

Vzory a obrazy

$$f : X \rightarrow Y, \quad A \subseteq X, \quad B \subseteq Y$$

Obraz podmnožiny $A \subseteq X$ v Y :

$$f[A] = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Vzor podmnožiny $B \subseteq Y$ v X :

$$f^{-1}[B] = \{x \mid f(x) \in B\}$$

Tedy dostaneme zobrazení

$$\mathfrak{P}(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{f[-]} \\ \xleftarrow{f^{-1}[-]} \end{array} \mathfrak{P}(Y).$$

Platí:

$$\begin{aligned} f[A] \subseteq B &\equiv A \subseteq f^{-1}[B], \\ f[f^{-1}[B]] &\subseteq B \quad f^{-1}[f[A]] \supseteq A \end{aligned}$$

Pozor: f^{-1} má dva významy:
inverse $f^{-1} : Y \rightarrow X$, nemusí existovat
část v symbolu $f^{-1}[-]$, má smysl vždy

Cvičení. 1. Je nějaký vztah mezi těmi
 f^{-1} a $f^{-1}[-]$?

2. Kdy platí $f^{-1}[f[A]] = A$?

3. Kdy platí $f[f^{-1}[B]] = B$?

Opakování. Potíže se zkoumáním funkce více proměnných přes jednotlivé souřadnice, příklad

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{for } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ještě ho budeme potřebovat.

Metrický prostor, metrika (vzdálenost), trojúhelníková nerovnost. $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{E}_n$

Okolí, otevřené a uzavřené množiny, uzávěr.

Spojitosť, konvergence, vzory otevřených resp. uzavřených množin.

Ekvivalentní a silně ekviv. metriky.

$$\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y).$$

V \mathbb{E}_n můžeme místo $\sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$ užívat

$$\max_i |x_i - y_i|.$$

Reálná funkce v n proměnných

bude pro nás

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subseteq \mathbb{E}_n$$

Podobně jako ve funkcích jedné proměnné nemůžeme se omezit na případy, kdy definiční obor je celý prostor \mathbb{E}_n . V případě funkcí jedné proměnné byly definiční obory obvykle intervaly nebo jednoduchá sjednocení intervalů. Tady budou definiční obory D složitější, často (ale ne vždy) otevřené množiny v \mathbb{E}_n .

O D se často mluví jako o oblasti na níž je funkce definovaná. To není termín (ve specifických kontextech toto slovo “oblast” termín je, tady ne).

Součiny. Pro $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ definujeme n kartézském součinu $\prod_{i=1}^n X_i$ metriku

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i).$$

Získaný

$$\left(\prod_{i=1}^n X_i, d\right) = \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$$

se nazývá součin prostorů (X_i, d_i) .

Píše se též

$$(X_1, d_1) \times \dots \times (X_n, d_n).$$

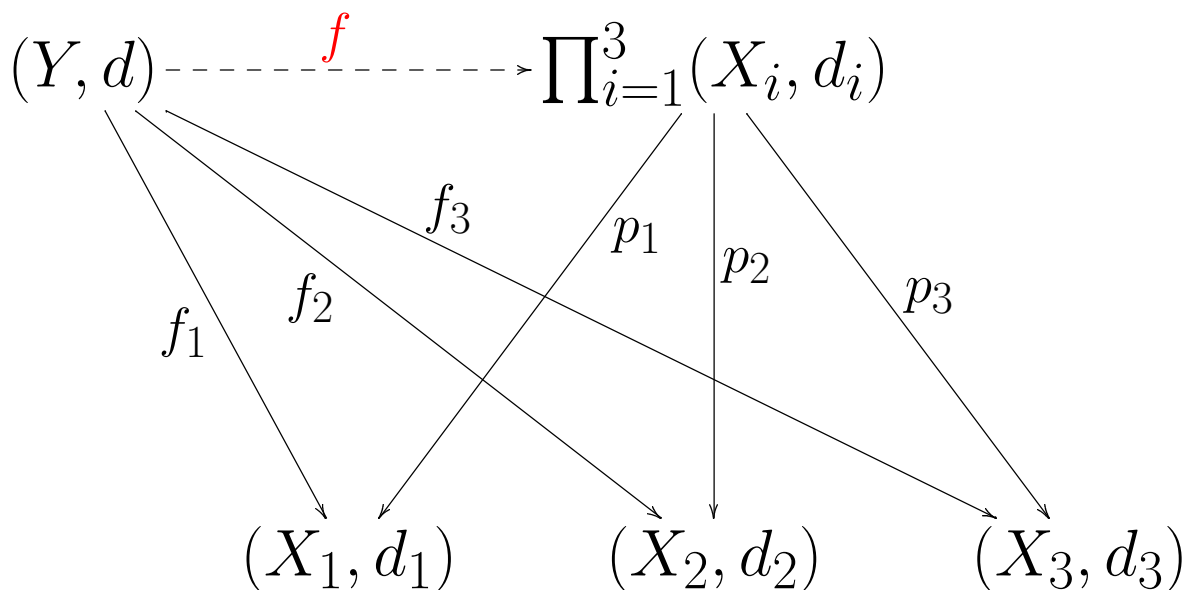
Tedy je

$$(\mathbb{E}_n, \sigma) = \overbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}^{n \text{ times}} = \mathbb{R}^n.$$

Věta. 1. Projekce $p_j = ((x_i)_i \mapsto x_j) : \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \rightarrow (X_j, d_j)$ jsou spojitá zobrazení.

2. Buďte $f: (Y, d') \rightarrow (X_j, d_j)$ libovolná spojitá zobrazení. Potom jednoznačně určené zobrazení $f : (Y, d') \rightarrow \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ splňující $p_j \circ f = f_j$, totiž zobrazení definované předpisem $f(y) = (f_1(y), \dots, f_n(y))$, je spojité.

Jak to vypadá



Existuje přesně jedno f takové že

$$p_i \circ f = f_i$$

a je spojité.

Tedy studujeme-li spojitá zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{E}_n \rightarrow \mathbb{E}_m$$

záleží na rozdíl od definičního oboru spojitost v oboru hodnot jen na spojitosti v jednotlivých souřadnicích.

2. Parciální derivace.

Teď na chvíli po souřadnicích. Pro $f(x_1, \dots, x_n)$ vezmeme

$$\phi_k(t) = f(x_1, \dots, x_{k-1}, t, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Parciální derivace funkce f podle x_k (v bodě (x_1, \dots, x_n)) je

(obvyklá) derivace funkce ϕ_k ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\dots x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1} \dots) - f(x_1, \dots)}{h}.$$

Označení

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n),$$

Pro $f(x, y)$, píšeme

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}, \quad \text{atd.}$$

Když $\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k}$ existuje pro všechna (x_1, \dots, x_n) v nějaké oblasti D máme funkci

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} : D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Když budeme mluvit o parciální derivaci bude vždy zřejmé máme-li na mysli funkci, nebo jen číslo (hodnotu té limity nahoře).

Všimněte si, že nespojitá funkce f z příkladu spojitosti po souřadnicích má obě parciální derivace v každém bodě. Tedy,

existence parciálních derivací zde neimplikuje spojitost !

Budeme potřebovat něco silnějšího.

Připomeňte si tvrzení ekvivalentní se standardní derivací:

Existuje μ konvergující k 0 při $h \rightarrow 0$

a

$$f(x + h) - f(x) = Ah + |h| \cdot \mu(h)$$

Geometrický pohled:

$f(x + h) - f(x) = Ah$ vyjadřuje tečnu ke grafu funkce v bodě $(x, f(x))$.

$|h| \cdot \mu(h)$ je jakási malá chyba.

Mysleme podobně o funkci $f(x, y)$ a uvažujme plochu

$$S = \{(t, u, f(t, u)) \mid (t, u) \in D\}.$$

Dvě parciální derivace vyjadřují směry dvou tečných přímk k S v bodě $(x, y, f(x, y))$,

ale ne tečnou rovinu

a teprve ta bude uspokojivé rozšíření faktu nahoře.

Pro $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_n$ definujeme

$$\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i|$$

To bude místo absolutní hodnoty, místo h bude n -tice blízka nule.

Totální diferenciál.

Funkce f má *totální diferenciál* v bodě \mathbf{x} existuje-li

funkce μ spojitá v okolí U bodu \mathbf{o} taková, že $\mu(\mathbf{o}) = 0$

a čísla A_1, \dots, A_n pro která

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n A_k h_k + \|\mathbf{h}\| \mu(\mathbf{h}).$$

Tvrzení. *Nechť má funkce f totální diferenciál v bodě \mathbf{a} . Potom platí, že*

- 1. f je spojitá v \mathbf{a} .*
- 2. f má všechny parciální derivace v \mathbf{a} , a to s hodnotami*

$$\frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} = A_k.$$

1. Máme

$$|f(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \leq |\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y})| + |\mu(\mathbf{x}-\mathbf{y})| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

a limita na pravé straně pro $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ je 0.

2. Máme

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (f(\dots x_{k-1}, x_k + h, x_{k+1}, \dots) - f(x_1, \dots)) &= \\ &= A_k + \mu((\dots, 0, h, 0, \dots)) \frac{\|(0, \dots, h, \dots, 0)\|}{h}, \end{aligned}$$

a limita na pravé straně je zřejmě A_k .

Všimněte si, že teď již spojitost dostaneme!

Vidíte, že v případě funkcí jedné proměnné není rozdíl mezi existencí derivace v bodě a a vlastností mít totální diferenciál v tomto bodě. V případě více proměnných je však tento rozdíl zcela zásadní.

Může být trochu překvapující, že zatímco existence parciálních derivací mnoho neznamená,
existence spojitých parciálních derivací
je něco úplně jiného.

Platí

Věta. *Nechť má f spojitě parciální derivace v okolí bodu \mathbf{a} . Potom má v bodě \mathbf{a} totální diferenciál*

Nechť

$$\mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{h}, \mathbf{h}^{(1)} = (0, h_2, \dots, h_n), \mathbf{h}^{(2)} = (0, 0, h_3, \dots, h_n) \quad \text{etc.}$$

(takže $\mathbf{h}^{(n)} = \mathbf{o}$). Potom máme

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \sum_{k=1}^n (f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k)})) = M.$$

Podle Lagrangeovy věty (VII.2.2) existují $0 \leq \theta_k \leq 1$ takové, že

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k-1)}) - f(\mathbf{a} + \mathbf{h}^{(k)}) = \frac{\partial f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \theta_k h_k, a_{k+1}, \dots, a_n)}{\partial x_k} h_k$$

a můžeme pokračovat

$$\begin{aligned} M &= \sum \frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) h_k = \\ &= \sum \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} h_k + \|\mathbf{h}\| \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}. \end{aligned}$$

Položme

$$\mu(\mathbf{h}) = \sum \left(\frac{\partial f(a_1, \dots, a_k + \theta_k h_k, \dots, a_n)}{\partial x_k} - \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \right) \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Jelikož $\left| \frac{h_k}{\|\mathbf{h}\|} \right| \leq 1$ a jelikož jsou funkce $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ spojité, $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{o}} \mu(\mathbf{h}) =$

0.

Můžeme tedy schematicky psát

$$\text{spojité PD} \Rightarrow \text{TD} \Rightarrow \text{PD}$$

Pravidla pro počítání parciálních derivací.

Aritmetická pravidla jsou stejná jako pro obyčejné derivace (tady také parciální derivace nic jiného než obyčejné derivace nejsou).

Trochu jinak je tomu u pravidla pro skládání. Připomeňte si, že to se i pro obyčejné derivace dokazuje z formule

$$f(a + h) - f(a) = Ah + |h|\mu(h),$$

tedy z diferenciálu (který je tam ovšem totéž jako existence derivace).

Pravidlo pro skládání v nejjednodušší podobě:

Věta. *Nechť má $f(\mathbf{x})$ totální diferenciál v bodu \mathbf{a} . Nechť mají $g_k(t)$ derivace v bodě b a nechť je $g_k(b) = a_k$ pro všechna $k = 1, \dots, n$. Položme*

$$F(t) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t)).$$

Potom má F derivaci v b , totiž

$$F'(b) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot g'_k(b).$$

Jak se to dokazuje :

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(F(b+h) - F(b)) &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b+h)) - f(\mathbf{g}(b))) = \\ &= \frac{1}{h}(f(\mathbf{g}(b) + (\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)))) - f(\mathbf{g}(b)) = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} + \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) \max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}. \end{aligned}$$

Máme $\lim_{h \rightarrow 0} \mu(\mathbf{g}(b+h) - \mathbf{g}(b)) = 0$ jelikož jsou funkce g_k spojité v b . Jelikož funkce g_k mají derivace, jsou $\max_k \frac{|g_k(b+h) - g_k(b)|}{h}$ omezené v dostatečně malém okolí nuly. Limita posledního sčítance je tedy nula a máme

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(F(b+h) - F(b)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A_k \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_k(b+h) - g_k(b)}{h} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} g'_k(b). \end{aligned}$$

Co se děje geometricky: Tečná nadrovina vyjádřená diferenciálem vnější funkce f nemá žádný důvod preferovat hlavní osy v nichž se dějí derivace vnitřních funkcí. Proto by tady jen parciální derivace nestačily.

Důsledek. (Řetězové Pravidlo) *Nechť má $f(\mathbf{x})$ totální diferenciál v bodě \mathbf{a} . Necht' mají funkce $g_k(t_1, \dots, t_r)$ parciální derivace v $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_r)$ a necht' je $g_k(\mathbf{b}) = a_k$ pro všechna $k = 1, \dots, n$. Potom má funkce*

$$(f \circ \mathbf{g})(t_1, \dots, t_r) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \dots, g_n(t))$$

všechny parciální derivace v \mathbf{b} , a platí

$$\frac{\partial (f \circ \mathbf{g})(\mathbf{b})}{\partial t_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{a})}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial g_k(\mathbf{b})}{\partial t_j}.$$