Budeme zkoumat reálné funkce několika reálných proměnných

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

Ve funkcích jedné proměnné se už trochu vyznáme, tak zkusme vzít

$$f(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots a_n)$$

spoustu funkcíjedné proměnné, těm rozumíme.

## To ale nefunguje

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 \text{ for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$f(x,0) = 0$, $f(0,x) = 0$ obě krásně spojité

pro $a \neq 0$ dokonce na celém oboru jsou $f(x,a)$ a $f(a,x)$ dány korektním aritmetickým výrazem

ale $f(0,0) = 0$ a pro libovolně malé nenulové $\varepsilon$, tedy libovolně blízko $(0,0)$ je

$$f(\varepsilon,\varepsilon) = \frac{1}{2}$$

## Metrický prostor

$(X, d),\ \ d : X \times X \to \mathbb{R}$

$$d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$d(x,y) = d(y,x)$$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Zatím to pro nás byl hlavně

$$(\mathbb{R}, |x-y|)$$

a další příklad je

$$(\mathbb{C}, |x-y|)$$

(**Pozor**: trojúhelníková nerovnost tady není pro $|x-y|$ tak triviální jako v $\mathbb{R}$)

**Euklidovský prostor** $\mathbb{E}_n$: $\quad (\mathbb{R}^n, d)$

$$d((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \sqrt{\sum_i (x_i - y_i)^2}$$

Pro nás zvlášť důležitý, znáte ho také v podobě vektorového prostoru $\mathbf{V}_n$ se skalárním součinem $\mathbf{u}v$ a normou $||\mathbf{u}|| = \sqrt{\mathbf{uu}}$ – a vzdáleností $||\mathbf{u} - \mathbf{v}||$

---

$(X, d)$ kde $d(xy) = 1$ pro $x \neq y$ (diskretníprostor)

---

$F(a, b)$ množina všech omezených funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid a \leq x \leq b\}$$

**Podprostor.** $(X, y)$ metrický prostor, $Y \subseteq X$

$$(Y, d') \quad \text{kde} \quad d'(x, y) = d(x, y)$$

**Spojité zobrazení** $f : (X, d) \to (Y, d')$
$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0,$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

(Srovnejte s

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0,$$
$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

**Triviality:** Identické zobrazeníid : $(X, d) \to (X, d)$,

Vložení podprostoru $j = (x \mapsto x) : (Y, d') \to (X, d)$

Složení $gf : (X, d) \to (Z, d'')$ spojitých zobrazení $f : (X, d) \to (y, d')$ a $g : (Y, d') \to (Z, d'')$ je spojité

**Konvergence.** $\lim_n x_n = x$ :

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 (n \geq n_0 \Rightarrow d(x, x_n) < \varepsilon$$

(Srovnejte s

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 (n \geq n_0 \Rightarrow |x - x_n| < \varepsilon)$$

**3.1.2. Věta.** *Zobrazení* $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ *je spojité právě když pro každou konvergentní* $(x_n)_n$ *v* $(X_1, d_1)$ *posloupnost* $(f(x_n))_n$ *konverguje v* $(X_2, d_2)$ *a platí* $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

*Důkaz.* I. Buď $f$ spojitá a nechť $\lim_n x_n = x$. Pro $\varepsilon > 0$ svolme ze spojitosti $\delta > 0$ tak aby $d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$ pro $d_1(x, y) < \delta$. Podle definice konvergence posloupnosti existuje $n_0$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $d_1(x_n, x) < \delta$. Tedy, je-li $n \leq n_0$ máme $d_2(f(x_n), f(x)) < \varepsilon$ a potom $\lim_n f(x_n) = f(\lim_n x_n)$.

II. Nechť $f$ není spojitá. Potom existují $x \in X_1$ a $\varepsilon_0 > 0$ takové, že pro každé $\delta > 0$ existuje $x(\delta)$ takové,že

$$d_1(x, x(\delta)) < \delta \quad \text{ale} \quad d_2(f(x), f(x(\delta))) \geq \varepsilon_0.$$

Položme $x_n = x(\frac{1}{n})$.Potom $\lim_n x_n = x$ ale $(f(x_n))_n$ nemůže konvergovat k $f(x)$. $\square$

**Okolí.** $\Omega(x,\varepsilon) = \{y \,|\, d(x,y) < \varepsilon\}$

"$U$ je okolí $x$" $\equiv\ \exists\varepsilon > 0, \Omega(x,\varepsilon) \subseteq U$

**Pozorování:** 1. $U$ je okolí $x$ a $U \subseteq V \;\Rightarrow V$ je okolí $x$.

2. $U$ a $V$ jsou okolí $x \;\Rightarrow U \cap V$ je okolí $x$.

**Otevřené množiny.** $U \subseteq (X,d)$ je *otevřená* je-li okolím každého svého bodu.

**Pozorování.** *Každá* $\Omega_X(x,\varepsilon)$ *je otevřená v* $(X,d)$.

**Pozorování.** *Množiny* $\emptyset$ *a* $X$ *jsou otevřené. Jsou-li* $U_i$, $i \in J$, *otevřené potom* $\bigcup_{i\in J} U_i$ *je otevřená, and jsou-li* $U$ *a* $V$ *otevřené je* $U \cap V$ *otevřená.*

**Uzavřené množiny.** $A \subseteq (X,d)$ je *uzavřená* v $(X,d) \equiv$ pro každou $(x_n)_n \subseteq A$ konvergentní v $X$ je $\lim_n x_n$ v $A$.

**Tvrzení.** *$A \subseteq (X,d)$ je* uzavřená *v $(X,d)$ právě když $X \smallsetminus A$ je otevřená.*

*Důkaz.* I. Nechť $X \smallsetminus A$ není otevřená. Potom existuje bod $x \in X \smallsetminus A$ takový, že pro každé $n$ je $\Omega(x, \frac{1}{n}) \nsubseteq X \smallsetminus A$. Zvolme $x_n \in \Omega(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Potom $(x_n)_n \subseteq A$ a $\lim x_n = x \notin A$ a tedy $A$ není uzavřená.

II. Nechť je $X \smallsetminus A$ otevřená a $(x_n)_n \subseteq A$ konverguje k $x \in X \smallsetminus A$. Potom pro nějaké $\varepsilon > 0$ je $\Omega(x,\varepsilon) \subseteq X \smallsetminus A$ a tdy pro dost velké $n$, $x_n \in \Omega(x,\varepsilon) \subseteq X \smallsetminus A$, spor. $\square$

**Důsledek.** *Množiny $\emptyset$ a $X$ jsou uzavřené. jsou-li $A_i$, $i \in J$, uzavřené je i $\bigcap_{i \in J} A_i$ uzavřená, a jsou-li $A$ and $B$ uzavřené, je $A \cup B$ uzavřená.*

$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$.

**Uzávěr** množiny $A$:

$$\overline{A} = \{x \mid d(x, A) = 0\}.$$

**Tvrzení.** (1) $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

(2) $A \subseteq \overline{A}$,

(3) $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \subseteq \overline{B}$,

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, a

(5) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

*Důkaz.* (4): $\overline{A \cup B} \supseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Je-li $x \in \overline{A \cup B}$ a ne $x \in \overline{A}$ máme $\alpha = d(x, A) > 0$ a tedy $y \in A \cup B$ s $d(x, y) < \alpha$ jsou v $B$; tedy je $x \in \overline{B}$.

(5): Buď $d(x, \overline{A}) = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom máme $z \in \overline{A}$ takové, že $d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro toto $z$ můžeme zvolit $y \in A$ takové, že $d(z, y) < \frac{\varepsilon}{2}$. Tedy $d(x, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ an vidíme, že $x \in \overline{A}$. $\square$

**Tvrzení.** $\overline{A}$ *je množina všech limit konvergentních posloupností* $(x_n)_n \subseteq A$.

**Tvrzení.** $\overline{A}$ *je uzavřená, a je to nejmenší uzavřená množina obsahující* $A$. *Tedy,*

$$\overline{A} = \bigcap\{B \mid A \subseteq B,\ \ B \textit{ uzavřená}\}.$$

*Důkaz.* Pokud $(x_n)_n \subseteq \overline{A}$ converguje k $x$ zvolme $y_n \in A$ s $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$. Then $\lim_n y_n = x$ and $x$ is in $\overline{A}$.

Je-li $B$ uzavřená a $A \subseteq B$ k zvolme $x \in \overline{A}$ convergentní $(x_n)_n$ v $A$, tedy v $B$ tak aby $\lim x_n = x$. Potom je $x \in B$. $\square$

**Věta.** *Buďte* $(X_1, d_1), (X_2.d_2)$ *metrické prostory a* $f : X_1 \to X_2$ *be zobrazení. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní.*

(1) $f$ *je spojité.*

(2) *Pro každý* $x \in X_1$ *a každé okolí* $V$ *bodu* $f(x)$ *texistuje okolí* $U$ *bodu* $x$ *takové, že* $f[U] \subseteq V$.

(3) *Pro každou otevřenou* $U$ *v* $X_2$ *je vzor* $f^{-1}[U]$ *otevřený v* $X_1$.

(4) *Pro každou uzavřenou* $A$ *v* $X_2$ *je vzor* $f^{-1}[A]$ *uzavřený v* $X_1$.

(5) *Pro každou* $A \subseteq X_1$ *je* $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

Vlastnost nebo definice je *topologická* je-li zachovávána homeomorfismy. Máme tedy následující topologické vlastnosti a pojmy:

- konvergenci
- otevřenost
- uzavřenost
- uzávěr
- okolí
- nebo spojitost sama.

**Silně ekvivalentní metriky** $d_1$ a $d_2$:
Identické zobrazení $(X, d_1) \to (X, d_2)$ je homeomorfismus.

$d_1$ a $d_2$ na téže množině jsou *silně ekvivalentní* existují-li kladné konstanty $\alpha$ a $\beta$ takové, že

$$\alpha \cdot d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le \beta \cdot d_1(x,y).$$

**V euklidovských prostorech** kde jsme zatím měli vzdálenost

$$d((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

položme

$$\lambda((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|, \quad \text{a}$$

$$\sigma((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = \max_i |x_i-y_i|.$$

**Tvrzení.** *$d,\lambda$ a $\sigma$ jsou silně ekvivalentní metriky na $\mathbb{E}_n$.*

**Součiny.** Pro $(X_1, d_i)$, $i = 1, \ldots, n$ definujeme n kartézském součinu $\prod_{i=1}^n X_i$ metriku

$$d((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \max_i d_i(x_i, y_i).$$

Získaný

$$(\prod_{i=1}^n X_i, d) = \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$$

se nazývá součin prostorů $(X_i, d_i)$.

Píse se též

$$(X_1, d_1) \times \cdots \times (X_n, d_n).$$

Tedy je

$$(\mathbb{E}_n, \sigma) = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \text{ times}} = \mathbb{R}^n.$$

**Věta.** 1. *Projekce* $p_j = ((x_i)_i \mapsto x_j) : \prod_{i=1}^n (X_i, d_i) \to (X_j, d_j)$ *jsou spojitá zobrazení.*

2. *Buďte* $f_j : (Y, d') \to (X_j, d_j)$ *libovolná spojitá zobrazení. Potom jednoznačně určené zobrazení* $f : (Y, d') \to \prod_{i=1}^n (X_i, d_i)$ *splňující* $p_j \circ f = f_j$, *totiž zobrazení definované předpisem* $f(y) = (f_1(y), \ldots, f_n(y))$, *je spojité.*

Tedy studujeme-li spojitá zobrazení

$$\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{E}_n \to \mathbb{E}_m$$

záleží <u>na rozdíl od definičního oboru</u> spojitost v oboru hodnot jen na spojitosti v jednotlivých souřadnicích.