Tuto sadu domácích úkolů odevzdejte do 4.11.2020. Nebojte se posílat částečná řešení. Prosím nevymýšlejte řešení hromadně na fórech. Maximálně ve třech lidech a to zásadně každý online a jen přes hovor! Ujistěte se, že každý bude sepisovat sám! Pouhé vyzrazení řešení není spolupráce na vymýšlení, každý musí přispět! Napište s kým jste spolupracovali.

[Úkol 1.1] 2 body Nechť (X, d) je metrický prostor. Nechť $A \subseteq X$ je libovolná množina. Definujeme $\operatorname{diam}(A) = \sup \{d(a, b) \mid a, b \in A\}$. Dokažte, že $\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A})$ (diameter množiny je stejný jako diameter jejího uzávěru).

[Úkol 1.2] 2 body Nechť $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ jsou dva konkrétní reálné vektory (n-tice konstant, které znáte). Nechť $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dána předpisem

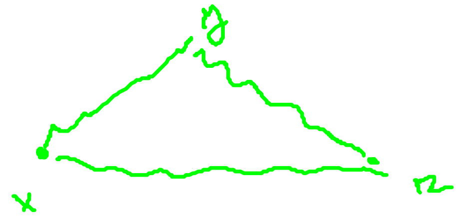
$$f(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta - y_i)^2 .$$

1. Spočítejte parciální derivace $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(\alpha, \beta)$, $\frac{\partial}{\partial \beta} f(\alpha, \beta)$.
2. Pro které α, β jsou obě předchozí parciální derivace rovné nule (vyjádřete pomocí známých hodnot $\vec{x}, \vec{y}$)?

1) (X,d) je metrický prostor

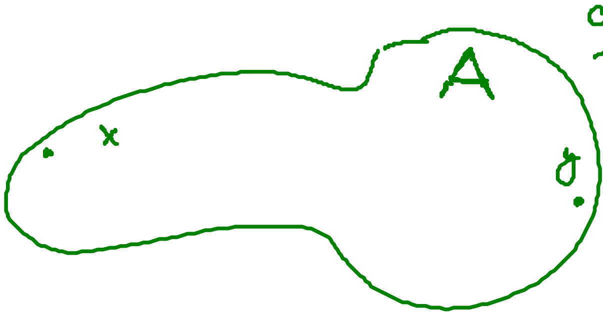
X je množina, $d : X \times X \to \mathbb{R}$

- $\forall x,y \in X \quad d(x,y) = d(y,x)$
- $\forall x,y \in X \quad d(x,y) = 0 \iff x = y$
- $\forall x,y \in X \quad d(x,y) \geq 0$
- $\triangle$-nerovnost $\forall x,y,z \in X \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$



~~$d(x,y) = \operatorname{diam}(A)$~~

menší!



$A \subseteq \mathbb{R}$

$A =$ otevřený $(0,1)$

$\operatorname{diam}(A) = 1$

$d(x,y) = |x-y|$

diam je supremum $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists a, b \in A \ d(a,b) \geq \operatorname{diam}(A) - \varepsilon$

diam = 1 $\quad \varepsilon = 0.1$

$|0.95 - 0.001| \geq 1 - 0.1$

$\exists \quad \exists \quad \forall$ jen pokud $\operatorname{diam}(A) \in \mathbb{R}$ $(\neq \infty)$

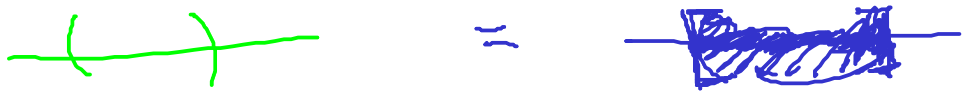
✓ 1) $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(\overline{A})$

2) $\operatorname{diam}(\overline{A}) \leq \operatorname{diam}(A)$

1) $A \subseteq \overline{A}$ $\quad \sup\{d(x,y) \mid x,y \in A\} \leq \sup\{d(x,y) \mid x,y \in \overline{A}\}$

všechny $\quad$ je i tady

$\forall$ uzávěr je celá A + možná ještě něco navíc



2) $\overline{A}$ $\quad \cancel{\exists?}$ $a, b \in \overline{A}$ tž $d(a,b) = \operatorname{diam}(\overline{A})$

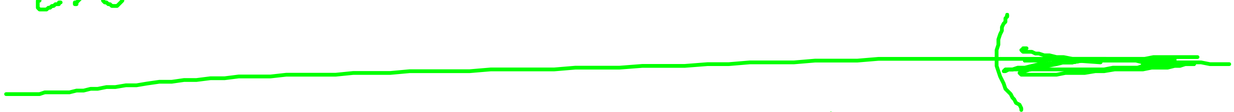
$A \subseteq \mathbb{R} \qquad A = \mathbb{Q} \qquad \operatorname{diam}(\mathbb{Q}) = \infty$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

v m.p. $(\mathbb{R}, (x,y) \mapsto |x-y|)$

ε-okolí + nekonečna $\quad \left(\frac{1}{\varepsilon}, \infty\right)$

$\varepsilon > 0$



$\infty \notin \mathbb{R}$

$\Omega(x, \delta) = \{y \in X \mid d(x,y) < \delta\}$

2) a) $\operatorname{diam}(\overline{A}) \in \mathbb{R}$

b) $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \infty$

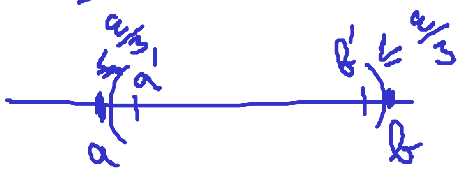
nebo obojí najednou

$$\operatorname{diam}(\overline{A}) = \sup\{d(a,b) \mid a,b \in \overline{A}\}$$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \forall a,b \in \overline{A} \quad d(a,b) \le \operatorname{diam}(A) + \varepsilon}$$

$$\overset{?}{\Updownarrow} \quad \operatorname{diam}(\overline{A}) \le \operatorname{diam}(A)$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \operatorname{diam}(\overline{A}) \le \operatorname{diam}(A) + \varepsilon$$

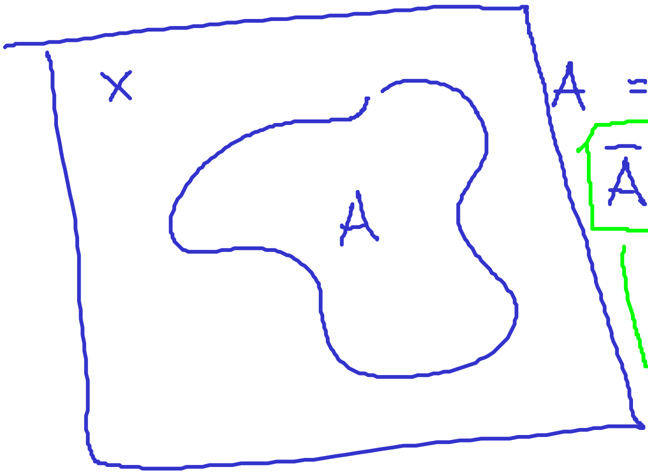


$\forall \varepsilon > 0 \quad a \in \overline{A} \Rightarrow \exists a' \in A \quad d(a,a') \le \frac{\varepsilon}{3}$ $\quad \boxed{\text{protože } d(a,A)}$

$b \in \overline{A} \Rightarrow \exists b'$

$$\triangle \quad d(a,b) \le d(a,a') + d(a',b) \overset{\triangle}{\le} \underbrace{d(a,a')}_{\le \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d(a',b')}_{\le \operatorname{diam}(A)} + \underbrace{d(b',b)}_{\le \frac{\varepsilon}{3}}$$

$$\le \operatorname{diam}(A) + \frac{2}{3}\varepsilon$$



$A = \{x\in X \mid \exists a\in A \ d(x,a)=0\}$

$\boxed{\bar{A} = \{x\in X \mid d(x,A) = 0\}}$

$\boxed{d(x,A) = \inf_{a\in A} d(a,x)}$

$x\in X$ $\quad A\subseteq X$

$q_1, q_2, q_3, \dots$ $\quad q_n \in \mathbb{Q}$ racionální čísla

předpokládám že existuje $\boxed{\lim_{n\to\infty} q_n} \in \mathbb{R}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\qquad \sqrt{2} = 1.41\dots$

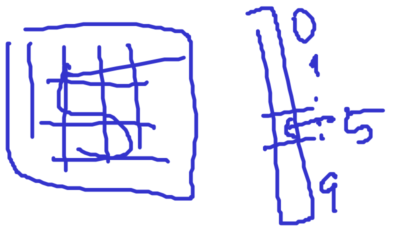
$q_1 = 1 \qquad q_2 = 1.4 \qquad q_3 = 1.41 \quad q_4 = \dots$

$\boxed{\text{argmin}}$

$f : \{1,2,3,4\} \to \mathbb{R}$

$\operatorname*{argmin}_{j\in\{1,2,3,4\}} f(j) \in \{1,2,3,4\}$

$f\left(\operatorname*{argmin}_{j\in\{1,2,3,4\}} f(j)\right) \le f(i) \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$



$f(\underline{2}) = f(\underline{4})$