Vzpomínka na lineární algebru

U s basí $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$, $\mathbf{x} \in U$

$\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$,

$\mathbf{x} \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ (souřadnice)

Lineární zobrazení $L : U \to \mathbb{R}$ dostane tvar

$$L(\mathbf{x}) = \sum_i x_i L(\mathbf{u}_i) = \sum_i A_i x_i$$

kde $L(\mathbf{u}_i) = A_i$ (srovnejte s tot. diff.).

Když je nyní v V base $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ a α lineární zobrazení $U \to V$ máme pro $\alpha(\mathbf{u}_i) = \sum_j A_{ij}\mathbf{v}_j$ a $\mathbf{A}$ matici $(a_{ij})_{ij}$

$$\alpha(\mathbf{x}) = \sum_i x_i L(\mathbf{u}_i) = \sum_i x_i \sum_j A_{ij}\mathbf{v}_j =$$

$$= \sum_j (\sum_i x_i A_{ij})\mathbf{v}_j = \mathbf{x}\mathbf{A}$$

Poslední je maticové vynásobení $\mathbf{x}$ representovaného jako $(x_1, \ldots, x_n)$ s maticí $\mathbf{A}$.

Tedy máme-li podobně další $\beta : V \to W$ s maticí $\mathbf{B}$ bude pro složené zobrazení

$$\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{x}(\mathbf{A}\mathbf{B}).$$

Tedy:

jsou-li lineární zobrazení representovány maticemi $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$, *je jejich složení representováno maticovým součinem*

$$\mathbf{A}\mathbf{B}.$$

Opakování. Součin, hlavně si připomeňme, že v $(\prod_{i=1}^n X_i, d) = \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ zavádíme metriku

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i).$$

Zejména je

$$(\mathbb{E}_n, \sigma) = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \text{ krát}} = \mathbb{R}^n.$$

Parciální derivace jsou standardní derivace, limity

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\dots x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1} \dots) - f(x_1, \dots)}{h}.$$

Označení

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$$

Neuspokojivé, neimplikuje ani spojitost (ale to už nás asi nepřekvapuje).

Zejména nemáme analogii formule

$$(*)\ f(x+h)-f(x)=Ah+|h|\cdot\mu(h)$$

v té byla geometrie (tečna) a aproximace, ty teď schází.

Zavádí se pojem totálního diferenciálu

μ spojitá v okolí U bodu $\mathbf{o}$ taková, že $\mu(\mathbf{o})=0$

a čísla $A_1,\ldots,A_n$ pro která

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})=\sum_{k=1}^{n}A_kh_k+\|\mathbf{h}\|\mu(\mathbf{h})$$

To opravdu rozšiřuje $(*)$ nahoře, vysvětlit.

Implikuje to parciální derivace, ale ne naopak

ALE: plyne to ze spojitých parciálních derivací. Komentář.

Jak se s parciálními derivacemi počítá: aritmetická pravidla jako pro obyčejné derivace, skládání složitější.

Věta. *Nechť má* $f(\mathbf{x})$ **totální diferenciál** *v bodě* $\mathbf{a}$. *Nechť mají* $g_k(t)$ *derivace v bodě* b *a nechť je* $g_k(b) = a_k$ *pro* $k = 1, \ldots, n$. *Položme*

$$F(t) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t)).$$

Potom má F *derivaci v* b, *totiž*

$$F'(b) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot g_k'(b).$$

Důsledek. (Řetězové Pravidlo) *Nechť má* $f(\mathbf{x})$ *totální diferenciál v bodě* $\mathbf{a}$*. Nechť mají funkce* $g_k(t_1, \ldots, t_r)$ *parciální derivace v* $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_r)$ *a nechť je* $g_k(\mathbf{b}) = a_k$ *pro* $k = 1, \ldots, n$*. Potom má funkce*

$$(f \circ \mathbf{g})(t_1, \ldots, t_r) = f(\mathbf{g}(\mathbf{t})) = f(g_1(\mathbf{t}t), \ldots, g_n(\mathbf{t}))$$

všechny parciální derivace v $\mathbf{b}$*, a platí*

$$\frac{\partial (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

Skládali jsme

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

Skládejme místo f m-tici funkcí

$\mathbf{f} = (f_1 \ldots, f_m)$, tedy $\mathbf{f} : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$

$$\mathbb{E}_k \xrightarrow{\mathbf{g}} \mathbb{E}_n \xrightarrow{\mathbf{f}} \mathbb{E}_m$$

Pravidlo z předchozí věty dá tedy

$$\frac{\partial (f_i \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$

Zavedeme-li matice $D\mathbf{f} = \left(\frac{\partial f_i(\mathbf{a})}{\partial x_k}\right)_{ik}$ je

$D(\mathbf{f}\circ\mathbf{g}) = D\mathbf{f}\cdot D\mathbf{g}$ (napravo násobení matic)

a tak to má být. *$D\mathbf{h}$ je matice lineární aproximace funkce $\mathbf{h}$:*

lineární aproximace se skládají spolu s aproximovanými funkcemi.

Aritmetická pravidla z řetězového.

Násobení.

$f(u,v) = u \cdot v$. Potom $\dfrac{\partial f}{\partial u} = v$, $\dfrac{\partial f}{\partial v} = u$
a pro $u = \phi(x)$ a $v = \psi(x)$

$$
\begin{aligned}
(\phi(x).\psi(x))' &= \frac{\partial f}{\partial u}\phi'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}\psi'(x) = \\
&= \psi(x)\phi'(x) + \phi(x)\psi'(x)
\end{aligned}
$$

Dělení.

$f(u,v) = \frac{u}{v}$. Potom $\dfrac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{v}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}$
a pro $u = \phi(x)$ a $v = \psi(x)$

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\phi(x)}{\psi(x)}\right)' &= \frac{\partial f}{\partial u}\phi'(x) - \frac{\partial f}{\partial v}\psi'(x) = \\
&= \frac{1}{\psi(x)}\phi'(x) + \frac{\phi(x)}{\psi(x)^2}\psi'(x) = \\
&= \frac{\psi(x)\phi'(x) - \phi(x)\psi'(x)}{\psi(x)^2}
\end{aligned}
$$

$U \subseteq \mathbb{E}_n$ je *konvexní* jestliže

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \quad \Rightarrow \quad \forall t,\ 0 \le t \le 1,\ (1-t)\mathbf{x}+t\mathbf{y} = \mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \in U.$$

Lagrange v několika proměnných.

Tvrzení. *Nechť má f spojité parciální derivace v konvexní otevřené množině $U \subseteq \mathbb{E}_n$. Potom pro libovolné dva body $x, y \in D$ existuje θ, $0 \le \theta \le 1$, takové, že*

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x} + \theta(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}{\partial x_j}(y_j - x_j).$$

Důkaz. $F(t) = f(\mathbf{x}+t(\mathbf{y}-\mathbf{x}))$ je $F = f \circ \mathbf{g}$ s $\mathbf{g}$ kde $g_j(t) = x_j + t(y_j - x_j)$, a

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j} g_j'(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{g}(t))}{\partial x_j}(y_j - x_j).$$

Podle Lagrangeovy věty

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = F(1) - F(0) = F'(\theta).$$

Poznámka. Tato formule se často užívá ve tvaru

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x}+\theta\mathbf{h})}{\partial x_j}h_j.$$

Srovnejte ji s formulí pro totální diferenciál:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h})-f(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}h_j+\|\mathbf{h}\|\mu(\mathbf{h})$$

Když parciální derivace $\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_k}$ existuje pro všechna $(x_1, \dots, x_n)$ v nějaké oblasti D' máme funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D' \to \mathbb{R}.$$

Máme-li funkci $g(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k}$ potom podobně jako počítání druhé derivace funkce jedné proměnné můžeme počítat druhé derivace funkce $f(\mathbf{x})$, tedy

$$\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_l}.$$

Výsledek, pokud existuje, se pak značí

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Iterováním této procedury dostaneme

$$\frac{\partial^r f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_r}},$$

parciální derivace řádu r.

Řád je dán tím, kolikrát derivujeme, ne tím, kolikrát se to opakuje v jednotlivých proměnných.

$$\frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial y \partial z} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^3 f(x,y,z)}{\partial x \partial x \partial x}$$

jsou derivace třetího řádu.

Derivování podle téže proměnné těsně za sebou se píše jako exponent, např.

$$\frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x \partial x \partial x \partial y \partial y},$$

$$\frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^5 f(x,y)}{\partial x \partial x \partial y \partial y \partial x}.$$

Příklad který něco napoví.

Počítejme "smíšené" derivace druhého řádu funkce

$$f(x,y) = x\sin(y^2+x).$$

Nejprve dostaneme

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \sin(y^2+x) + x\cos(y^2+x),$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xy\cos(y^2+x).$$

a potom derivace druhých řádů,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y\cos(y^2+x) - 2xy\sin(y^2+x)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y\cos(y^2+x) - 2xy\sin(y^2+x).$$

<u>Vyšlo totéž !</u>

Tvrzení. *Buď* $f(x,y)$ *funkce taková, že parciální derivace* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *a* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *jsou definovány a jsou spojité v nějakém okolí bodu* (x,y)*. Potom máme*

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Všimněte si, se požadují

spojité parciální derivace,

tedy

víc než totální diferenciál .

Důkaz. Pokusíme se spočíst obě derivace v jednom kroku, tedy počítejme limitu $\lim_{h\to 0} F(h)$ funkce

$$F(h) = \frac{f(x+h, y+h) - f(x, y+h) - f(x+h, y) + f(x, y)}{h^2}$$

Položíme-li

$$\varphi_h(y) = f(x+h, y) - f(x, y) \text{ a}$$
$$\psi_k(x) = f(x, y+k) - f(x, y),$$

dostaneme pro $F(h)$ dva výrazy:

$$F(h) = \frac{1}{h^2}(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y))$$
$$F(h) = \frac{1}{h^2}(\psi_h(x+h) - \psi_h(x)).$$

První: Funkce φ_h má derivaci (podle y, jinou proměnnou nemá)

$$\varphi_h'(y) = \frac{\partial f(x+h, y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

a tedy podle Lagrangeovy formule

$$F(h) = \frac{1}{h^2}(\varphi_h(y+h) - \varphi_h(y)) = \frac{1}{h}\varphi'_h(y+\theta_1 h) =$$
$$= \frac{\partial f(x+h, y+\theta_1 h)}{\partial y} - \frac{\partial f(x, y+\theta_1 h)}{\partial y}.$$

Potom, znovu podle L. formule,

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x+\theta_2 h, y+\theta_1 h)}{\partial y}\right) \qquad (*)$$

pro nějaká θ_1, θ_2 mezi 0 a 1.

Druhá , $\frac{1}{h^2}(\psi_h(x+h) - \psi_h(x))$ dá podobně

$$F(h) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x+\theta_4 h, y+\theta_2 h)}{\partial x}\right). \qquad (**)$$

Obě $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$ a $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ jsou spojité (x, y), a $\lim_{h\to 0} F(h)$ můžeme počítat z kterékoli výrazu z $(*)$ nebo $(**)$:

$$\lim_{h\to 0} F(h) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}.$$

Iterováním záměn z Tvrzení dostaneme

Důsledek. *Nechť má funkce f v n proměnných spojité parciální derivace do řádu k. Potom hodnoty těchto derivací záleží jen na tom kolikrát bylo derivováno v každé z individuálních proměnných $x_1, \ldots, x_n$.*

Tedy za daných předpokladů můžeme obecné parciální derivace řádu $r \leq k$ psát

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \ldots \partial x_n^{r_n}} \quad \text{kde} \quad r_1 + r_2 + \cdots + r_n = r$$

($r_j = 0$ indikuje absenci symbolu ∂x_j).

V dalším budeme potřebovat zase něco víc z metrických prostorů, zejména něco o kompaktnosti a úplnosti. Připomeňte si chování kompaktních (uzavřených omezených) intervalů, zejména to, že

- v nich má každá posloupnost konvergentní podposloupnost, a jsou to jediné z intervalů, pro které to platí,
- a že na nich každá spojitá funkce nabývá maxima a minima.

Dále si osvěžte pojem cauchyovské posloupnosti.

Informace a materiál k MA2
https://kam.mff.cuni.cz/ma2/

Detaily k přednáškám: (V textu)
MA2.1: XIII,1,2,3,4
MA2.2: I; XIII,5; XIV,2,3,5
MA2.3: XIV,3,5,4