  danou její pravděpodobnostní hustotou (probability density function – PDF)

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 2/x^3 & t \geq 1 \end{cases}$$

- (a) Spočítejte  $\Pr[X \in [5, 10]]$ .

Řešení:

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$F_X(x) - F_X(5) = \lim_{t \rightarrow 5^+} F(t) =$$

$$\begin{aligned} \Pr[X \in [5, 10]] &= \int_5^{10} f_X(x) dx \\ &= \int_5^{10} 2/x^3 dx \\ &= [-1/x^2]_5^{10} \\ &= -1/100 - (-1/25) \\ &= 0.03 \end{aligned}$$

WOLFRAMALPHA

- (b) Spočítejte  $\Pr[X \geq 100]$ .

Řešení:

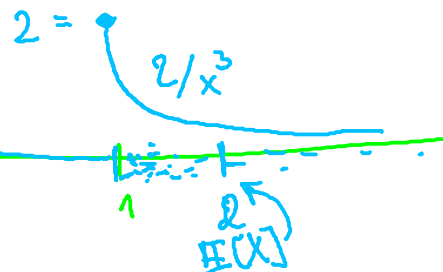
$$\begin{aligned} \Pr[X \geq 100] &= \int_{100}^{\infty} f_X(x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{100}^b f_X(x) dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-1/x^2]_{100}^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -1/b^2 + 1/10000 \\ &= 1/10000 \end{aligned}$$

- (c) Spočítejte  $\mathbb{E}[X]$ .

Řešení:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \\ &= \int_1^{\infty} x \cdot 2/x^3 dx \\ &= \int_1^{\infty} 2/x^2 dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b 2/x^2 dx \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} [-2/x]_1^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} -2/b + 2/1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$F_X$  2.



$$F_X(t) = \Pr[X \leq t]$$

(d) Určete distribuční funkci (cumulative distribution function – CDF).

Řešení:

$$F_X(t) = \Pr[X \leq t]$$

$$= \int_{-\infty}^t f_X(x) dx$$

$$= \int_1^t 2/x^3 dx$$

$$= [-1/x^2]_1^t$$

$$= -1/t^2 - (-1/1)$$

$$= 1 - 1/t^2$$

$$f_X(t) = 0 \text{ pro } t < 1$$

Pro  $t < 1$  máme  $F_X(t) = 0$ . Pozor na to, že pro distribuční funkci musí platit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$$

takže integrační konstanta je jednoznačně určena.

7. Mějme spojitou nezápornou náhodnou veličinu  $X$ , která má hustotu (probability density function – PDF)  $f_x$  (a tedy cumulative distribution function – CDF  $F_X(t) = \int_0^t f_X(x) dx$ ). Ukažte, že  $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f_X(x) dx = \int_\Omega F_X(\omega) d\Pr(\omega) = \int X d\Pr$ .

Pokud by  $X$  nebyla nezáporná, tak ji můžeme vyjádřit jako rozdíl dvou nezáporných náhodných veličin.

**Řešení:** Napřed dle definice z minula upravme ten druhý integrál:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F_X(\omega) d\Pr(\omega) &= \int_0^\infty \Pr[X > t] dt \quad \text{Lebesgue} \\ &= \int_0^\infty 1 - \Pr[X \leq t] dt \quad \text{↓ doplň} \\ &= \int_0^\infty 1 - F_X(t) dt = \mathbb{E}[X] = \int_0^\infty t f_X(t) dt \end{aligned}$$

*tobto funguje pro diskrétní násp.*

tedy chceme ukázat rovnost:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x f_X(x) dx = \int_0^\infty 1 - F_X(t) dt$$

Napřed spočítáme ten integrál jen do  $b > 0$ , pak vezmeme limitu  $b \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \int_0^b x f_X(x) dx &= [x F_X(x)]_0^b - \int_0^b F_X(x) dx \quad \text{per partes} \\ &= b F_X(b) - \int_0^b F_X(x) dx \\ &= \int_0^b F_X(b) - F_X(x) dx \end{aligned}$$

*↑ konst.*

A pak už jen využijeme toho, že  $\lim_{b \rightarrow \infty} F_X(b) = 1$ .

Přiznejme ještě, že jsme nezdůvodnili, že si můžeme sáhnout limitu  $F_X(b)$  uvnitř toho integrálu.