$$\boxed{{}_B[id]_A\,[u]_A = [u]_B}$$

$\forall v \in V: id(v) = v$

1. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^3$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   Řešení: Připomeňme si základní pojmy: Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (tedy vektory a_i jsou sloupce matice A) je báze. Nechť vektor x má vyjádření $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$, pak souřadnicemi vektoru x vzhledem k bázi A rozumíme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a vektor souřadnic značíme $[x]_A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$.

   Například tedy, pokud bychom měli kanonickou bázi (značme $K = I_n$), pak $[x]_K = x$.

   Matice přechodu: mějme A, B dvě báze jako v zadání, pak maticí přechodu od A k B rozumíme matici ${}_B[\,\mathrm{id}]_A$, po které chceme, aby pro každý vektor x platilo: $[x]_B = {}_B[\,\mathrm{id}]_A[x]_A$. Tedy ze souřadnic v bázi A nám udělá souřadnice v bázi B.

   (a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

   Řešení: Napřed se zamysleme:

   - Pro který vektor v platí:
   $$[v]_A = (1, 0, 0)^T$$
   To je jednoduché:
   $$\begin{aligned} [v]_K &= 1A_{*,1} + 0A_{*,2} + 0A_{*,3} \\ &= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   - Pro který vektor u platí:
   $$[u]_A = (0, 1, 0)^T$$
   To je jednoduché:
   $$[u]_K = 1A_{*,1} + 0A_{*,2} + 0A_{*,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   - Pro který vektor w platí:
   $$[w]_A = (1, 2, 3)^T$$
   To je jednoduché:
   $$\begin{aligned} [w]_K &= 1A_{*,1} + 2A_{*,2} + 3A_{*,3} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Násobení $A[x]_A$ odpovídá lineární kombinaci sloupců A kde koeficienty jsou jednotlivé souřadnice. Tedy
   $${}_K[\,\mathrm{id}]_A = A$$

(b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

Řešení: Z předchozího víme, že $[x]_K = B[x]_B$. Užijeme krásné věty lineární algebry, která říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru jsou stejné. Lidsky řečeno: když jsou nezávislé sloupce, jsou nezávislé i řádky a tedy matice je regulární. Tudíž existuje inverzní matice B^{-1}, kterou násobíme zleva a dostaneme: $B^{-1}[x]_K = [x]_B$. Vidíme tedy, že ${}_B[\,\mathrm{id}]_K = B^{-1}$.

Můžeme psát postupně:

$$[x]_K = {}_K[\,\mathrm{id}]_B[x]_B$$

(vynásobíme inverzem zleva, to můžeme, ${}_K[\,\mathrm{id}]_B$ je regulární matice)

$$\left({}_K[\,\mathrm{id}]_B\right)^{-1}[x]_K = \left({}_K[\,\mathrm{id}]_B\right)^{-1}{}_K[\,\mathrm{id}]_B[x]_B$$

$$\left({}_K[\,\mathrm{id}]_B\right)^{-1}[x]_K = [x]_B$$

tedy vidíme, že:

$${}_B[\,\mathrm{id}]_K = \left({}_K[\,\mathrm{id}]_B\right)^{-1}$$

(c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

Řešení: Už umíme převést souřadnice od báze A ke kanonické a od kanonické k bázi B prostým složením těchto zobrazení dostaneme požadovanou matici přechodu. Tedy

$${}_B[\,\mathrm{id}]_A = {}_B[\,\mathrm{id}]_K{}_K[\,\mathrm{id}]_A = B^{-1}A$$

$f: \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ $\quad f\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

${}_{K_2}[f]_{K_3} = {}_{K_2}[f]_B \underbrace{{}_B[id]_{K_3}}_{=\left({}_{K_3}[id]_B\right)^{-1}}$? ✓ $\quad {}_{K_2}[f]_B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}$

$_{K_3}[id]_B = \begin{pmatrix}1&3&4\\2&2&4\\3&1&3\end{pmatrix}$ $\qquad B \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$

$f(v),\ f(2\cdot v) = 2f(v)$

2. Určete matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$, o kterém víte: $f\left((1,2,3)^T\right) = (1,2)^T$ $f\left((3,2,1)^T\right) = (2,1)^T$ $f\left((4,4,3)^T\right) = (0,2)^T$

Řešení: Lineární zobrazení je dáno tím, kam zobrazí bázi. Ověřte, že vektory $(1,2,3)^T, (3,2,1)^T, (4,4,3)^T$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{Z}_5^3$, označme tuto bázi B. Pak máme jednoduše $_K[f]_B = \begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix}$.

Pomocí znalostí o převodech mezi bázemi pak můžeme psát:

$$
\begin{aligned}
{}_K[f]_K &= {}_K[f]_{BB}[id]_K \\
&= {}_K[f]_B \left({}_K[id]_B\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&3&4\\2&2&4\\3&1&3\end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3&0&1\\4&4&1\\4&2&4\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1&3&3\\3&3&1\end{pmatrix} = {}_{K_2}[f]_{K_3}
\end{aligned}
$$

② je f prostá?

$\forall y \in \mathbb{Z}_5^2\ \exists$ nejvýš jedno $x \in \mathbb{Z}_5^3$ tž $f(x) = y$

neboli $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$

${}_{K_2}[f]_{K_3}[u]_{K_3} = {}_{K_2}[f]_{K_3}[v]_{K_3}$

$[f][u] - [f][v] = \vec{0}$

$[f]([u]-[v]) = \vec{0}$

$u \neq v \Rightarrow [u] \neq [v]$

$g: \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^{50}$ může být prosté (dimense mi moc neřeknou)

$\begin{pmatrix}1&3&3\\3&3&1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1&3&3\\0&4&2\end{pmatrix}$ NENÍ PROSTÉ!

$\exists x: f(x) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ $\qquad [f]x = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

- Je toto zobrazení prosté? *Řešení:* Pokud bychom měli $f(x_1) = f(x_2)$, pak $0 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$ a tedy $x_1 - x_2$ je netriviální vektor z kernelu. Tedy zobrazení je prosté, pokud je dimenze jádra rovna nule.
- Pokud není prosté, najděte kolizi (tj. dva různé vektory takové, že $f(x_1) = f(x_2)$). *Řešení:* Stačí najít netriviální vektor x z kernelu (jádra matice f), pak víme, že $f(0) = f(x) = 0$.

? je f "na" surjektivní $\forall y\ \exists x\ f(x) = y$

- Je na? *Řešení:* Zobrazení $f\colon U \to V$ je na právě když je dimenze sloupcového prostoru matice f rovna dimenzi V.

$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ $\qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ dohromady generují $\mathbb{Z}_5^2$

$[f]$ ... $\qquad Im[f] =$

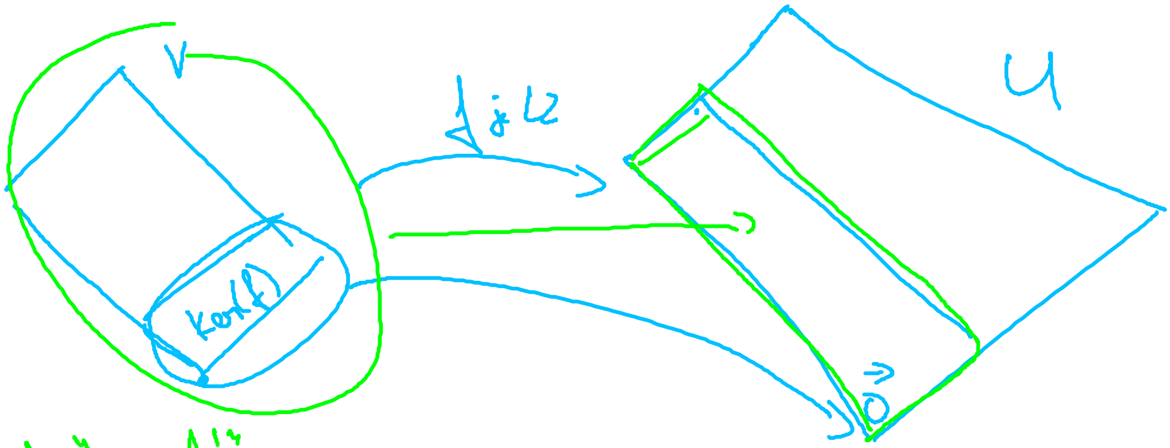
← obraz zobrazení f = sloupcový prostor

její sloupce jsou $f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ... obrazy bázických vektorů

$\dim \mathcal{S}(f) = \dim(\mathbb{Z}_5^2)$

$[f]x = b$ má řešení $\forall b$

argumentace "$\forall b \in \mathcal{S}([f])$"



? je f "prostá"

$\dim U < \dim V \Rightarrow f$ není prostá

$\dim U \geq \dim V$? dobře ale $\dim \operatorname{Ker}$

$f(v) = f(u)$

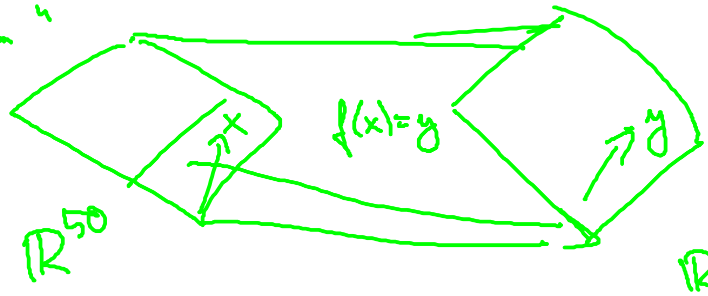
$f(v) - f(u) = \vec{0}$

linearita f

$f(v-u) = \vec{0}$

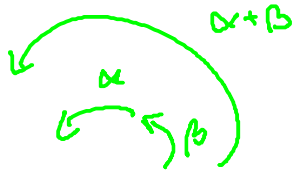
? $v - u \in \operatorname{Ker}(f)$

? je f "na"



$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \end{pmatrix}$ je na

$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & & \end{pmatrix}$ není na



3. Odvoďte součtové vzorce pro $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$ pomocí matic zobrazení.

   Řešení: Použijeme matici pro rotaci o úhel okolo počátku. Jedná se o lineární zobrazení složením dvou rotací dostaneme rotaci o součet příslušných úhlů, proto dostáváme:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}}_{\circlearrowleft\,\alpha+\beta} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}}_{\circlearrowleft\,\alpha} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}}_{\circlearrowleft\,\beta}.$$

   Tedy $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$ a $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$.

! Skládání zobrazení odpovídá násobení matic!

polynom $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$

$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$

$$\boxed{\begin{aligned}(f+g)' &= f' + g' \\ (\alpha \cdot f)' &= \alpha f'\end{aligned}}$$

je to L2

4. Dokažte, že derivace polynomu je lineární zobrazení. Napište matici derivace pro prostor reálných polynomů stupně nejvýš pět. Jak určíte matici druhé derivace?

Řešení: Reálné polynomy tvoří vektorový prostor. Derivace přiřadí polynomu polynom, součtu polynomů přiřadí součet jejich derivací a alfa-násobku polynomu přiřadí alfa-násobek jeho derivace.

Pokud píšeme vektor polynomu $P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3 + p_4 x^4 + p_5 x^5$ jako $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$, pak je matice derivace:

1) reprezentace vektorů

2) $[f]$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 2p_2 \\ 3p_3 \\ 4p_4 \\ 5p_5 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$1, x, x^2, \dots, x^5$ je báze

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \dots$

A) není prosté $\quad (f+c)' = f'$

B) není na $\quad$ x^5 nemá vzor (předobraz)

$\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}$ což není pol. deg ≤ 5

$d(p) = p'$

$d(x) = 1$

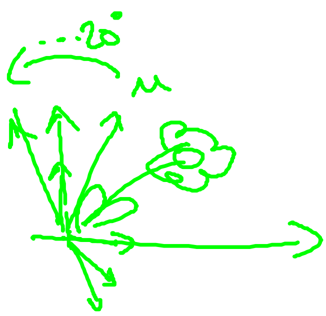
$d(3x) = 3$

$d(x^2 - 2x + 1) = 2x - 2$

$f: U \to V$

${}_{B_V}[f]_{B_U}$, ${}_{B_V'}[f]_{B_U'}$,

${}_{B_V^4}[f]_{B_U^4}$



${}_{K_2}[\mathrm{rot}\ 20°]_{K_2} = \begin{pmatrix} \cos 20° & -\sin 20° \\ \sin 20° & \cos 20° \end{pmatrix} [u]_{K_2}$