

def lineární zobrazení  $V$  je n.p. nad  $\mathbb{T}$   $f: V \rightarrow W$  kde  $W$  je n.p. nad  $\mathbb{T}$

(a)  $\forall u, v \in V \quad f(u+v) = f(u) + f(v)$

(b)  $\forall \alpha \in \mathbb{T} \quad \forall \underbrace{u \in V} \quad f(\alpha u) = \alpha \cdot \underbrace{f(u) \in W}$

nad stejným tělesem

1. Určete, zda následující jsou lineární zobrazení:

(a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f(x) = 0$

*Řešení:* Zobrazení  $f: U \rightarrow V$  je lineární zobrazení, pokud  $U, V$  jsou vektorové prostory nad tím samým tělesem  $\mathbb{T}$  a platí:

i.  $\forall u_1, u_2 \in U: f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2)$

ii.  $\forall u \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}: f(\alpha u) = \alpha f(u)$

Ověříme dle definice. Ano.

(b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f(x) = x$

*Řešení:* Ano.

(c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f(x) = -2x$

*Řešení:* Ano.

(d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f(x) = 1$

!  $\vec{0} \quad \vec{0} \quad f(\vec{0}) = \vec{0}$

*Řešení:* Ne, neboť například:  $1 = f(3 \cdot 4) \neq 3f(4) = 3 \cdot 1 = 3$ . Dokonce ani první podmínka neplatí:  $1 = f(1 + 2) \neq f(1) + f(2) = 1 + 1 = 2$ .

(e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $f(x) = x^2$

*Řešení:* Ne, například  $4 = f(2 \cdot 1) \neq 2f(1) = 2$ .

(f)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kde  $f((x, y)^T) = (x + y, x - y)^T$

*Řešení:* Ano.

(g)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kde  $f((x, y)^T) = (x - y, x - y)^T$

*Řešení:* Ano.

(h) Nechť  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , definujme zobrazení  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  následovně  $f(v) = Av$ .

*Řešení:* Ano (použijeme co známe o násobení matic). O matici  $A$  říkáme, že reprezentuje zobrazení  $f$  vůči kanonické bázi – je to matice zobrazení  $f$  vůči kanonické bázi:

!  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^m$ :

$f(\alpha \vec{u}) = A(\alpha \vec{u}) = \alpha \cdot A\vec{u} = \alpha f(\vec{u})$

$f(\vec{u} + \vec{v}) = A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v} = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$

$K[f]_K = A$

$K_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$K_m = \dots$

2. Dokažte, že lineární zobrazení je plně určeno tím, kam zobrazíme bázové vektory. Tedy pokud máme zadáno  $f(b_i) = \dots$  pro  $b_1, \dots, b_n$  bázi umíme jednoznačně určit  $f(v)$  pro libovolný vektor  $v$ .

Řešení: Postupně rozepíšeme podle definice lineárního zobrazení. Tedy pokud máme bázi  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  a vektor se souřadnicemi  $[v]_B = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , tedy

$$v = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

"vektor  $v$  má vůči bázi  $B$  souřadnice  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ "

pak můžeme psát:

$$f(v) = f\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) \quad (\text{definice lineární funkce } f(u+v) = f(u) + f(v))$$

$$= \sum_{i=1}^n f(a_i b_i) \quad (\text{definice lineární funkce } f(\alpha u) = \alpha f(u))$$

$$= \sum_{i=1}^n a_i f(b_i)$$

! 2: 'kvěde' lin. zobrazení  $\gamma$  je plně určeno tím, kam zobrazí  $K = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{pmatrix}$  mezi množinami  $V$  a  $W$ .

(1) takže  $f$  je reprezentována maticí

$$[f]_K = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) & f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

! ? jak tu funkci reprezentovat v podobě maticí

co nám  $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + f \in L_2$ .

$$\begin{aligned} f\left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) &= 5 \cdot f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 6 \cdot f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 7 \cdot f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 8 \cdot f\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \\ &= \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & f(a_4) \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \\ &= [f]_K \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$g(x) = 3x^2 + x - 1$$

$$g(5) = ?$$

3. Necht' je zobrazení  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dané:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(a) Určete matici zobrazení  $f$  vůči kanonické bázi  $K = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$ :

Řešení: Využijeme významu té matice, víme, že:

$$\begin{aligned} {}_K[f]_K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ {}_K[f]_K \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

Tedy jasně vidíme, že:

$${}_K[f]_K = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Určete obraz  $f((6, 5)^T)$ .

Řešení: Přímou dle definice máme:

$$\begin{aligned} f\left(6 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= 5f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 6f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pro nás bude ale mnohem přínosnější toto počítat pomocí maticového násobení:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 26 \end{pmatrix}$$

(c) Mějme zobrazení  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dané:  $g(x, y) = (x - y, 2y - 2x)^T$ , sestrojte matici zobrazení  $g$  vůči kanonické bázi.

Řešení: Toho, že máme zobrazení zadané trošku nezvykle se nezalekneme. Stačí za  $x, y$  dosadit libovolně, například:

$$\begin{aligned} g(1, 0) &= (1, -2)^T \\ g(0, 1) &= (-1, 2)^T \end{aligned}$$

Tedy rovnou můžeme psát:

$${}_K[g]_K = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^T$$

*← CHYBA! (výsledky patří do sloupců)*

(d) Sestrojte matici zobrazení  $h = f \circ g$ , tedy  $h(v) = f(g(v))$ .

*Řešení:* Odvodíme, že složení zobrazení odpovídá násobení matic. Víme, že pro každý  $v \in \mathbb{R}^2$  platí:

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(v) &= f(g(v)) \\
 &= f({}_K[g]_K[v]_K) \\
 &= {}_K[f]_K ({}_K[g]_K[v]_K) \\
 &= ({}_K[f]_K {}_K[g]_K) [v]_K \\
 &= \underline{{}_K[f \circ g]_K [v]_K}
 \end{aligned}$$

Všude jsme se „tahali“ se souřadnicemi. V dalším případě uvidíte, že to má velice dobrý důvod. Jen poznámka na okraj: tady nám stačí jediné  $K$ , neboť se vždy jedná o bázi jednoho a toho samého prostoru. Obecně pokud máme vektorové prostory  $U, V, W$  a lineární zobrazení  $g, f, h$  kde  $g: U \rightarrow V, f: V \rightarrow W, h: U \rightarrow W$  kde  $h = f \circ g$  a  $A, B, C$  jsou po řadě báze prostorů  $U, V, W$ , pak můžeme psát:

$${}_C[f]_B [x]_B$$

„beru souřadnice v bázi B  
maxim. souř. v bázi C“

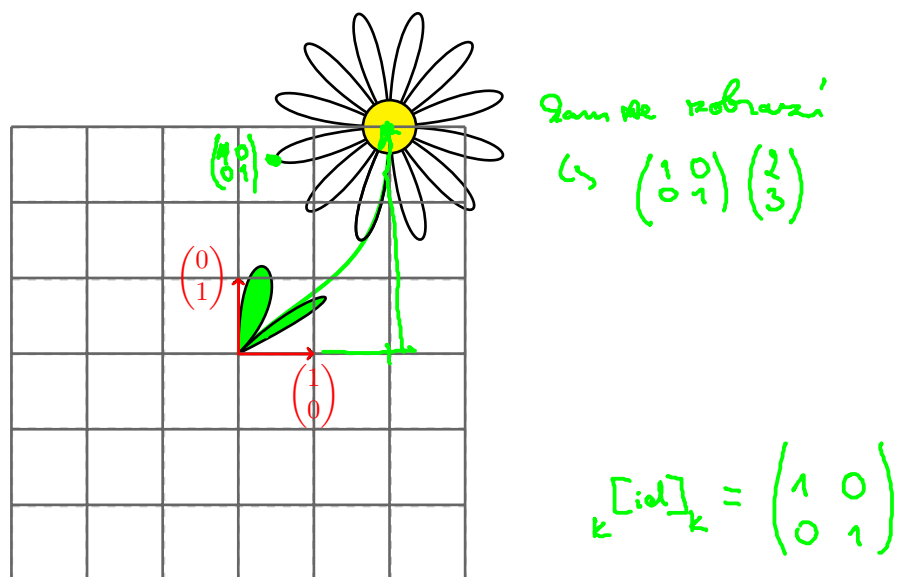
Nebo obecněji celý ten přepis ještě jednou:

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)(v) &= f(g(v)) \\
 &= f({}_B[g]_A [v]_A) \\
 &= {}_C[f]_B ({}_B[g]_A [v]_A) \\
 &= ({}_C[f]_B {}_B[g]_A) [v]_A \\
 &= \underline{{}_C[f \circ g]_A [v]_A}
 \end{aligned}$$

Všimněte si, že vždy „sousední písmenka souhlasí“. To znamená, že pokud máme vyjádřenou matici zobrazení tak, že bere souřadnice v nějaké bázi, tak ji musíme zprava násobit vektorem souřadnic v té dané bázi.

Tohle všechno se může zdát trochu strašlivé, ale rozmyslete si, že jsme jen řekli (pro naše původní zadání):

$$\begin{aligned}
 {}_K[f \circ g]_K &= {}_K[f]_K {}_K[g]_K \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

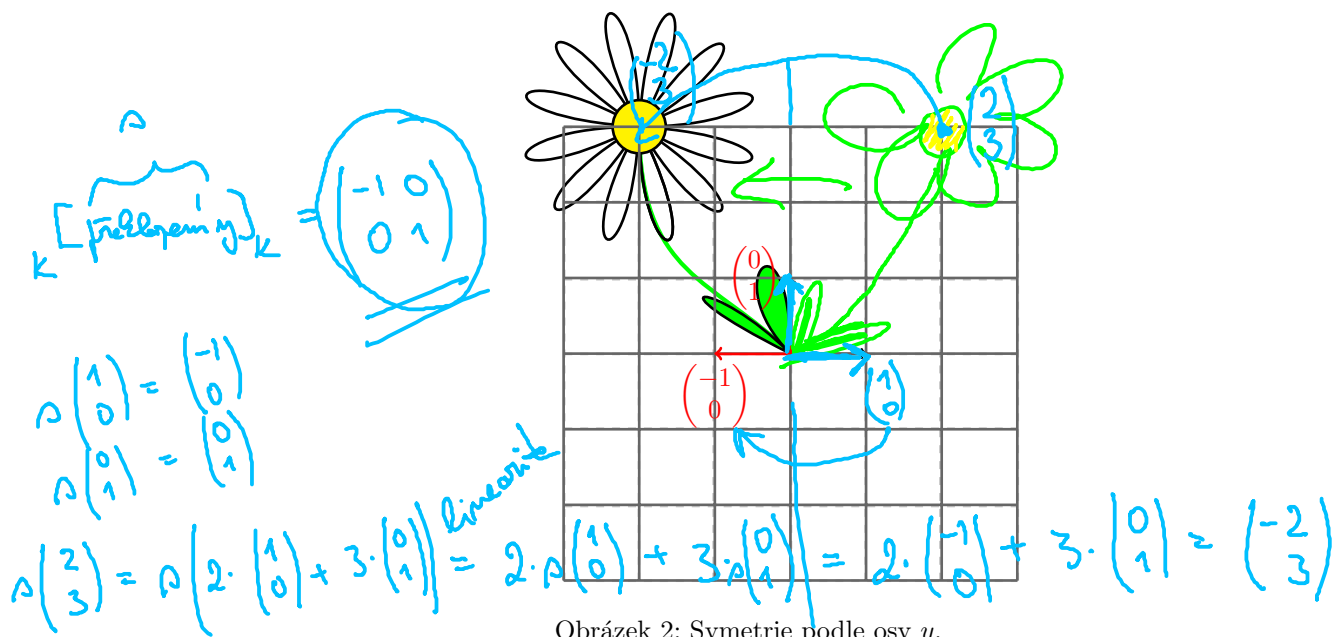


Obrázek 1: Původní netransformovaná květina.

4. Určete matice lineárních zobrazení v rovině.

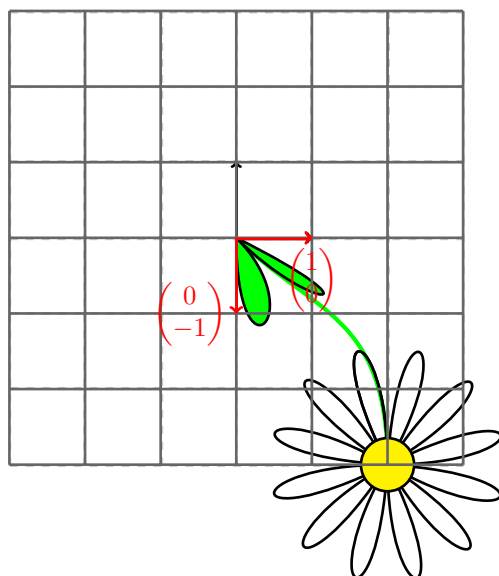
- identita

*Řešení:* Na obrázku **1** vidíme květinu rostoucí z počátku souřadnic, která ještě není lineárně transformovaná. Stejně je znázorněná původní mřížka 3x3, která je v tomto případě překrytá její lineárně transformovanou kopií. Černé šipky představují původní vektory  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  a červené šipky s popisky jejich obrazy (v tomto případě opět splývají). Zobrazení je identita a je samozřejmě dáno maticí  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  (první sloupec je kam se zobrazí vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  a druhý sloupec je obraz vektoru  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ).



- symetrie podle osy  $y$

Řešení: Jak vidíme na obrázku 2 symetrie podle osy  $y$  jen překlopí květinu, maticí transformace je  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

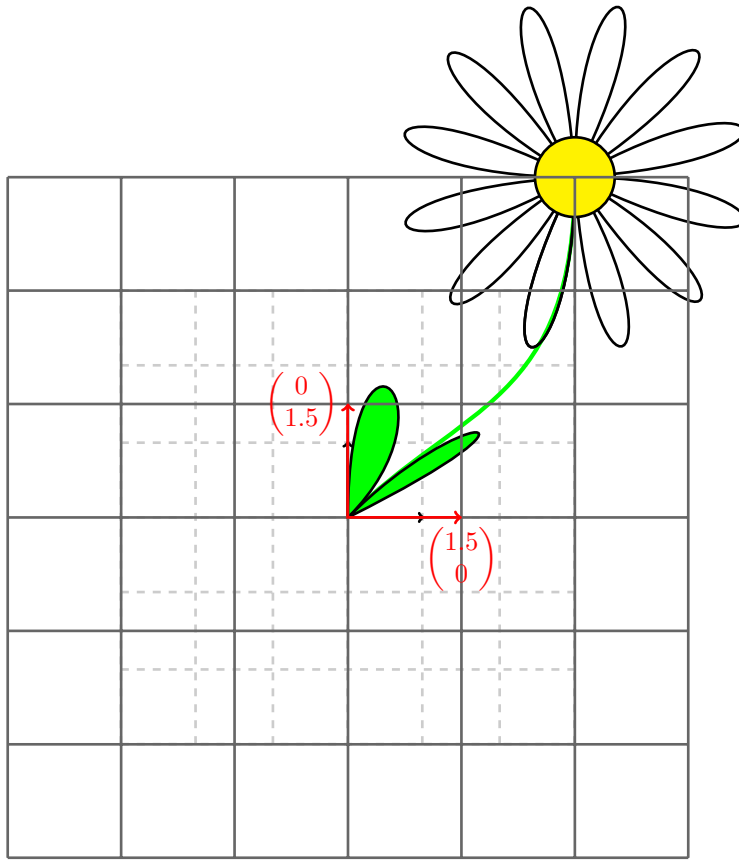


Obrázek 3: Symetrie podle osy  $x$ .

- symetrie podle osy  $x$

*Řešení:* Jak vidíme na obrázku **3** symetrie podle osy  $x$  jen překlopí květinu květem dolů, maticí transformace je  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$



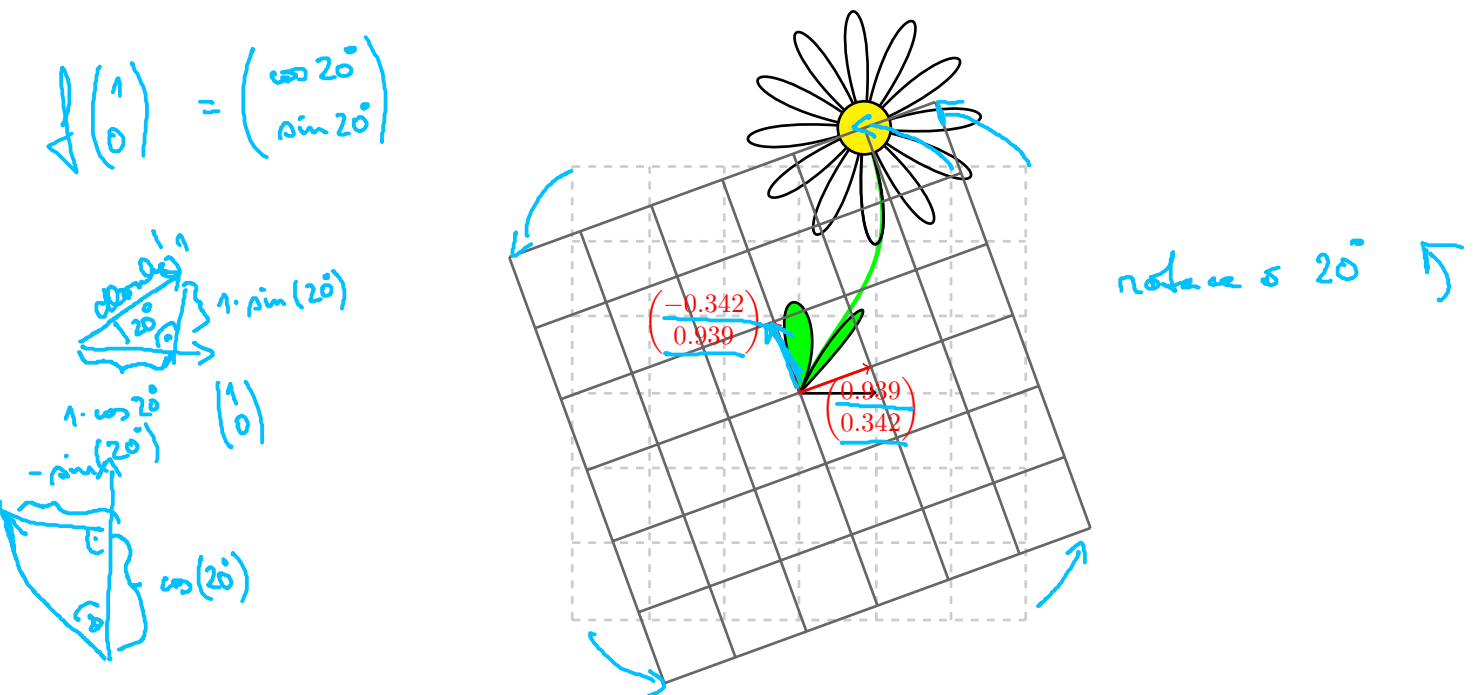


Obrázek 4: Zvětšení 1,5-krát.

- zvětšení

Řešení: Zvětšení (obrázek 4) 1,5-krát je dáno maticí  $\begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}$

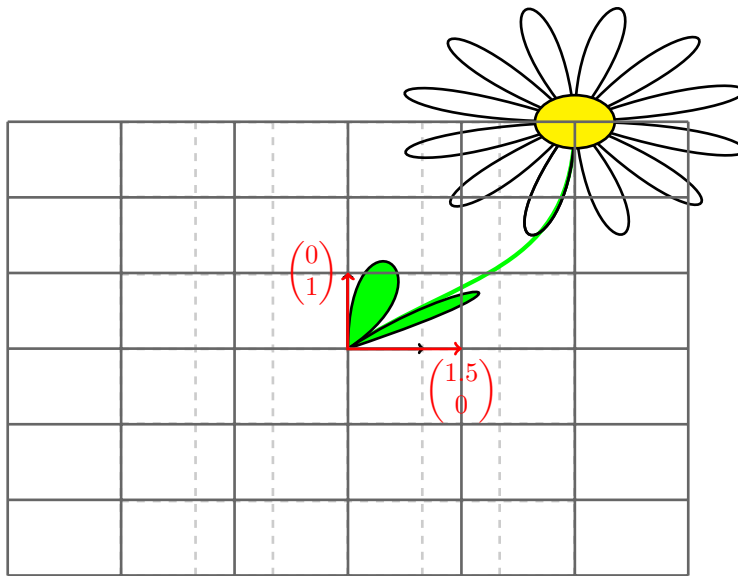
$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$$



Obrázek 5: Rotace o úhel  $20^\circ$ , čísla jsou zaokrouhlená.

- rotace okolo počátku souřadnic

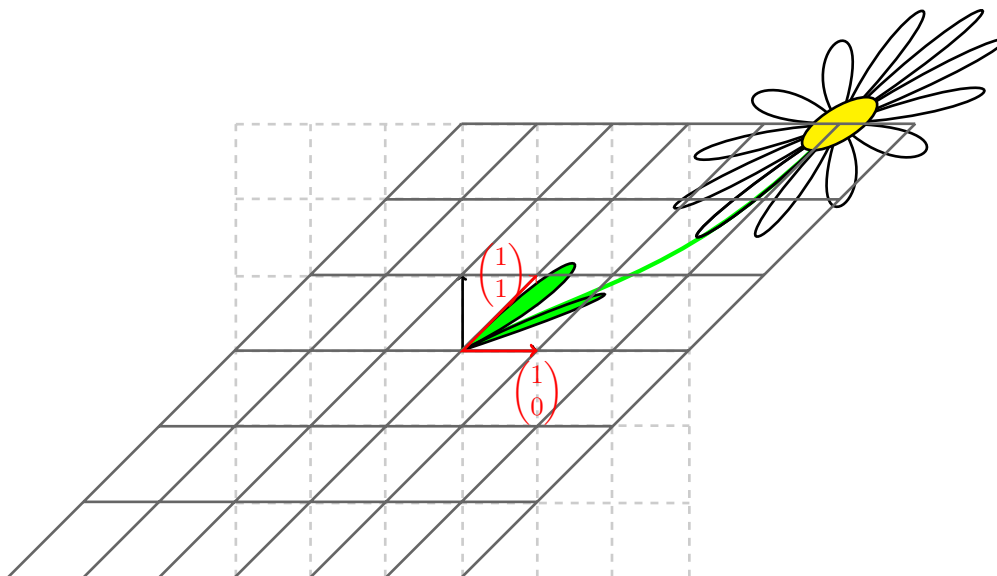
*Řešení:* Rotace okolo počátku souřadnic proti směru hodinových ručiček o úhel  $\varphi$  (obrázek 4) zobrazí vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  na vektor  $\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  a vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  na vektor  $\begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$  její matice je tedy  $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$ . Konkrétní rotace je zobrazena na obrázku 5



Obrázek 6: Zvětšení 1,5-krát podle osy  $x$ .

- zvětšení podle osy  $x$

Řešení: Zvětšení podél osy  $x$  (obrázek 6) 1,5-krát je dáno maticí  $\begin{pmatrix} 1,5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

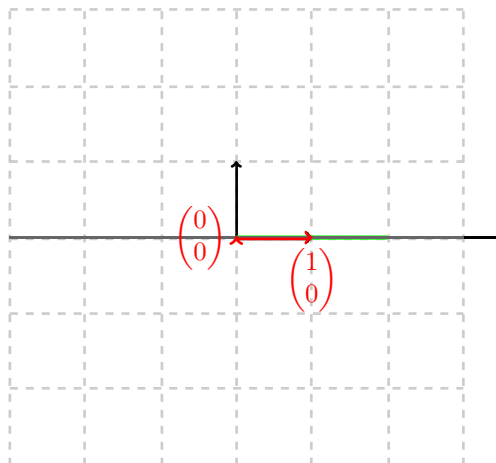


Obrázek 7: Zkosení podél osy  $x$ .

- zkosení

*Řešení:* Zkosení přičte k jednomu vektoru násobek druhého (obrázek 7), je dáno maticí

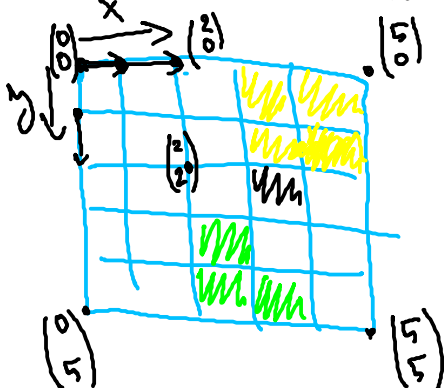
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Obrázek 8: Projekce na osu  $x$ .

- projekce na osu  $x$

Řešení: Projekce na osu  $x$  (obrázek 8) ponechá netknutou  $x$ -ovou složku a  $y$ -ovou nastaví na nulu, je dáno maticí  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$



$$\left. \begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \underline{\underline{[f]_k}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

?  $f$  je lineární zob  
je vrácení obrazem Baze

$$\begin{aligned} f(b_1) & & f(b_2) \\ b_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- symetrie podle obecné osy

**Řešení:** Vyřešíme pro konkrétnost symetrii okolo přímky procházející počátkem souřadnic a bodem  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  označme si toto zobrazení jako  $f$ . Kam se zobrazí vektor  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ? Na to není tak snadné odpovědět, ale předvedeme si jiný způsob, jak najít matici tohoto lineárního zobrazení  ${}_K[f]_K$  (a pomocí ní už pak snadno i obraz libovolného vektoru).

Víme, že lineární zobrazení je jednoznačně dáno obrazy nějaké báze, nemusí se nutně jednat o kanonickou bázi. Přemýšlejme, které obrazy budou jednoduché najít (takto dostaneme nejčastěji lineární zobrazení zadané, pomocí obrazů nějakých vektorů). Symetrie podle přímky zachová danou přímku, víme tedy, že:  $f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Navíc, co

je kolmé na tuto přímku se akorát zobrazí na minus samo sebe:  $f\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

(využili jsme poučku ze střední školy, jak najít kolmý vektor, ve druhém semestru se to naučíme obecně). Dané dva předobrazy tvoří bázi  $B$  (ověřte), jednoduše jsme tedy získali matici  ${}_K[f]_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ . Nyní jen stačí využít, co jsme se naučili o převodech souřadnic:

$$\begin{aligned} {}_K[f]_K &= {}_K[f]_B {}_B[id]_K \\ &= {}_K[f]_B ({}_K[id]_B)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{-3}{13} & \frac{2}{13} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$${}_B[id]_K [r]_K$$

! zobrazení  $f$  se mění s bází  
 $f\left(\begin{pmatrix} 0.001 \\ 0.01 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.002 \\ 0.02 \end{pmatrix}$ ,  $f\left(\begin{pmatrix} 0.002 \\ 0.01 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0.004 \\ 0.02 \end{pmatrix}$  ...

! reprezentace  $f$  je vůči bázi

podobně programujeme také se obrazem s pixel  $\rightarrow$  mřížkou  
 a s  $f$ , když se má

C++ X pixel jako fyzický bod dráhy (světla)  
 ✓ pixel jako  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  ... souřadnice

$${}_K[f]_K [r]_K = [f(r)]_K$$

$${}_B[A]_A [r]_A = [f(r)]_B$$

$f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f \left( \frac{2}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{13} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \frac{2}{13} f \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{13} f \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{13} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/13 \\ 12/13 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B =$   
 $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$   
 $\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & | & 1 \\ 3 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & | & 1 \\ 1 & 5 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & | & -1 \\ 2 & -3 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & | & -1 \\ 0 & -13 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & | & -1 \\ 0 & 1 & | & -15/13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -1 + 15/13 \\ 0 & 1 & | & -15/13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -2/13 \\ 0 & 1 & | & -15/13 \end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_K = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$   
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

obrázek 9: Symetrie kolem přímky jdoucí počátkem a bodem  $(2, 3)^T$  (čísla jsou zaokrouhlená).  
 - násobím dočím.  
 - rozcuchám.  
 - dočím zpátky.  
 - by čísla nebyla úplně přesná.

Obrázek 9: Symetrie kolem přímky jdoucí počátkem a bodem  $(2, 3)^T$  (čísla jsou zaokrouhlená).

5. Pracujeme nad  $\mathbb{Z}_5$ . Pro báze  $A, B$  dané sloupce matic  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$id(v) = v$

**Rěšení:** Připomeňme si základní pojmy: Necht  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  (tedy vektory  $a_i$  jsou sloupce matice  $A$ ) je báze. Necht vektor  $x$  má vyjádření  $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ , pak souřadnicemi vektoru  $x$  vzhledem k bázi  $A$  rozumíme koeficienty  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  a vektor souřadnic značíme  $[x]_A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ .

Například tedy, pokud bychom měli kanonickou bázi (značme  $K = I_n$ ), pak  $[x]_K = x$ .

Matice přechodu: mějme  $A, B$  dvě báze jako v zadání, pak maticí přechodu od  $A$  k  $B$  rozumíme matici  ${}_B[id]_A$ , po které chceme, aby pro každý vektor  $x$  platilo:  $[x]_B = {}_B[id]_A [x]_A$ . Tedy ze souřadnic v bázi  $A$  nám udělá souřadnice v bázi  $B$ .

(a) Určete matici přechodu od souřadnic báze  $A$  ke kanonické bázi.

${}_K[id]_A$

**Rěšení:** Napřed se zamysleme:

- Pro který vektor  $v$  platí:

=

$[v]_A = (1, 0, 0)^T$

To je jednoduché:

$[v]_K = 1A_{*,1} + 0A_{*,2} + 0A_{*,3}$   
 $= 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Pro který vektor  $u$  platí:

$[u]_A = (0, 1, 0)^T$

To je jednoduché:

$$[u]_K = 0A_{*,1} + 1A_{*,2} + 0A_{*,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Pro který vektor  $w$  platí:

$$[w]_A = (1, 2, 3)^T$$

To je jednoduché:

$$[w]_K = \begin{pmatrix} K & [id]_A \end{pmatrix} [w]_A$$

"A" // jsm

$$\begin{aligned} [w]_K &= 1A_{*,1} + 2A_{*,2} + 3A_{*,3} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Násobení  $A[x]_A$  odpovídá lineární kombinaci sloupců  $A$  kde koeficienty jsou jednotlivé souřadnice. Tedy

$${}_K[id]_A = A$$

- (b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze  $B$ .

*Řešení:* Z předchozího víme, že  $[x]_K = B[x]_B$ . Užijeme krásné věty lineární algebry, která říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru jsou stejné. Lidsky řečeno: když jsou nezávislé sloupce, jsou nezávislé i řádky a tedy matice je regulární. Tudíž existuje inverzní matice  $B^{-1}$ , kterou násobíme zleva a dostaneme:  $B^{-1}[x]_K = [x]_B$ . Vidíme tedy, že  ${}_B[id]_K = B^{-1}$ .

Můžeme psát postupně:

$$[x]_K = {}_K[id]_B [x]_B$$

(vynásobíme inverzem zleva, to můžeme,  ${}_K[id]_B$  je regulární matice)

$$\begin{aligned} ({}_K[id]_B)^{-1} [x]_K &= ({}_K[id]_B)^{-1} {}_K[id]_B [x]_B \\ ({}_K[id]_B)^{-1} [x]_K &= [x]_B \end{aligned}$$

tedy vidíme, že:

$${}_B[id]_K = ({}_K[id]_B)^{-1}$$

$${}_B[id]_A = ?$$

- (c) Určete matici přechodu od souřadnic báze  $A$  k souřadnicím báze  $B$ .

*Řešení:* Už umíme převést souřadnice od báze  $A$  ke kanonické a od kanonické k bázi  $B$  prostým složením těchto zobrazení dostaneme požadovanou matici přechodu. Tedy

$${}_B[id]_A = {}_B[id]_K {}_K[id]_A = B^{-1}A$$



6. Určete matici lineárního zobrazení  $f: \mathbb{Z}_5^3 \rightarrow \mathbb{Z}_5^2$ , o kterém víte:  $f((1, 2, 3)^T) = (1, 2)^T$   
 $f((3, 2, 1)^T) = (2, 1)^T$   $f((4, 4, 3)^T) = (0, 2)^T$

*Řešení:* Lineární zobrazení je dáno tím, kam zobrazí bázi. Ověřte, že vektory  $(1, 2, 3)^T, (3, 2, 1)^T, (4, 4, 3)^T$  tvoří bázi prostoru  $\mathbb{Z}_5^3$ , označme tuto bázi  $B$ . Pak máme jednoduše  ${}_K[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Pomocí znalostí o převodech mezi bázemi pak můžeme psát:

$$\begin{aligned} {}_K[f]_K &= {}_K[f]_{BB} [id]_K \\ &= {}_K[f]_B ({}_K[id]_B)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Je toto zobrazení prosté? *Řešení:* Pokud bychom měli  $f(x_1) = f(x_2)$ , pak  $0 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$  a tedy  $x_1 - x_2$  je netriviální vektor z kernelu. Tedy zobrazení je prosté, pokud je dimenze jádra rovna nule.
- Pokud není prosté, najděte kolizi (tj. dva různé vektory takové, že  $f(x_1) = f(x_2)$ ). *Řešení:* Stačí najít netriviální vektor  $x$  z kernelu (jádra matice  $f$ ), pak víme, že  $f(0) = f(x) = 0$ .
- Je na? *Řešení:* Zobrazení  $f: U \rightarrow V$  je na právě když je dimenze sloupcového prostoru matice  $f$  rovna dimenzi  $V$ .

7. Odvoďte součtové vzorce pro  $\sin(\alpha + \beta)$  a  $\cos(\alpha + \beta)$  pomocí matic zobrazení.

*Řešení:* Použijeme matici pro rotaci o úhel okolo počátku. Jedná se o lineární zobrazení složením dvou rotací dostaneme rotaci o součet příslušných úhlů, proto dostáváme:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

Tedy  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha)$  a  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$ .

8. Dokažte, že derivace polynomu je lineární zobrazení. Napište matici derivace pro prostor reálných polynomů stupně nejvýš pět. Jak určíte matici druhé derivace?

*Řešení:* Reálné polynomy tvoří vektorový prostor. Derivace přiřadí polynomu polynom, součtu polynomů přiřadí součet jejich derivací a alfa-násobku polynomu přiřadí alfa-násobek jeho derivace.

Pokud píšeme vektor polynomu  $P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5$  jako  $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$ , pak je matice derivace:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 2p_2 \\ 3p_3 \\ 4p_4 \\ 5p_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$