Opakování.

Riemannův integrál ve vice proměnných.

Až do věty o existenci integrálu pro spojité funkce šlo všechno hladce.

n-rozměrný kompaktní interval (*cihla*) v $\mathbb{E}_n$ je

$$J = \langle a_1, b_1\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle.$$

Rozdělení intervalu J je posloupnost rozdělení $P = (P^1, \dots, P^n)$

$$P^j : \ a_j = t_{j0} < t_{j1} < \cdots < t_{j,n_j-1} < t_{j,n_j} = b_j,$$

Cihly v rozdělení P jsou

$$\langle t_{1,i_1}, t_{1,i_1+1}\rangle \times \cdots \times \langle t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}\rangle$$

a

$$\mathcal{B}(P)$$

je množina všech cihel v P.

Je to *skoro disjunktní* rozklad intervalu J.

Jemnost rozdělení P.
Pro $J = \langle r_1, s_1\rangle \times \cdots \times \langle r_n, s_n\rangle$ je

$$\mathsf{diam}(J) = \max_i (s_i - r_i);$$

a *jemnost* rozdělení P je

$$\mu(P) = \max\{\mathsf{diam}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

Zjemnění. Rozdělení $Q = (Q^1, \ldots, Q^n)$ *zjemňuje* rozdělení $P = (P^1, \ldots, P^n)$ jestliže každé Q^j zjemňuje P^j.

Znova máme triviálně pro každá dvě rozdělení P, Q n-drozměrného kompaktního intervalu J společné zjemnění.

Pro $f : J \to \mathbb{R}$ on J položíme

$$m(f, B) = \inf\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\} \quad \text{a}$$
$$M(f, B) = \sup\{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in B\},$$

a pro rozdělení P intervalu J a omezenou $f : J \to \mathbb{R}$

$$s(f, P) = \sum\{m(f, B) \cdot \mathsf{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\},$$
$$S(f, P) = \sum\{M(f, B) \cdot \mathsf{vol}(B) \mid B \in \mathcal{B}(P)\}.$$

S použitím společného zjemnění snadno dostaneme

Tvrzení. *Buďte P, Q libovolná rozdělení J. Potom platí*

$$s(f, P) \leq S(f, Q).$$

Můžeme tedy definovat dolní integrál

$$\underline{\int_J} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \sup\{s(f,P) \,|\, P \text{ rozdělení}\};$$

a horní integrál

$$\overline{\int_J} f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} = \inf\{S(f,P) \,|\, P \text{ rozdělení}\},$$

a jsou-li si rovny nazveme společnou hodnotu Riemannovým integrálem

$$\int_J f(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{nebo prostě} \quad \int_J f$$

Jiné značení:

$$\int_J f(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1,\ldots x_n$$

nebo

$$\int_J f(x_1,\ldots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n.$$

Tvrzení. *Riemannův integrál* $\int_J f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ *existuje právě když pro každé* $\varepsilon > 0$ *existuje rozdělení* P *takové, že*

$$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon.$$

Z tohoto (a ze stejnoměrné spojitosti) se dostane, stejně jako v jedné proměnné,

Věta. *Pro každou spojitou funkci* $f : J \to \mathbb{R}$ *na* n*-rozměrném kompaktním intervalu existuje Riemannův integrál* $\int_J f$.

Co ale NEMÁME je protějšek Základní Věty Analysy , zejména pak její důsledek, že

pro každou primitivní funkci G funkce f můžeme Riemannův integrál počítat jako

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a).$$

.

Prostředek k výpočtu vícerozměrného Riemannova integrálu nám nyní poskytne Fubiniova Věta.

Věta. (Fubini) *Vezměme součin* $J = J' \times J'' \subseteq \mathbb{E}_{m+n}$ *intervalů* $J' \subseteq \mathbb{E}_m$, $J'' \subseteq \mathbb{E}_n$. *Nechť* $\int_J f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{xy}$ *existuje a nechť pro každé* $\mathbf{x} \in J'$ *(resp. každé* $\mathbf{y} \in J''$*) existuje* $\int_{J''} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y}$ *(resp.* $\int_{J'} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x}$*). Potom je*

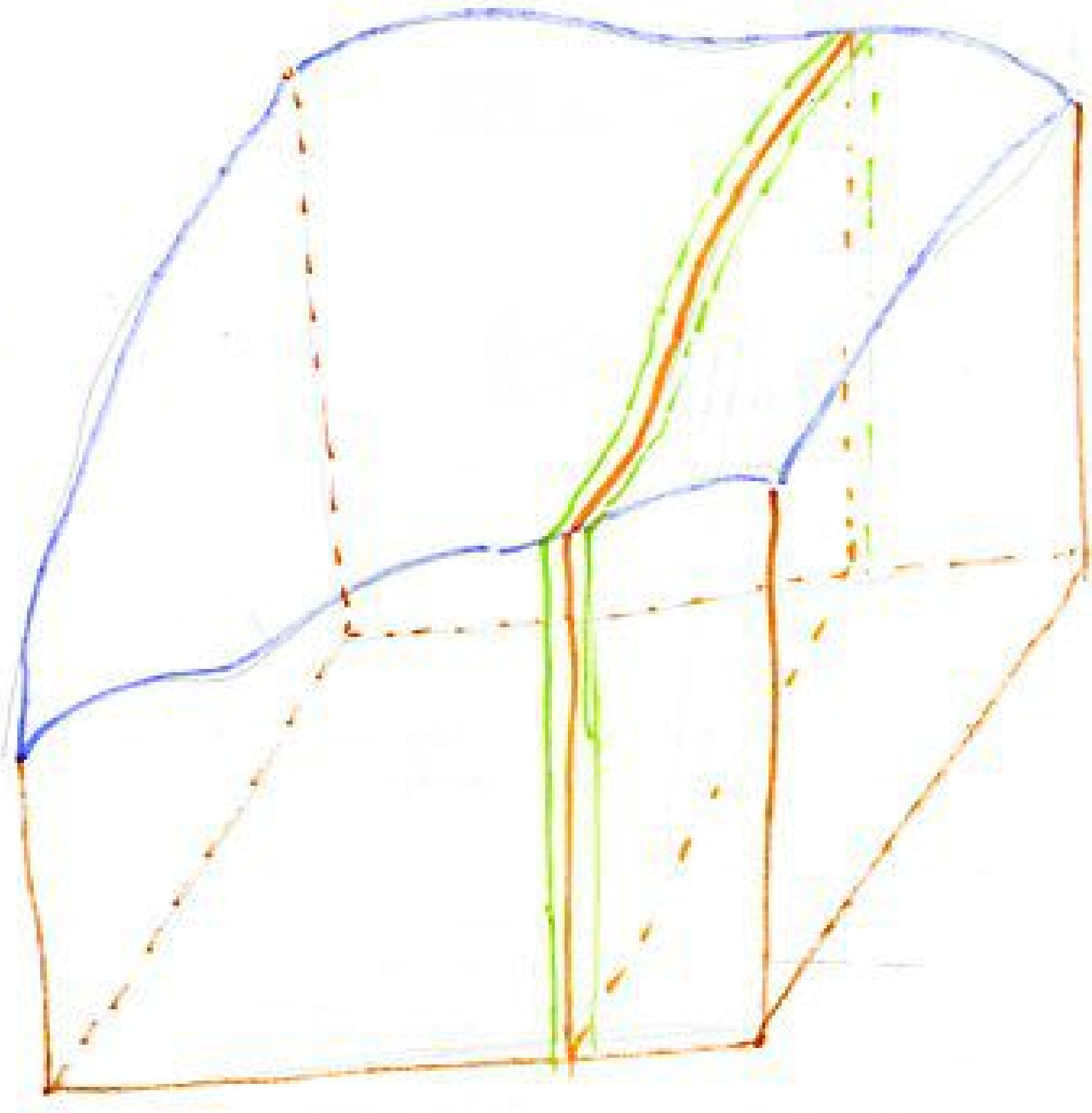
$$\int_J f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{xy} = \int_{J'}(\int_{J''} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{y})d\mathbf{x} = \\ = \int_{J''}(\int_{J'} f(\mathbf{x},\mathbf{y})d\mathbf{x})d\mathbf{y}.$$

Tedy ve dvou proměnných

$$\int_J f = \int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

a ve třech (a podobně dále)

$$\int_{a_1}^{b_1}\left(\int_{a_2}^{b_2}\left(\int_{a_3}^{b_3} f(x_1,x_2,x_3)\mathrm{d}x_3\right)\mathrm{d}x_2\right)dx_1$$



Před důkazem: Nic překvapivého, je to jako součet

$$\sum_{i\leq m, j\leq n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right)$$

a to je co se bude dít v důkazu s dolními a horními součty.

Důkaz Věty. Položme

$$F(\mathbf{x}) = \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Dokážeme, že $\int_{J'} F$ existuje a že

$$\int_J f = \int_{J'} F.$$

Zvolme rozdělení P intervalu J tak aby

$$\int f - \varepsilon \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq \int f + \varepsilon.$$

Toto P je tvořeno rozděleními P' intervalu J' a P'' intervalu J''. Máme

$$\mathcal{B}(P) = \{B' \times B'' \mid B' \in \mathcal{B}(P'), B'' \in \mathcal{B}(P'')\},$$

a každá cihla P se objeví jako právě jedno $B'\times B''$. Potom je

$$F(\mathbf{x}) \leq \sum_{B''\in\mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{y}\in B''} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot \mathsf{vol} B''$$

a tedy

$$\begin{aligned} S(F,P') &\leq \sum_{B'\in\mathcal{B}(P')} \max_{\mathbf{x}\in B'} \Big(\sum_{B''\in\mathcal{B}(P'')} \max_{\mathbf{y}\in B''} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot \mathsf{vol}(B'')\Big) \cdot \mathsf{vol}(B') \leq \\ &\leq \sum_{B'\in\mathcal{B}(P')} \sum_{B''\in\mathcal{B}(P'')} \max_{(\mathbf{x},\mathbf{y})\in B'\times B''} f(\mathbf{x},\mathbf{y}) \cdot \mathsf{vol}(B'') \cdot \mathsf{vol}(B') \leq \\ &\leq \sum_{B'\times B''\in\mathcal{B}(P)} \max_{\mathbf{z}\in B'\times B''} f(\mathbf{z}) \cdot \mathsf{vol}(B'\times B'') = S(f,P), \end{aligned}$$

a podobně

$$s(f,P) \leq s(F,P').$$

Máme tedy

$$\int_j f - \varepsilon \leq s(F,P') \leq \int_{J'} F \leq S(F,P) \leq \int_J f + \varepsilon$$

a $\int_{J'} F$ je roven integrálu $\int_J f$.

Příklad: Objem koule. Na intervalu $J = \langle -r, r\rangle \times \langle -r, r\rangle$ vezměme

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \text{ pro } r^2 - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

Objem koule o poloměru r je $2\int_J f$, tedy

$$2\int_{-r}^{r}\left(\int_{-r}^{r} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 2\int_{-r}^{r}\left(\int_{-u}^{u}\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

kde $u = \sqrt{r^2 - x^2}$. Nejdříve spočítáme

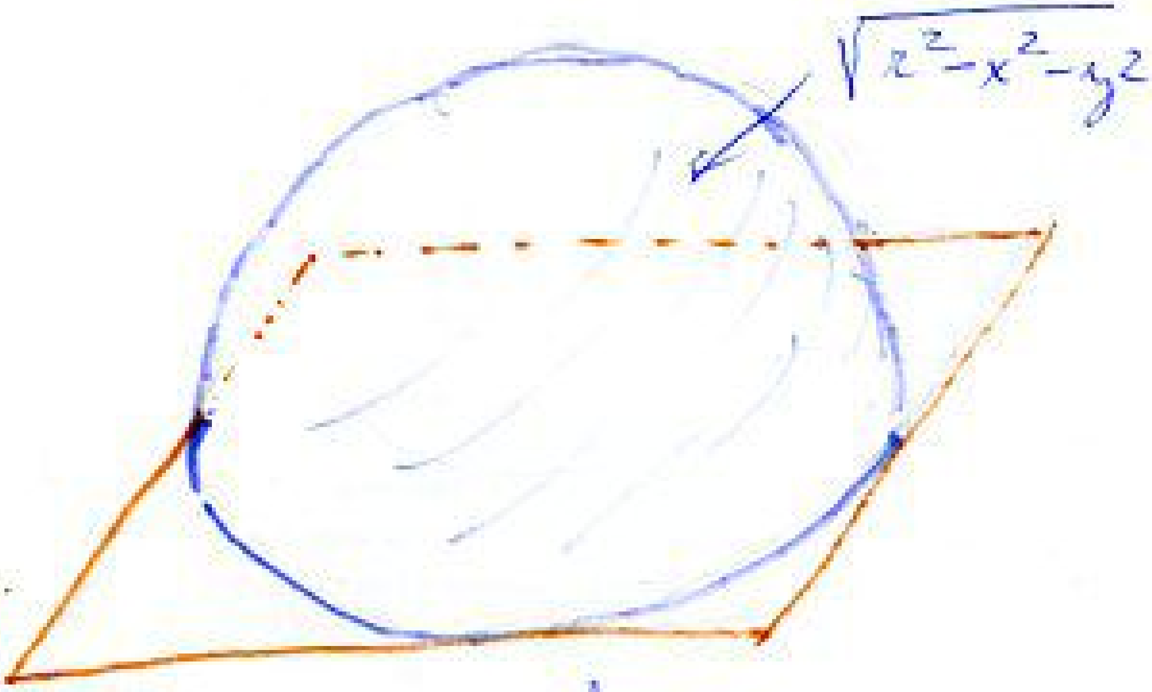
$$\int_{-u}^{u}\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}y = \int_{-u}^{u}\sqrt{u^2 - y^2}\mathrm{d}y = u\int_{-u}^{u}\sqrt{1 - (\frac{y}{u})^2}\mathrm{d}y.$$

Substituce $\frac{y}{u} = \sin t$ dává $\mathrm{d}y = u\cos t\mathrm{d}t$ a

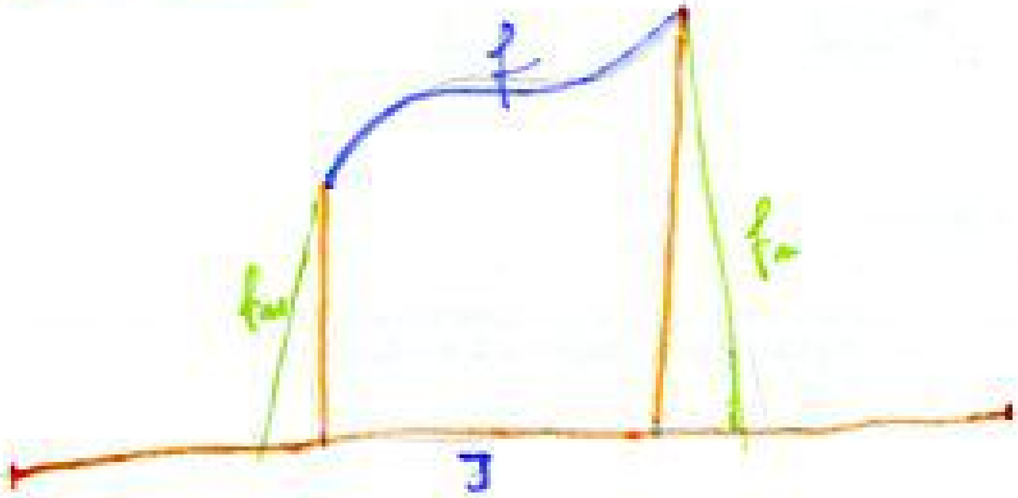
$$u\int_{-u}^{u}\sqrt{1 - (\frac{y}{u})^2}\mathrm{d}y = u^2\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\mathrm{d}t =$$
$$= u^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t = u^2\pi = (r^2 - x^2)\pi$$

s užitím primitivní funkce $\frac{\cos 2t + 1}{2}$ funkce $\cos^2 t$. Objem koule je tedy

$$2\pi\int_{-2}^{r}(r^2 - x^2)\mathrm{d}x = 2\pi(r^3 - \frac{1}{3}r^3) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$


$\sqrt{r^2-x^2-y^2}$


f
D


f
f_n
f_n
J

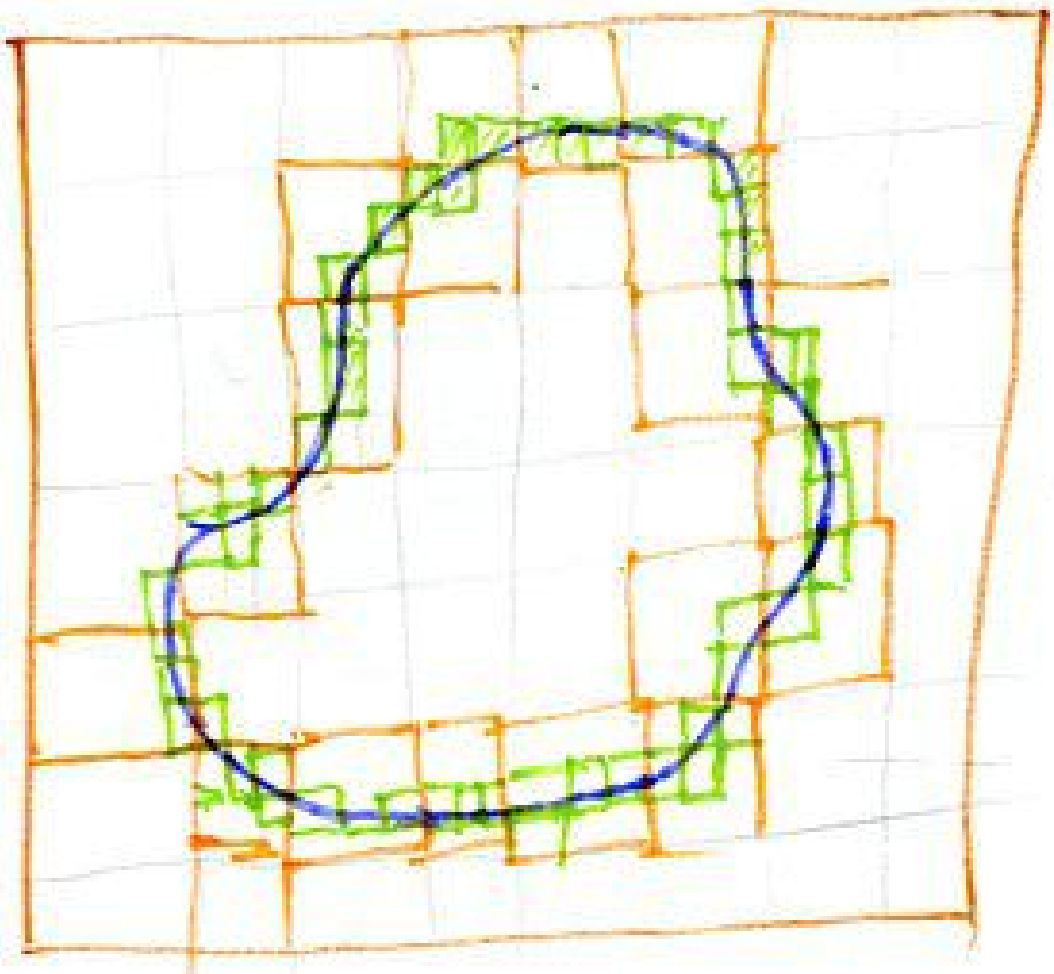
Tento příklad odhaluje též jinou potíž integrálu ve více proměnných. Na rozdíl od funkcí jedné proměnné kde interval byl celkem běžný definiční obor, funkce v n proměnných není typicky definována na cihle. Co obvykle uděláme s takovou funkcí definovanou, dejme tomu, na kompaktní (tedy omezené uzavřené D) je toto:

- nejprve vložíme D do cihly J,
- a potom rozšíříme f hodnotami 0 na $J \setminus D$.

Ale pořád je zde problém. Má takto rozšířená funkce Riemannův integrál? V našem příkladě jsme měli štěstí: při rozšíření $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ z kruhu $\{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq r^2\}$ na ten čtverec vznikla spojitá funkce.

Obecně typicky při užití Fubiniovy věty dostáváme v jednotlivých proměnných Riemannovy integrály funkcí jedné proměnné s konečně mnoha nespojitostmi, a ty jsou v pořádku (VYSVĚTLIT).

To není úplně korektní: Fubiniova věta v naší formulaci předpokládá existenci celého integrálu $\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{xy}$, nejen třeba všech $F(\mathbf{x}) = \int_{J''} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{y}$ a navíc existenci $\int_{J'} F(\mathbf{x}) \mathrm{d}\mathbf{x}$. Obvykle však je existence integrálu $\int_J f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathrm{d}\mathbf{xy}$ patrná z toho, že i když je bodů nespojitosti nekonečně mnoho, leží všechny na okraji oblasti D a tento okraj má viditelně objem 0.



První poznámka o Lebesgueově integrálu.

Riemannův integrál se dá rozšířit tak, že např. můžeme korektně počítat

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n$$

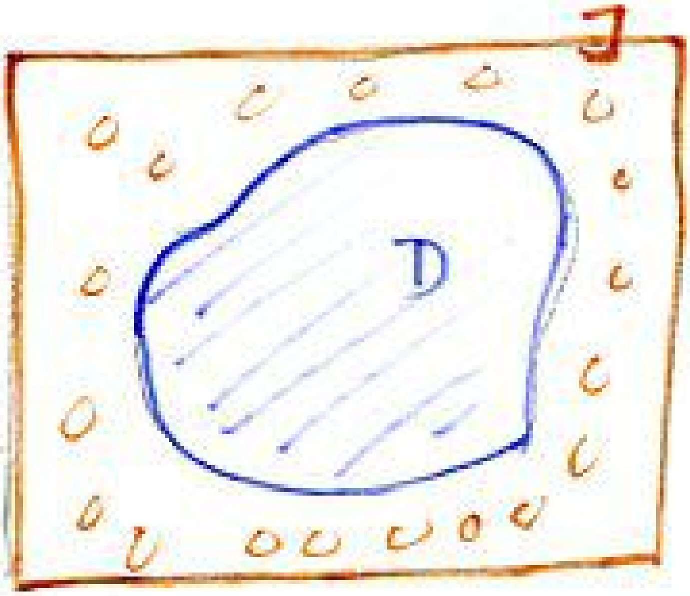
přepokládajíce jen, že $|f_n(\mathbf{x})| \leq K$ pro nějakou konstantu K.

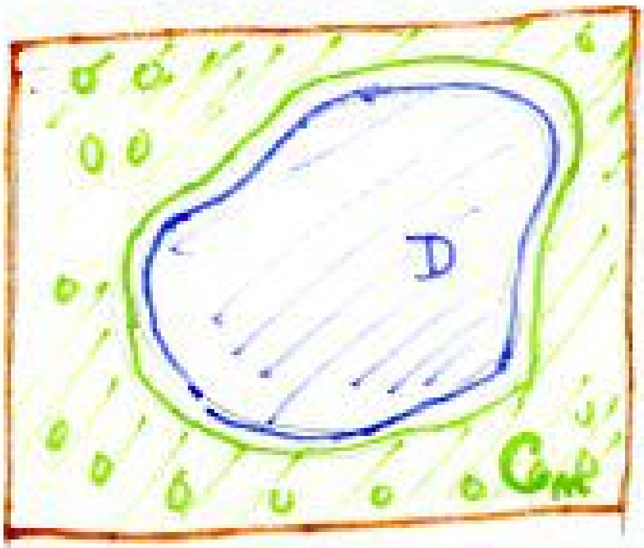
Pro $D \subseteq J$ v kompaktním n-rozměrném intervalu J a f spojitou na D můžeme postupovat takto: definujeme

$$J_n = \{x \mid d(x, D) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Potom g_n definovaná na J_n jako 0, a jako f na D, je spojitá a můžeme ji rozšířit na stejně omezenou f_n na J (Tietzeova Věta). Potom

$$\lim f_n \text{ je } f \text{ na } D \text{ a } 0 \text{ jinde.}$$





$C_n = \{ x \mid d(x, D) \geq \frac{1}{n} \}$

f_n ... $f_n | D = f$

<u>continuous</u> $f_n | C_n = \text{const.}$

Poznámka. Integrál se nedá rozšířit tak, aby

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n$$

platilo zcela bez podmínek. Na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ definujme

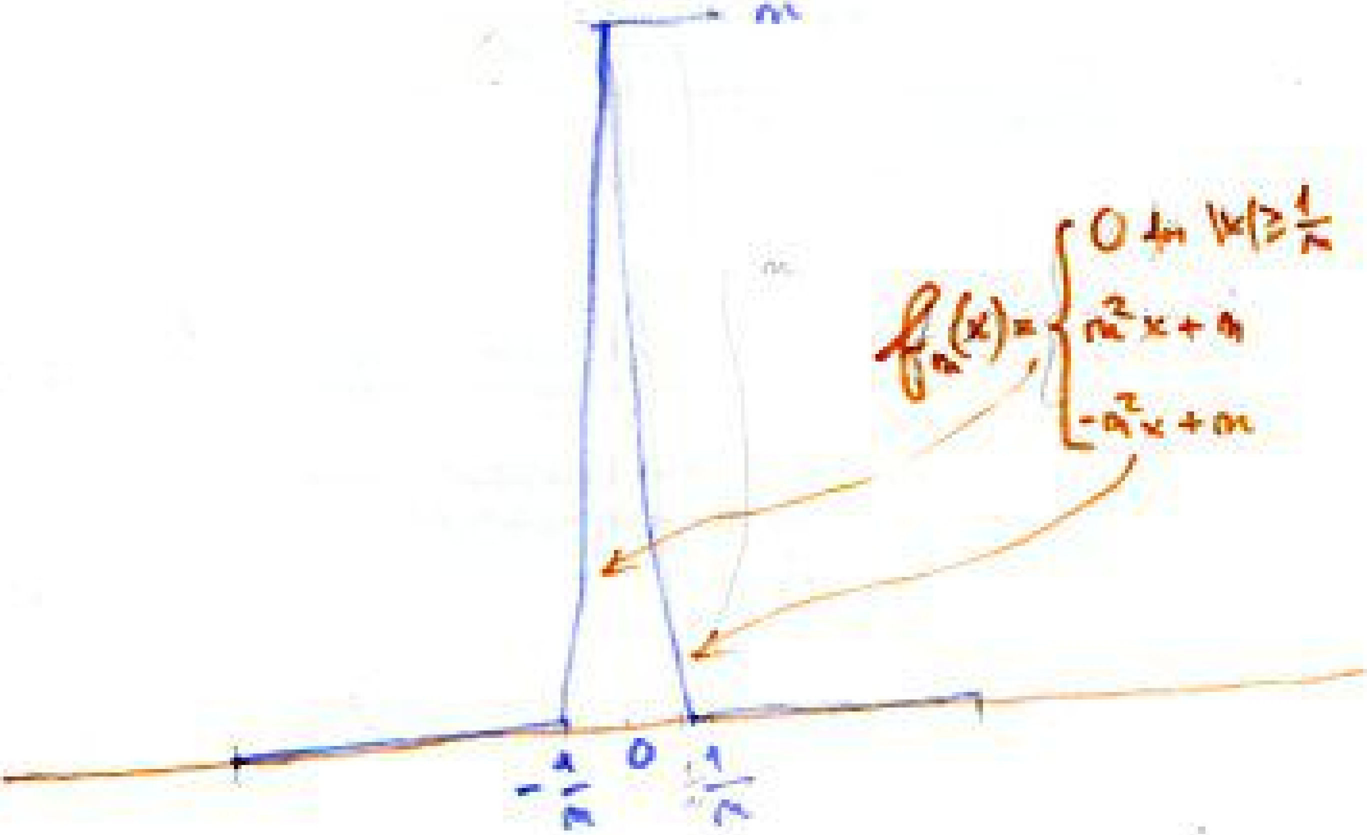
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } |x| \geq \frac{1}{n} \\ n^2x + n \text{ pro } -\frac{1}{n} \leq x \leq 0 \\ -n^2x + n \text{ pro } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$$

a

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ pro } x \neq 0 \\ n \text{ pro } x = 0 \end{cases}$$

Potom je

$$\int f_n = 1, \quad \int g_n = 0 \quad \text{and} \quad \lim f_n = \lim g_n.$$



$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } |x| \geq \frac{1}{n} \\ n^2 x + n \\ -n^2 x + n \end{cases}$$

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ for } x \neq 0 \\ n \text{ for } x = 0 \end{cases}$$

$$\int f_n(x)\,dx = 1 \qquad \int g_n(x)\,dx = 0$$

! $\lim f_n = \lim g_n$!

Podrobnosti.
Text: Kapitola XVI, Sekce 4