Řešená cvičení z lineární algebry I

Karel Král

5. října 2020

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu `kralka@iuuk.mff.cuni`....

Obsah

1 Cvičení

1. Spočítejte $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Nadále budeme psát $(a, b)^T$ místo $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$.

   Řešení: Číslo (budeme mu říkat *skalár*) krát vektor je jen násobení po složkách. Vektory sčítáme po jednotlivých složkách.

   Výsledek: $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-12\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+4+2\\3-12+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\-9\end{pmatrix}$.

2. Co je řešením rovnice $2y - 1 = 3$? Co je řešením, pokud přidáme rovnici $x + y = 3$? Napište maticový zápis (druhou rovnici napište na první řádek), nakreslete jako průsečík přímek a jako součet vektorů.

   Řešení: První rovnici upravíme na $y = 2$ (k oběma stranám přičteme jedna a pak obě strany vydělíme dvěma). Dostaneme soustavu:

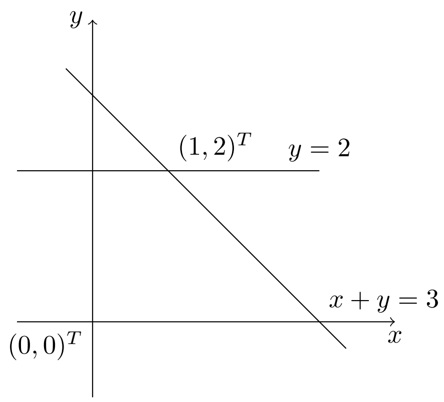
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

   Nebo také více rozepsaně:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 1 \cdot y &= 3 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y &= 2 \end{aligned}$$

   Jejím řešením je očividně bod $(1, 2)^T$ (ten získáme takzvanou zpětnou substitucí: vidíme, že $y = 2$ a poté dosadíme $x + 2 = 3$).

   Řádkový pohled dává průnik nadrovin, které jsou ve dvou rozměrech přímky. Neformální intuice je, že v jedné rovnici si můžeme zvolit všechny proměnné až na jednu, kterou dopočítáme. Dimenze množiny bodů, které danou rovnici splňují tedy bude o jedna menší než dimenze celého prostoru.



   Sloupcový pohled: chceme najít řešení vyjádřené jako součet vektorů. Sloupcový pohled dostaneme tak, že jsme si uvědomíme, že když se koukáme na i-tý řádek (rovnici), tak je to stejné jako bychom se koukali na i-té složky těch vektorů:

$$\begin{aligned} 1 \cdot x + 1 \cdot y &= 3 \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y &= 2 \end{aligned}$$

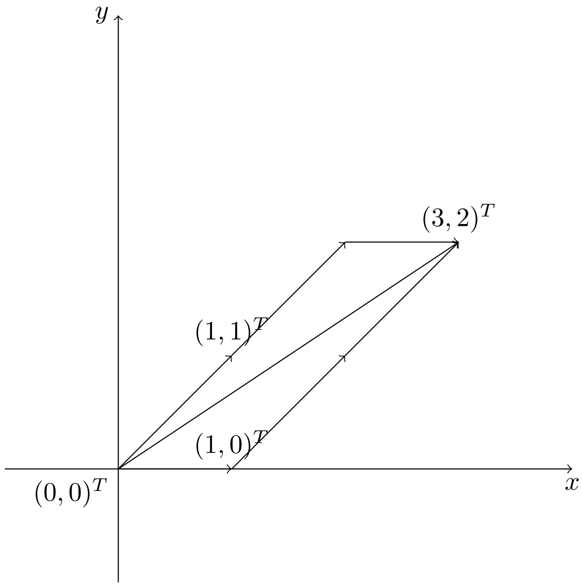
   zapíšeme jako: $x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Kratší zápis:

$$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

To poslední je jen elegantní zápis – matice krát vektor. Nyní už víte, že násobit matici sloupcovým vektorem zprava je to samé jako provádět zkoušku dosazením do rovnic!

Sloupcové vektory matice nakreslíme do roviny a stejně tak vektor pravých stran.



Tento pohled odpovídá tomu, že můžeme dělat "kroky" v nějakém směru a zajímá nás kolik kroků v kterém směru musíme udělat. Vzpomeňte si na tento pohled, až budeme pracovat s bázemi a souřadnicemi. Kroky, které můžeme dělat budou odpovídat vektorům báze, počet jednotlivých kroků bude souřadnice.

3. Popište průnik nadrovin $2w + 7x - y + 3z = 5$, $2w - y + 3z = 3$ a $2w - y = 1$ (vše ve čtyřech rozměrech, tedy v $\mathbb{R}^4$). Co je to geometricky (přímka, bod nebo prázdná množina)? Jaký je průnik, pokud přidáme $2w = -1$? Najděte čtvrtou rovnici tak aby průnikem byla prázdná množina.

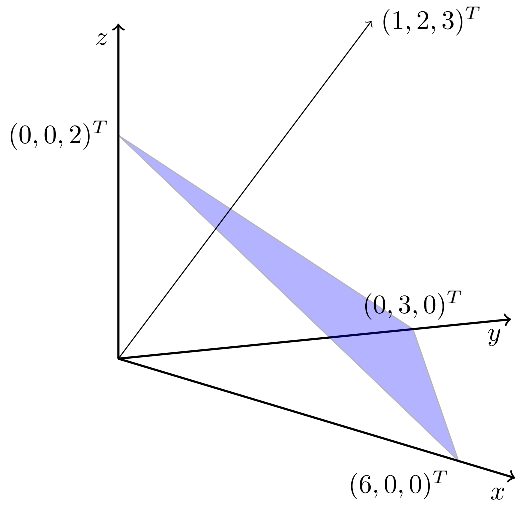
   Řešení: Tohle nenakreslím, ale můžeme řešit jako rovnice s řešením $x = 2/7, y = 2w-1, z = 2/3$, které můžeme zapsat jako: $\begin{pmatrix}0\\2/7\\-1\\2/3\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$, což je přímka (honosně řečeno *afinní prostor*).

   Přidáním rovnice $2w = -1$ dostaneme jediný bod (dosadíme $w = -1/2$ do vyjádření přímky).

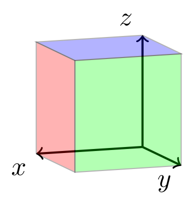
   Pokud bychom chtěli přidat rovnici, tak aby neexistovalo řešení, můžeme přidat jakoukoliv rovnici, která neobsahuje přímku z prvního odstavce. Nejjednodušší je $2w+7x-y+3z = 0$.

4. Pro každou polohu tří rovin v prostoru (všechny rovnoběžné, průnik jeden bod, průnik přímka, ...) napište soustavu, která má takový tvar. Co znamená rovnoběžnost rovin pro soustavu rovnic? (Hint: počet řešení a dva řádky vyjadřující dvě rovnoběžné roviny.)

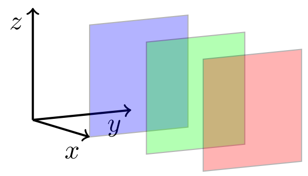
   Řešení: Rovnice $1x + 2y + 3z = 6$ určuje rovinu s normálovým vektorem $(1, 2, 3)^T$ (ten je na ni kolmý). Tato rovina prochází například body $(6, 0, 0)^T$, $(0, 3, 0)^T$ a $(0, 0, 2)^T$, stačilo za dvě souřadnice cokoliv dosadit a dopočítat třetí souřadnici.



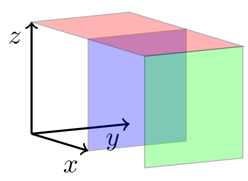
Obrázek 1: Rovina se svým normálovým vektorem.



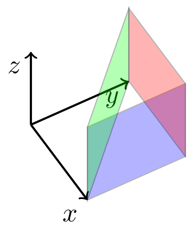
Obrázek 2: Tři roviny $x = 1$ (červeně), $y = 1$ (zeleně), $z = 1$ (modře). Všechny se protínají v jednom bodě.



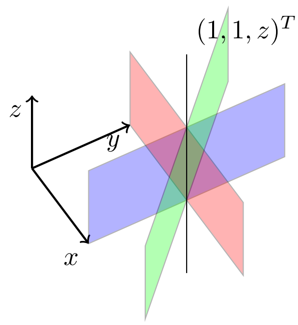
Obrázek 3: Tři roviny $x = 1$ (modře), $x = 2$ (zeleně), $x = 3$ (červeně). Všechny rovnoběžné, tedy nemají společný průnik.



Obrázek 4: Tři roviny $x = 1$ (modře), $x = 2$ (zeleně), $z = 1$ (červeně). Dvě rovnoběžné, tedy nemají společný průnik.



Obrázek 5: Tři roviny $x = 1$ (modře), $y = 1$ (červeně), $x + y = 1$ (zeleně). Žádné rovnoběžné, ale nemají společný průnik.



Obrázek 6: Tři roviny $x = 1$ (modře), $y = 1$ (červeně), $x + y = 2$ (zeleně). Žádné rovnoběžné, společný průnik je přímka.

5. Určete středovou rovnici kružnice procházející body $(3,3)^T, (1,5)^T, (5,5)^T$ Pro připomenutí kružnice se středem $S = (s_1, s_2)^T$ a poloměrem $r \in [0, \infty)$ má rovnici $(x-s_1)^2+(y-s_2)^2 = r^2$.

   Řešení: Napišme si soustavu rovnic:

$$(3 - s_1)^2 + (3 - s_2)^2 = r^2$$
$$(1 - s_1)^2 + (5 - s_2)^2 = r^2$$
$$(5 - s_1)^2 + (5 - s_2)^2 = r^2$$

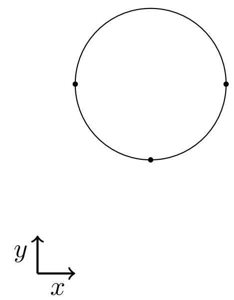
   Po roznásobení:

$$s_1^2 - 6s_1 + 9 + s_2^2 - 6s_2 + 9 = r^2 \tag{1}$$
$$s_1^2 - 2s_1 + 1 + s_2^2 - 10s_2 + 25 = r^2 \tag{2}$$
$$s_1^2 - 10s_1 + 25 + s_2^2 - 10s_2 + 25 = r^2 \tag{3}$$

   Od první i od druhé rovnice odečteme třetí rovnici:

$$4s_1 - 16 + 4s_2 - 16 = 0$$
$$8s_1 - 24 = 0$$

   Výsledkem tedy je: $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 2^2$.



Obrázek 7: Kružnice se středem v $(3,5)^T$ a poloměrem dva.

6. Pod jakou podmínkou jsou body $(0,y_1)^T,(1,y_2)^T,(2,y_3)^T$ na jedné přímce? Pod jakou podmínkou jsou body $(0,0)^T,(y_1,y_2)^T,(y_3,y_4)^T$ na jedné přímce?

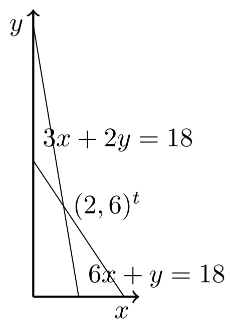
   Řešení: Napišme si parametrickou rovnici přímky procházející body $(0,y_1)^T,(1,y_2)^T$, ta je $(0,y_1)^T+t(1,y_2-y_1)^T$ pro $t\in\mathbb{R}$. Aby třetí bod $(2,y_3)^T$ ležel na této přímce, musí $t=2$ a tedy $y_3=2(y_2-y_1)$.

   Obdobně řešíme i druhý případ, parametrická rovnice je $t(y_1,y_2)^T$ a třetí bod tedy splňuje $y_3=ty_1$ a zároveň $y_4=ty_2$ (pro tu samou hodnotu t).

   Tento příklad je řešitelný obdobně i pomocí obecné rovnice.

7. Najděte rovnici přímky, jejíž úsek mezi souřadnými osami je rozdělen bodem $(2,6)^t$ na dvě části v poměru 1:2.

   Řešení: Využijeme podobnosti trojúhelníků, z průsečíků s osami snadno odvodíme příslušné rovnice.



Obrázek 8: obě řešení.

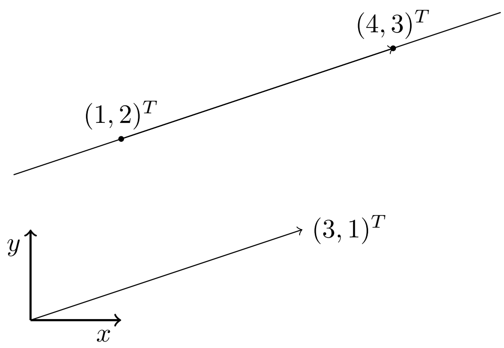
8. (a) Napište parametrické vyjádření $S=\{\vec{u}+t\vec{v}\mid t\in\mathbb{R}\}$ přímky jdoucí body $(1,2)^T,(4,3)^T$.

   Řešení: Parametrické vyjádření se skládá ze "startovního" vektoru u a směrového vektoru v, "podél kterého se můžeme pohybovat ze startu."

   Startovní vektor můžeme volit například vektor $(1,2)^T$ a směrový získáme jako druhý vektor minus tento první $(4,3)^T-(1,2)^T=(3,1)^T$. Parametrické vyjádření tedy je $\left\{(1,2)^T+t(3,1)^T \mid t\in\mathbb{R}\right\}$.

   Platí, že místo teď vypočteného směrového vektoru můžeme vzít jeho jakýkoliv nenulový násobek, což změní jen hodnotu parametru t.

   Všimněte si, že volně zaměňuji body z prostoru $\mathbb{R}^2$ za vektory. Pokud zvolíme soustavu souřadnic, pak se na bod můžeme dívat jako na vektor jeho souřadnic. Naproti tomu vás čeká mnohem obecnější definice vektorů. Vektorem bude mimo jiné i funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



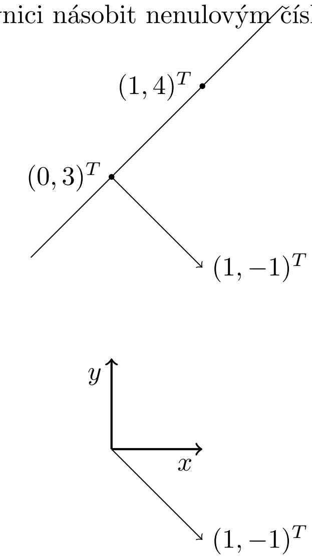
Obrázek 9: Přímka, vyznačený směrový vektor.

(b) Napište obecnou rovnici $ax + by + c = 0$ přímky jdoucí body $(0,3)^T, (1,4)^T$. Nakreslete vektor $(a,b)^T$, nepřijde vám kolmý na tu přímku?

Řešení: Zde řešíme soustavu rovnic, případně určíme směrový vektor a k němu kolmý vektor zvaný normálový (pro vektor $(a,b)^T$ je kolmým vektorem vektor $(-b,a)^T$ i vektor $(b,-a)^T$, to že jsou opravdu kolmé bude předmětem některého příštího cvičení).

Směrový vektor je $(1,1)^T$, normálový tedy bude $(1,-1)^T$. Normálový vektor udává koeficienty a, b v rovnici $ax + by = c$. Dosazením dopočteme koeficient c. Výsledek je $x - y = -3$.

Opět můžeme celou rovnici násobit nenulovým číslem a přímka zůstane nezměněna.



Obrázek 10: Přímka, vyznačený normálový vektor.

(c) Převeďte obecnou rovnici $3x - 2y + 1 = 0$ na parametrické vyjádření.

Řešení: Můžeme spočítat dva body ležící na této přímce a postupovat jako v předešlém případě. Druhá možnost je spočítat směrový vektor $(2,3)^T$ (kolmý na normálový vektor $(3,2)^T$) a dopočítat startovní bod například dosazením nuly za x a získáním $(0,1/2)^T$.

(d) Převeďte parametrické vyjádření $S = \left\{(1,2)^T + t(-1,2)^T \mid t \in \mathbb{R}\right\}$ na obecnou rovnici.

Řešení: Můžeme spočítat dva body ležící na této přímce a postupovat jako v předešlém případě. Druhá možnost je spočítat normálový vektor $(2,1)^T$ (kolmý na směrový vektor $(-1,2)^T$) a dopočítat $c=-4$ pro počáteční bod $(2\cdot 1+1\cdot 2+c=0)$.

Jsou daná vyjádření jednoznačná? *Řešení:* Nejsou. Směrový vektor můžeme vynásobit libovolnou nenulovou konstantou. Navíc jako počáteční bod můžeme volit libovolný bod na dané přímce. Obdobně celou obecnou rovnici můžeme vynásobit libovolnou nenulovou konstantou.

Najděte obě vyjádření roviny procházející body $(1,2,0)^T,(-1,0,1)^T,(0,3,1)^T$, pokuste se je na sebe navzájem převést. Co by se stalo, kdyby všechny tři body byly na jedné přímce?

Řešení: TODO

2 Cvičení

1. Alenka má o tři jablíčka víc než Bohouš. Pokud bychom dali každému z nich jedno jablíčko, měla by Alenka dokonce dvakrát tolik jablíček než Bohouš. Sestavte soustavu lineárních rovnic a vyřešte.

   Pro danou soustavu rovnic $Ax=b$, co se stane s řešením x, když

   (a) Prohodíme dvě rovnice (změníme pořadí rovnic).

   (b) Vynásobíme jednu rovnici nenulovým číslem.

   (c) Přičteme jednu rovnici k druhé.

   Řešení: Nestane se nic, těmto úpravám říkáme ekvivalentní úpravy.

   Nakreslete, co se děje s průsečíky přímek a co se děje se sloupcovým pohledem na věc, když provádíme ekvivalentní řádkové úpravy.

   Řešení: Průsečíky přímek zůstávají na jednom místě, protože množina řešení se nemění.

   Co se děje s řešením, pokud předchozí (prohození, násobení a přičtení) provádíme se sloupci?

   Řešení: Pokud je (jedním libovolným) řešením soustavy vektor

$$(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n)^t$$

   a prohodíme sloupce i a j, pak je řešením vektor

$$(x_1,\dots,x_{i-1},x_j,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_i,x_{j+1},\dots,x_n)^t.$$

   Pokud je řešením vektor

$$(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)^t,$$

   pak po vynásobení i-tého sloupce nenulovým číslem $c\in\mathbb{R}$ bude řešením

$$(x_1,\dots,x_{i-1},x_i/c,x_{i+1},\dots,x_n)^t$$

   Pokud je řešením vektor

$$(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n)^t$$

   a přičteme sloupec i k sloupci j, pak je řešením vektor

$$(x_1,\dots,x_{i-1},x_i-x_j,x_{i+1},\dots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\dots,x_n)^t.$$

Pro zamyšlení: je zbytečné, pokud by byly dvě rovnice stejné, nebo jedna rovnice násobkem druhé, nebo jedna rovnice součtem jiných dvou? Je zbytečný nějaký sloupec, pokud by byl stejný jako jiný, násobkem jiného či součtem jiných dvou?

Řešení: Ano, tyto úvahy vedou na hodnost matice.

2. Počítejte řešení následujících soustav rovnic:

$$\begin{aligned} 3x_1+2x_2+\ x_3 &= \ \ 5 \\ 2x_1+3x_2+\ x_3 &= \ \ 1 \\ 2x_1+\ x_2+3x_3 &= 11 \\ 5x_1+5x_2+2x_3 &= \ \ 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1+2x_2+8x_3-3x_4+9x_5 &= 2 \\ 2x_1+2x_2+4x_3-\ x_4+3x_5 &= 2 \\ x_1+\ x_2+3x_3-2x_4+3x_5 &= 1 \\ 3x_1+3x_2+5x_3-2x_4+3x_5 &= 1 \end{aligned}$$

3. Nalezněte aspoň jedno netriviální řešení soustavy $Ax = 0$. Proveďte zkoušku i s případnými parametry. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & -3 \\ 7 & 6 & 10 & 7 \end{pmatrix}$

Řešení: Dosadíme do rovnic i s příslušnými parametry. S parametry pracujeme jako s proměnnými, nedosazujeme za ně konkrétní čísla!

Příklady pro početně zdatné:

---

4. Pokud soustava rovnic má řešení, tak ho umíme najít a umíme ověřit, že řešení je řešením (zkouška). Tedy jedno takové řešení je "svědek" toho, že soustava je řešitelná. Vymyslete "svědka" toho, že soustava žádné řešení nemá. (Poznámka: se "svědky" neboli certifikáty něčeho se v informatice velice často setkáváme, například v teorii složitosti.)

Řešení: Všimneme si, že soustava nemá řešení právě tehdy, když lineárními kombinacemi řádků (tj. prováděním ekvivalentních úprav) dostaneme vlevo samé nuly a na pravé straně nenulu. Zkráceně tedy můžeme psát $A^T y = 0$ a zároveň $b^T y = 1$ (rozmyslete si, proč bez újmy na obecnosti můžeme psát 1). Dokázat, že soustava rovnic nemá řešení tedy akorát znamená vyřešit jinou soustavu lineárních rovnic.

S obdobnými dualitami se setkáte v lineárním programování.

3 Cvičení

1. Počítejte řešení následujících soustav rovnic:

$$\begin{aligned} -x_1+\ x_2-3x_3+4x_4 &= \ \ 1 \\ 2x_1-\ x_2+4x_3-7x_4 &= \ \ 0 \\ -x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4 &= -3 \\ -x_1+2x_2-5x_3+5x_4 &= \ \ 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 + x_4 &= 1 \\ 3x_1-2x_2-3x_3+4x_4 &= -2 \\ x_1+x_2-x_3+x_4 &= 2 \\ x_1 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x_1-3x_2+2x_3 &= 1 \\ x_1-2x_2+x_3 &= 0 \\ 5x_1-9x_2+5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2. Počítejte řešení následujících soustav rovnic: $Ax = b$, $Ay = c$, $Az = d$. Proveďte zkoušku. Přemýšlejte, jak si můžete usnadnit práci.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \ b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 13 \end{pmatrix}, \ d = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Řešení: Všimneme si, že v následujících soustavách provádíme Gaussovu eliminaci stejným způsobem (tytéž elementární operace ve stejném pořadí):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 10 & 9 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 10 & 13 \end{array}\right), \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 7 & 6 & 10 & -6 \end{array}\right).$$

Tudíž můžeme řešit Gaussovu eliminaci pouze jednou, pokud všechny pravé strany budeme uvažovat najednou. Tedy budeme řešit následující soustavu rovnic:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & -3 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 10 & 9 & 13 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & -3 \\ 6 & 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 14 & 12 & 20 & 18 & 26 & -12 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & -3 \\ 0 & -9 & -11 & -7 & -22 & 9 \\ 0 & -9 & -15 & -3 & -30 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & -3 \\ 0 & -9 & -11 & -7 & -22 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & -8 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & -3 \\ 0 & -9 & -11 & -7 & -22 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & -3 \\ 0 & -9 & 0 & -18 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 5 & 3 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

To, co jsme právě vyřešili je maticová soustava tvaru $AX = B$, kde A, B jsou matice a X je hledaná matice.

Nyní provedeme zkoušku. Všimneme si, že zkouška je vlastně maticové násobení:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 9 & 13 & -6 \end{pmatrix}$$

Tohle znovu uvidíme při invertování matic, kde řešíme soustavu rovnic $AX = I$, kde I je jednotková matice.

3. Vynásobte následující matice: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

4. Naučte se sčítat matice, násobit matice *skalárem* (tj. číslem), násobit matice vektorem, násobit matici maticí, invertovat matice.

   Zkuste invertovat následující matice:

   $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

   Jaký je vztah mezi rankem a invertovatelností?

   Řešení: Inverzi jsme definovali jen pro čtvercové matice plného ranku, tak zvané *regulární* matice. Pro *singulární* matice nemáme inverzi definovanou.

   Obecně maticové násobení není *komutativní*. Vymyslete dvě čtvercové matice aby $AB \neq BA$.

   Řešení: TODO

   Platí, že $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, vyzkoušejte. Vysvětlete proč.

   Řešení: TODO

4 Cvičení

1. Naučte se sčítat matice, násobit matice *skalárem* (tj. číslem), násobit matice vektorem, násobit matici maticí, invertovat matice.

   Zkuste invertovat následující matice:

   $$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

   Jaký je vztah mezi rankem a invertovatelností?

   Řešení: Inverzi jsme definovali jen pro čtvercové matice plného ranku, tak zvané *regulární* matice. Pro *singulární* matice nemáme inverzi definovanou.

   Obecně maticové násobení není *komutativní*. Vymyslete dvě čtvercové matice aby $AB \neq BA$.

   Řešení: TODO

   Platí, že $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, vyzkoušejte. Vysvětlete proč.

   Řešení: TODO

2. Invertujte následující matice: $\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

   Jaký je vztah mezi transpozicí inverze a inverzí transpozice?

3. Uveďte různé podmínky pro regularitu matice. Je matice s jedním nulovým sloupcem (řádkem) regulární?

4. Rozhodněte, zda součet libovolných dvou regulárních matic je regulární.

5. Ukažte, že součin regulárních matic je regulární.

6. Porovnejte množiny řešení soustav $Ax = b$ a $(QA)x = Qb$ pro

   (a) Q regulární

   (b) Q singulární

7. Je součin symetrických matic symetrická matice?

8. Pro libovolnou nesymetrickou čtvercovu matici A zkonstruujte symetrickou matici B tak, že jejich součin nekomutuje, t.j. $AB \neq BA$. Komutuje součin matic pokud jsou obě matice symetrické?

9. Dokažte, anebo vyvraťte, zdali pro matice A, B, C a $\mathbf{0}$ stejného řádu a reálná čísla α, β platí:
   - $A + (B + C) = (A + B) + C$
   - $A + B = B + A$
   - $A + \mathbf{0} = A$
   - $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$
   - $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$
   - $A + (-1)A = \mathbf{0}$
   - $1A = A$
   - $A(B + C) = AB + AC$
   - $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
   - $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
   - $\alpha A + \beta B = (\alpha + \beta)(A + B)$
   - $(A^T)^T = A$
   - $A^T A$ je symetrická
   - $(A + B)^T = A^T + B^T$
   - $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$
   - $A \cdot I_n = A$

10. Ukažte, že jsou-li $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ a $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)^T$ dvě řešení dané soustavy lineárních rovnic, je také řešením i $\alpha x + (1-\alpha)x' = (\alpha x_1 + (1-\alpha)x'_1, \alpha x_2 + (1-\alpha)x'_2, \ldots, \alpha x_n + (1-\alpha)x'_n)^T$ pro libovolné reálné číslo α. Zobecněte tuto úvahu i pro více různých řešení $x, x', \ldots, x^{(k)}$ dané soustavy.

11. - Vymyslete, jak rychle mocnit číslo. Například spočítejte (na papíře), kolik je 3^{16} s použitím co nejméně násobení. Co by bylo třeba upravit, kdybychom měli exponent, který není mocninou dvojky?

      Řešení: Uvědomme si, že násobení čísel je *asociativní*, tedy můžeme výraz uzávorkovat, jak chceme. Místo $2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2))$ tedy tří násobení můžeme počítat $(2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 4 \cdot 4$, což jsou jen dvě násobení, pokud si výsledek první závorky zapamatujeme.

      Pokud bychom chtěli spočítat lichou mocninu, pak si jedno násobení dáme "stranou": $2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2))) = 2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot (2 \cdot 2) \cdot 4$, což jsou tři násobení místo čtyřech.

```
def power(x, n):
    """Return x**n for number x and integer n."""
    if n < 0:
        x = 1 / x
        n = -n
    if n == 0:
        return 1
    half_power = power(x, n // 2)
    if n % 2 == 1:
        return x * half_power * half_power
    else:
        return half_power * half_power
```

      Nebo nerekurzivně:

```
def power(x, n):
    """Return x**n for number x and integer n."""
    if n < 0:
        x = 1 / x
```

```
        n = -n
    if n == 0:
        return 1
    y = 1
    while n > 1:
        if n % 2 == 1:
            y = x * y
        x = x * x
        n = n // 2
    return x * y
```

V každém volání rekurze uděláme nejvýš dvě násobení a zmenšíme n na polovinu. Pro delší součiny máme řádově $\mathcal{O}(\log n)$ násobení pro spočítání x^n.

- Vymyslete, jak násobením matic reprezentovat počítání Fibonacciho čísel. Fibonacciho čísla jsou daná jako $F_1 = F_2 = 1$ a pak $F_i = F_{i-2} + F_{i-1}$. Jak bychom to mohli použít k jejich rychlému počítání? (Nápověda: obdobný postup jako v předchozím příkladě.)

  Řešení: Násobení matic je také asociativní, jak si brzo dokážete na přednášce. (Dejte pozor na to, že maticové násobení není komutativní, tedy obecně rozhodně neplatí, že AB by bylo to samé jako BA! Zkuste vymyslet protipříklad, kde $AB \neq BA$.) Zbývá tedy realizovat výpočet dalšího Fibonacciho čísla pomocí násobení maticí a pak umocnit matici. Z intuice maticového násobení získáme: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$

  Tedy chceme spočítat $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$

5 Cvičení

1. Definujte grupu. Důležitou třídou grup jsou komutativní grupy, ty si dokonce vysloužily vlastní jméno a říkáme jim Abelovy (abelovské). Připomeňte i definici komutativity.

   Řešení: Operace je komutativní, pokud pro všechna a, b platí $a \circ b = b \circ a$.

   Grupa je dvojice $(G, \circ)$, kde G je množina a $\circ$ je binární operace na G (tedy $\circ\colon G \times G \to G$) splňující:

   (A) Operace $\circ$ je asociativní (tedy $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ pro všechna $a, b, c \in G$).

   (E) Existuje prvek e takový, že pro všechna $a \in G$ platí $a \circ e = e \circ a = a$ (tento prvek nazýváme jednotkový nebo také neutrální).

   (I) Pro každé $a \in G$ existuje prvek $b \in G$ takový, že $a \circ b = b \circ a = e$, kde e je jednotkový prvek. Takovému b říkáme inverzní prvek a značíme ho a^{-1}.

2. Je daná operace binární operací (a) na množině $\mathbb{R}$, (b) na množině kladných přirozených čísel $\mathbb{N}^+$?

   (a) sčítání,

   Řešení: Sčítání je na obou ($a + b \in \mathbb{R}$ pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ i pro $a, b \in \mathbb{N}^+$ máme $a + b \in \mathbb{N}^+$).

   (b) odčítání,

   Řešení: Odčítání je na reálných číslech, ale ne na přirozených ($3 - 8 = -5 \notin \mathbb{N}^+$).

   (c) dělení,

Řešení: Dělení není na reálných číslech, protože nemůžeme dělit nulou. Není ani na kladných přirozených číslech ($5/3 \notin \mathbb{N}^+$).

(d) násobení

Řešení: Násobení je na obou (obdobně jako sčítání).

3. Najděte příklady binární operace na vhodné množině, která

(a) je asociativní i komutativní,

Řešení: Například celá čísla se sčítáním.

(b) je asociativní, ale není komutativní,

Řešení: Maticové násobení na množině všech matic z $\mathbb{R}^{n\times n}$.

(c) není ani komutativní, ani asociativní,

Řešení: Například celá čísla s odčítáním $2 = 5-3 \neq 3-5 = -2$. Navíc $1 = (5-1)-3 \neq 5-(1-3) = 7$.

(d) je komutativní, ale není asociativní.

Řešení: Uvažme reálná čísla a operaci $a \circ b = ab - (a+b)$, ta není asociativní neboť $-1 = 1 \circ (2 \circ 3) \neq (1 \circ 2) \circ 3 = -5$.

Přirozenějšími příklady takové operace jsou průměr dvou čísel ($avg(a,b) = \frac{a+b}{2}$) nebo absolutní hodnota rozdílu ($dist(a,b) = |a-b|$). Laskavý čtenář si sám dokáže komutativitu a najde čísla a, b, c tak, že neplatí asociativita.

4. Pro kladné celé číslo n a dvě celá čísla a, b řekneme, že a, b jsou kongruentní modulo n psáno $a \equiv b \pmod{n}$, právě když n dělí $a-b$ (tedy $a-b$ je celočíselným násobkem n). Ověřte, jestli následující jsou grupy, případně Abelovy grupy:

(a) Regulární matice $\mathbb{R}^{12\times 12}$ s operací $\circ$ maticové násobení.

(b) $(\mathbb{N}, \circ)$, kde $a \circ b = \max\{a, b\}$.

(c) Binární čísla dlouhá n číslic (2^n) a operace je xor (exkluzivní or, tedy $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$ a $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$. Pro více bitová čísla počítáme po jednotlivých složkách, tedy například $1100 \oplus 0111 = 1011$.

(d) Nosná množina jsou dvojice reálných čísel (píšeme $\mathbb{R}^2$) a binární operace je dána $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1b_1 - a_2b_2, a_1b_2 + a_2b_1)$.

(e) Otočení čtverce.

(f) Otočení a symetrie čtverce.

(g) Otočení pravidelného čtyřstěnu.

(h) Oblíbené hlavolamy často tvoří grupu (Rubikova kostka, Loydova patnáctka).

(i) Sčítání celých čísel modulo 6.

(j) Násobení nenulových čísel modulo 6.

(k) Násobení nenulových čísel modulo 5.

6 Cvičení

1. Dokažte, že v každé grupě pro každé a existuje právě jeden inverzní prvek.

Řešení: Z definice grupy existuje aspoň jeden inverzní prvek. Předpokládejme, že pro dané $a \in G$ existují dva inverzní prvky b, c. Pak můžeme psát $b = b \circ a \circ c = c$ neboť $a \circ c = b \circ a = e$, kde e je jednotkový prvek a využíváme asociativitu binární operace v grupě.

2. Dokažte, že v každé grupě existuje právě jeden jednotkový prvek.

   Řešení: Předpokládejme, že e, f jsou jednotkové prvky. Z definice jednotkového prvku máme $e = e \circ f = f$, tedy spor s předpokladem.

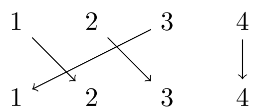
3. Dokažte, že v každé grupě je možné krátit zprava, tedy z $a \circ c = b \circ c$ plyne $a = b$.

   Řešení: Pro prvek $c \in G$ existuje inverzní prvek $c^{-1} \in G$. Vynásobíme obě strany rovnice tímto inverzním prvkem zprava (tím rovnost zůstane zachována) a máme $a \circ c \circ c^{-1} = b \circ c \circ c^{-1}$ z asociativity binární operace v grupě máme $a \circ e = b \circ e$ pro jednotkový prvek e, tedy $a = b$.

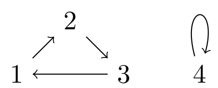
4. Dalším velice důležitým příkladem jsou grupy permutací značené S_n (kterým se říká symetrické grupy). Kde prvky jsou permutace na množině $\{1, \ldots, n\}$ a operace $\circ$ je skládání permutací. Dokažte, že toto je grupa.

   Připomeňme, že permutace je bijekce $\pi\colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$. Permutaci můžeme zapsat jako tabulku hodnot, graficky znázornit pomocí šipek které ukazují který prvek se zobrazí na který. Navíc permutaci můžeme zapsat i jako permutační matici, která má v každém řádku i každém sloupci právě jednu jedničku a jinde nuly.

   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



Obrázek 11: Bipartitní znázornění permutace.



Obrázek 12: Znázornění permutace pomocí orientovaného grafu.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

   Kolik je různých permutací na n prvkové množině?

   Definujme množinu inverzí permutace π jako $I(\pi) = \{(i, j) \mid i < j \text{ a zároveň } \pi(i) > \pi(j)\}$. Znaménko permutace se definuje jako $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{|I(\pi)|}$. Znaménko lze definovat i jinými ekvivalentními způsoby.

   Jaké je znaménko identity? Transpozice je permutace, která zamění dva prvky. Jaké je znaménko transpozice? Lze každou permutaci dostat jako složení transpozic?

   Tvoří permutace znaménka 1 grupu? Co permutace znaménka -1?

   Cyklus permutace je orientovaný cyklus v orientovaném grafu $(\{1, \ldots, n\}, \{(i, j) \mid j = \pi(i)\})$ (máme povolené smyčky).

Která permutace má nejvíc cyklů? Existuje permutace, která má pouze jeden cyklus?

Permutaci můžeme zapsat pomocí jejích cyklů tak, že seřadíme její cykly sestupně podle jejich minimálních prvků a zapíšeme je za sebe tak, že začneme vždy minimálním prvkem cyklu. Tedy naše ukázková permutace je zapsaná takto: 4123, což odpovídá cyklům (4)(123). To je ovšem jiná permutace, než permutace 4132, která odpovídá cyklům (4)(132).

7 Cvičení

1. Vypište tabulku pro sčítání a tabulku pro násobení v tělese $\mathbb{Z}_5$ (tj. v tabulce sčítání budou řádky a sloupce indexované $0, 1, 2, 3, 4$ a na pozici i, j bude $i + j$, resp. $i \cdot j$).

   - Všimněte si, že pro každé číslo existuje číslo tak že když je vynásobíme, dostaneme jedničku (tj. inverzní prvek).
   - Všimněte si, že násobení nulou a jedničkou se chová, jak čekáte.
   - Všimněte si, že 4 se chová jako -1.

   Řešení:

   Sčítání:

	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

   Násobení:

	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

2. Vynásobte následující matice nad tělesem $\mathbb{Z}_7$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

   Řešení: $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

3. Invertujte následující matici nad tělesem $\mathbb{Z}_{11}$: $\begin{pmatrix} 7 & 10 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

   Řešení: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. Vyřešte následující soustavu rovnic nad $\mathbb{Z}_5$. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \end{array}\right)$

5. Dokažte z definice, že ve vektorovém prostoru platí $(-1)\vec{v} = \overrightarrow{-v}$.

   Řešení: Z distributivity a z dokázaného na přednášce $\vec{v} + \overrightarrow{-v} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v} = (1-1)\vec{v} = 1\vec{v} + (-1)\vec{v} = \vec{v} + (-1)\vec{v}$. Navíc už v grupě máme jednoznačnost inverzu. Tady jsme použili, že $0\vec{v} = \vec{0}$, což jsme už dokázali z axiomů na přednášce.

8 Cvičení

1. Definujte vektorový prostor.
2. Připomeňme Steinitzovu větu o výměně: Buď V vektorový prostor $x_1, x_2, \dots x_m$ lineárně nezávislé vektory z V. Nechť $y_1, \dots, y_n$ je systém generátorů V. Pak:

   (a) $m \leq n$

   (b) existují navzájem různé indexy $k_1, \dots, k_{n-m}$ takové, že $x_1, \dots, x_m, y_{k_1}, y_{k_2}, \dots, y_{k_{n-m}}$ tvoří systém generátorů V.

   Projděte důkaz s $x_1 = (1,1,0)^T, x_2 = (1,0,1)^T, x_3 = (0,1,1)^T$ a kanonickou bazí jako systémem generátorů.

3. Vyberte z následující množiny lineárně nezávislé vektory

$$M = \left\{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T, (3,0,1,2)^T\right\}$$

   v prostoru $V = \mathbb{R}^4$ (tj. $M \subseteq \mathbb{R}^4$).

4. Doplňte množinu na bázi vektorového prostoru:

   (a) $M = \left\{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\right\}$ v prostoru $V = \mathbb{R}^4$.

   (b) $M = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ v prostoru $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (c) $M = \left\{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\right\}$ v prostoru reálných polynomů stupně nejvýš tři.

5. Jak určíte souřadnice vektoru vůči kanonické bázi? Určete souřadnice vektoru $[v]_B = (2,2,5)^T$ vůči kanonické bázi, kde báze $B = \left\{(0,2,1)^T, (1,1,-1)^T, (-1,0,1)^T, \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
6. Jak určíte souřadnice vektoru vůči bázi? Určete souřadnice $[v]_B$ vektoru $v = (2,1,3)^T$ vůči bázi $B = \left\{(0,2,1)^T, (1,1,-1)^T, (-1,0,1)^T, \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
7. Jak určíte souřadnice vůči bázi? Určete souřadnice $[f]_X$ vektoru $f(x) = x^4 - 1$ vůči bázi $X = \left\{x^4 + x^3, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, x^4 + 1\right\}$ reálných polynomů stupně nejvýš čtyři.

   Řešení: Řešíme soustavu rovnic $a_1(x^4+x^3)+a_2(x^3+x^2)+a_3(x^2+x)+a_4(x+1)+a_5(x^4+1) = x^4 - 1$, tu si rozepíšeme pro jednotlivé mocniny x na soustavu pěti rovnic o pěti neznámých.

8. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^4$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Řešení: Připomeňme si základní pojmy: Nechť $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (tedy vektory a_i jsou sloupce matice A) je báze. Nechť vektor x má vyjádření $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$, pak souřadnicemi vektoru x vzhledem k bázi A rozumíme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ a vektor souřadnic značíme $[x]_A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$.

   Například tedy, pokud bychom měli kanonickou bázi (značme $K = I_n$), pak $[x]_K = x$.

   Matice přechodu: mějme A, B dvě báze jako v zadání, pak maticí přechodu od A k B rozumíme matici ${}_B[\mathrm{id}]_A$, po které chceme, aby pro každý vektor x platilo: $[x]_B = {}_B[\mathrm{id}]_A [x]_A$. Tedy ze souřadnic v bázi A nám udělá souřadnice v bázi B.

(a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

Řešení: Násobení $A[x]_A$ odpovídá lineární kombinaci sloupců A kde koeficienty jsou jednotlivé souřadnice. Tedy ${}_K[\,\mathrm{id}]_A = A$.

(b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

Řešení: Z předchozího víme, že $[x]_K = B[x]_B$. Užijeme krásné věty lineární algebry, která říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru jsou stejné. Lidsky řečeno: když jsou nezávislé sloupce, jsou nezávislé i řádky a tedy matice je regulární. Tudíž existuje inverzní matice B^{-1}, kterou násobíme zleva a dostaneme: $B^{-1}[x]_K = [x]_B$. Vidíme tedy, že ${}_B[\,\mathrm{id}]_K = B^{-1}$.

(c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

Řešení: Už umíme převést souřadnice od báze A ke kanonické a od kanonické k bázi B prostým složením těchto zobrazení dostaneme požadovanou matici přechodu. Tedy ${}_B[\,\mathrm{id}]_A = {}_B[\,\mathrm{id}]_K {}_K[\,\mathrm{id}]_A = B^{-1}A$.

9 Cvičení

1. Jak určíte souřadnice vektoru vůči kanonické bázi? Určete souřadnice vektoru $[v]_B = (2,2,5)^T$ vůči kanonické bázi, kde báze $B = \left\{(0,2,1)^T, (1,1,-1)^T, (-1,0,1)^T, \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

2. Jak určíte souřadnice vektoru vůči bázi? Určete souřadnice $[v]_B$ vektoru $v = (2,1,3)^T$ vůči bázi $B = \left\{(0,2,1)^T, (1,1,-1)^T, (-1,0,1)^T, \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$.

3. Jak určíte souřadnice vůči bázi? Určete souřadnice $[f]_X$ vektoru $f(x) = x^4 - 1$ vůči bázi $X = \left\{x^4 + x^3, x^3 + x^2, x^2 + x, x + 1, x^4 + 1\right\}$ reálných polynomů stupně nejvýš čtyři.

   Řešení: Řešíme soustavu rovnic $a_1(x^4+x^3)+a_2(x^3+x^2)+a_3(x^2+x)+a_4(x+1)+a_5(x^4+1) = x^4 - 1$, tu si rozepíšeme pro jednotlivé mocniny x na soustavu pěti rovnic o pěti neznámých.

4. Pracujeme nad $\mathbb{Z}_5^4$. Pro báze A, B dané sloupci matic $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Řešení: Připomeňme si základní pojmy: Nechť $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (tedy vektory a_i jsou sloupce matice A) je báze. Nechť vektor x má vyjádření $x = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a_i$, pak souřadnicemi vektoru x vzhledem k bázi A rozumíme koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ a vektor souřadnic značíme $[x]_A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T$.

   Například tedy, pokud bychom měli kanonickou bázi (značme $K = I_n$), pak $[x]_K = x$.

   Matice přechodu: mějme A, B dvě báze jako v zadání, pak maticí přechodu od A k B rozumíme matici ${}_B[\,\mathrm{id}]_A$, po které chceme, aby pro každý vektor x platilo: $[x]_B = {}_B[\,\mathrm{id}]_A[x]_A$. Tedy ze souřadnic v bázi A nám udělá souřadnice v bázi B.

   (a) Určete matici přechodu od souřadnic báze A ke kanonické bázi.

   Řešení: Násobení $A[x]_A$ odpovídá lineární kombinaci sloupců A kde koeficienty jsou jednotlivé souřadnice. Tedy ${}_K[\,\mathrm{id}]_A = A$.

   (b) Určete matici přechodu od souřadnic kanonické báze k souřadnicím báze B.

   Řešení: Z předchozího víme, že $[x]_K = B[x]_B$. Užijeme krásné věty lineární algebry, která říká, že dimenze řádkového a sloupcového prostoru jsou stejné. Lidsky řečeno: když jsou nezávislé sloupce, jsou nezávislé i řádky a tedy matice je regulární. Tudíž existuje inverzní matice B^{-1}, kterou násobíme zleva a dostaneme: $B^{-1}[x]_K = [x]_B$. Vidíme tedy, že ${}_B[\,\mathrm{id}]_K = B^{-1}$.

(c) Určete matici přechodu od souřadnic báze A k souřadnicím báze B.

Řešení: Už umíme převést souřadnice od báze A ke kanonické a od kanonické k bázi B prostým složením těchto zobrazení dostaneme požadovanou matici přechodu. Tedy ${}_B[\mathrm{id}]_A = {}_B[\mathrm{id}]_{KK}[\mathrm{id}]_A = B^{-1}A$.

5. Pro matici $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ připomeňte, co je kernel, *Řešení:* Kernel neboli jádro je množina všech řešení homogenní soustavy

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\vec{x} = \vec{0}\right\}.$$

sloupcový prostor, *Řešení:* Sloupcový prostor neboli obraz je prostor všech pravých stran, pro která existuje řešení, ekvivalentně je to lineární obal sloupců matice A

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{\vec{b} \in \mathbb{R}^m \mid \exists \vec{x} \in \mathbb{R}^n \colon A\vec{x} = \vec{b}\right\} = \{A\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

řádkový prostor, *Řešení:* Lineární obal řádků matice A. Také se nazývá levý obraz, protože je roven $\mathrm{Im}(A^T)$.

co tu ještě chybí? *Řešení:* Levé jádro, které je $\mathrm{Ker}(A^T)$.

Je průnik dvou lineárních podprostorů lineární podprostor? *Řešení:* Ano, uzavřenost na skalární násobek a součet platí v obou pro $\vec{u}, \vec{v} \in U \cap V$ máme $a\vec{u} \in U$ a $a\vec{u} \in V$, navíc $\vec{u} + \vec{v} \in U$, $\vec{u} + \vec{v} \in V$, takže oboje je i v průniku.

Jak to souvisí se základními pohledy na soustavu rovnic? *Řešení:* Řádkový pohled odpovídá průniku podprostorů (jaké dimenze?) a sloupcový pohled odpovídá sloupcovému prostoru.

Vyzkoušejte, zda řádkový a sloupcový prostor mají stejnou dimenzi. Jak s tím souvisí dimenze kernelu? $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 6 \\ 5 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

10 Cvičení

1. Vyberte největší nezávislou podmnožinu z následující množiny a tu doplňte na bázi, počítejte nad $\mathbb{Z}_5$.

$$M = \left\{x^3 + 2x + 1, 2x^2 + 2, 3x^3 + 2x^2 + x, 4x^3 + 3x + 4\right\}$$

2. Dokažte, že lineární zobrazení je plně určeno tím, kam zobrazíme bázové vektory. Tedy pokud máme zadáno $f(b_i) = b_i'$ pro $b_1, \ldots, b_n$ bázi umíme jednoznačně určit $f(v)$ pro libovolný vektor v.

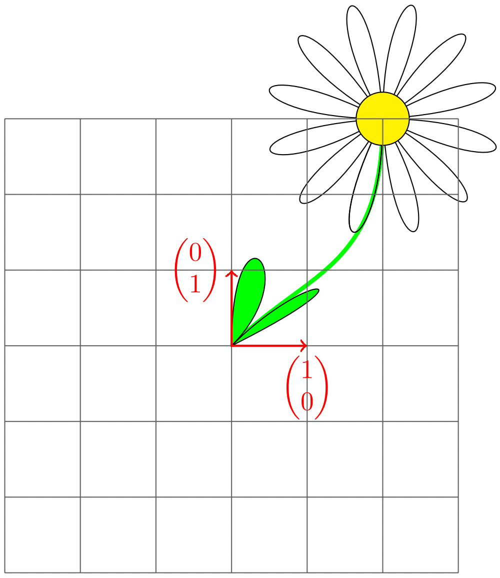
   Řešení: Postupně rozepíšeme podle definice lineárního zobrazení. Tedy $f(v) = f(\sum_{i=1}^n a_i b_i) = \sum_{i=1}^n a_i f(b_i) = \sum_{i=1}^n a_i b_i'$.

3. Jak souvisí lineární zobrazení se souřadnicemi a převody mezi bázemi. . . ?

   Řešení: Na převod mezi souřadnicemi se můžeme dívat jako na lineární zobrazení.

4. Jakému lineárnímu zobrazení odpovídá zobrazení $x \mapsto Ax$?

   Řešení: Jednotlivým vektorům kanonické báze přiřadíme jednotlivé sloupce matice A.



Obrázek 13: Původní netransformovaná květina.

5. Dokažte, že derivace polynomu je lineární zobrazení. Napište matici derivace pro prostor reálných polynomů stupně nejvýš pět. Jak určíte matici druhé derivace?

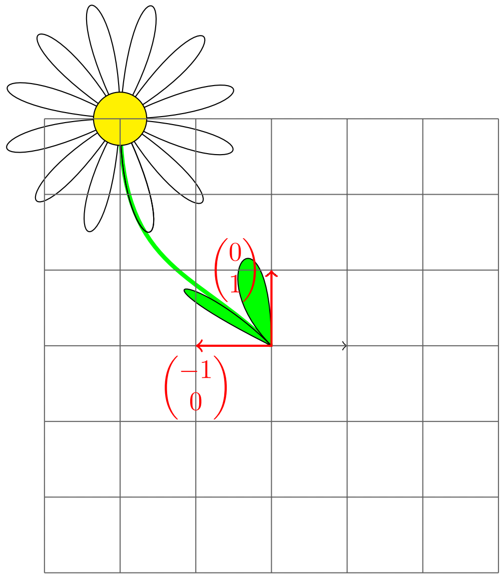
   Řešení: Reálné polynomy tvoří vektorový prostor. Derivace přiřadí polynomu polynom, součtu polynomů přiřadí součet jejich derivací a alfa-násobku polynomu přiřadí alfa-násobek jeho derivace.

   Pokud píšeme vektor polynomu $P(x) = p_0+p_1x+p_2x^2+p_3x^3+p_4x^4+p_5x^5$ jako $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$, pak je matice derivace:

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0\\0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&4&0\\0&0&0&0&0&5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_0\\p_1\\p_2\\p_3\\p_4\\p_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}p_1\\2p_2\\3p_3\\4p_4\\5p_5\\0\end{pmatrix}$$

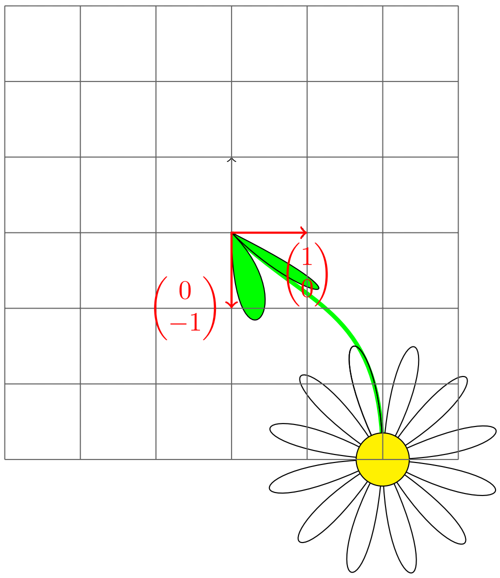
6. Určete matice lineárních zobrazení v rovině.

   - identita *Řešení:* Na obrázku 22 vidíme květinu rostoucí z počátku souřadnic, která ještě není lineárně transformovaná. Stejně je znázorněná původní mřížka 3x3, která je v tomto případě překrytá její lineárně transformovanou kopií. Černé šipky představují původní vektory $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ a červené šipky s popisky jejich obrazy (v tomto případě opět splývají). Zobrazení je identita a je samozřejmně dáno maticí $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ (první sloupec je kam se zobrazí vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ a druhý sloupec je obraz vektoru $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$).
   - symetrie podle osy y *Řešení:* Jak vidíme na obrázku 23 symetie podle osy y jen překlopí květinu, maticí transformace je $\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$

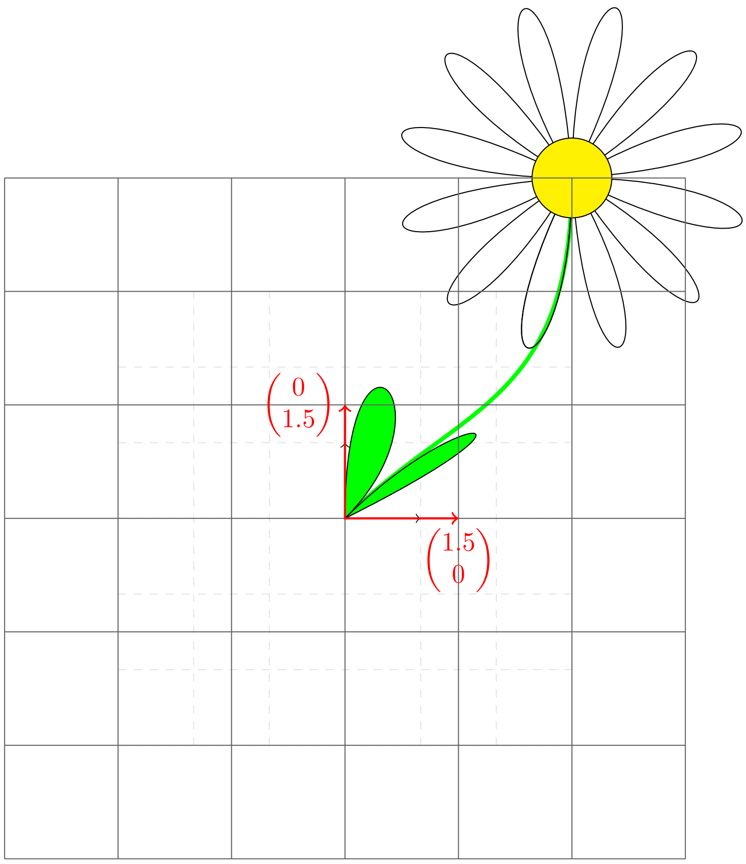


Obrázek 14: Symetrie podle osy y.

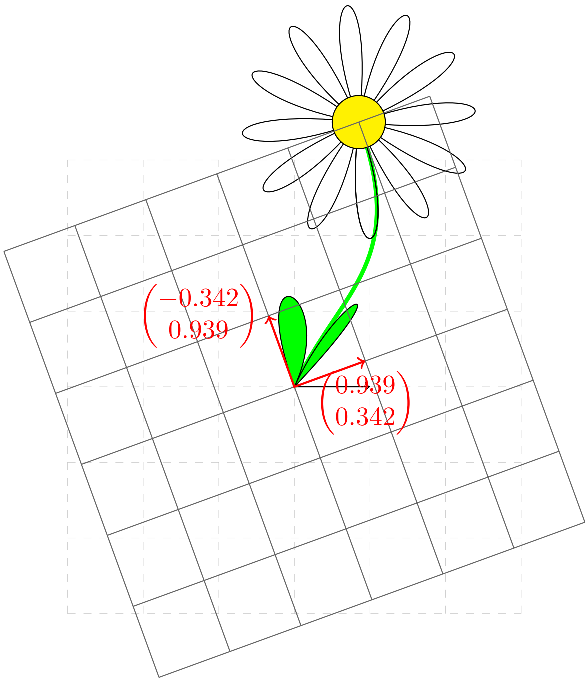
- symetrie podle osy x *Řešení:* Jak vidíme na obrázku 24 symetie podle osy x jen překlopí květinu květem dolů, maticí transformace je $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$
- zvětšení *Řešení:* Zvětšení (obrázek 25) $1,5$-krát je dáno maticí $\begin{pmatrix}1,5 & 0\\0 & 1,5\end{pmatrix}$
- rotace okolo počátku souřadnic *Řešení:* Rotace okolo počátku souřadnic proti směru hodinových ručiček o úhel φ (obrázek 25) zobrazí vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix}\cos\varphi\\\sin\varphi\end{pmatrix}$ a vektor $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\\cos\varphi\end{pmatrix}$ její matice je tedy $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\\sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$. Konkrétní rotace je zobrazena na obrázku 26.
- zvětšení podle osy x *Řešení:* Zvětšení podél osy x (obrázek 27) $1,5$-krát je dáno maticí $\begin{pmatrix}1,5 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$
- zkosení *Řešení:* Zkosení přičte k jednumu vektoru násobek druhého (obrázek 28), je dáno maticí $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$
- projekce na osu x *Řešení:* Projekce na osu x (obrázek 29) ponechá netknutou x-ovou složku a y-ovou nastaví na nulu, je dáno maticí $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$
- symetrie podle obecné osy *Řešení:* Vyřešme pro konkrétnost symetrii okolo přímky procházející počátkem souřadnic a bodem $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ označme si toto zobrazení jako f. Kam se zobrazí vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$? Na to není tak snadné odpovědět, ale předvedeme si jiný způsob, jak najít matici tohoto lineárního zobrazení ${}_K[f]_K$ (a pomocí ní už pak snadno i obraz libovolného vektoru).



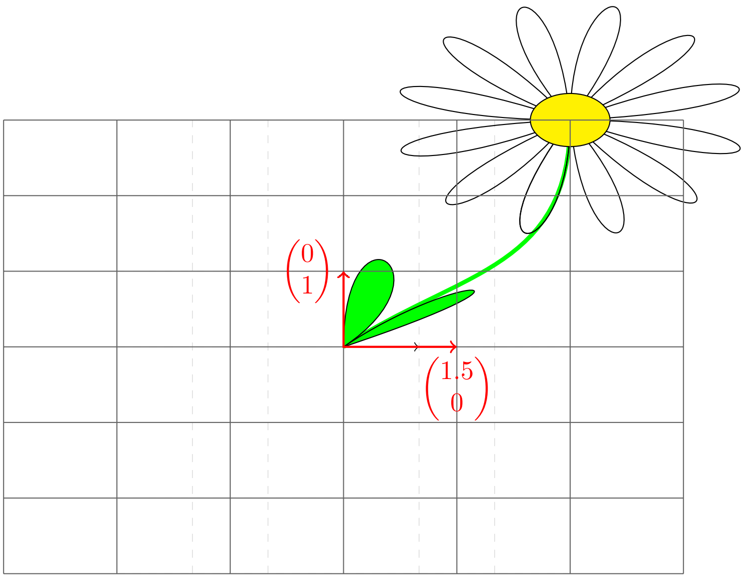
Obrázek 15: Symetrie podle osy x.



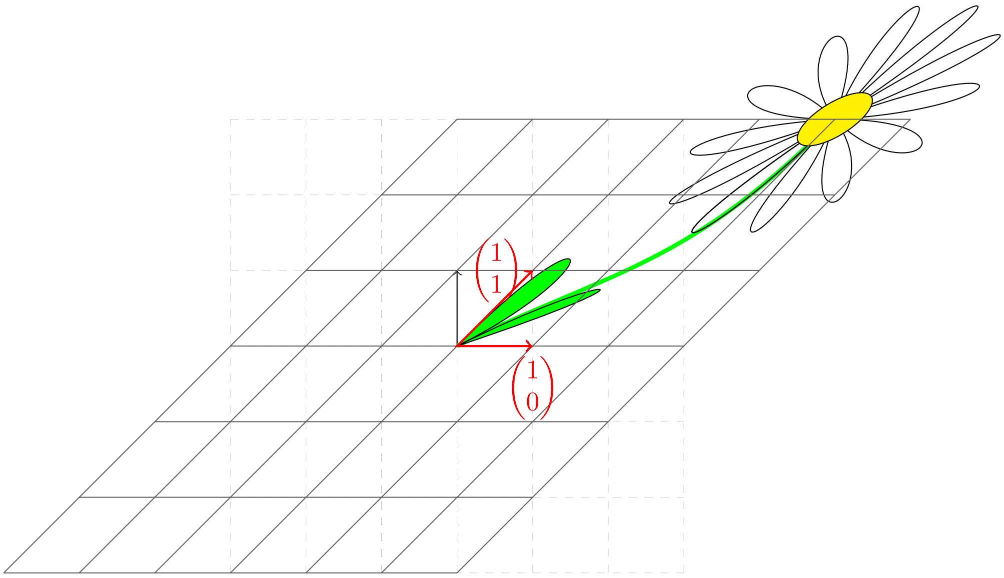
Obrázek 16: Zvětšení 1,5-krát.



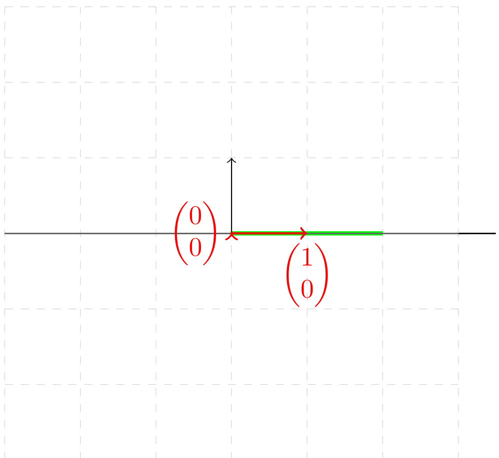
Obrázek 17: Rotace o úhel 20°, čísla jsou zaokrouhlená.



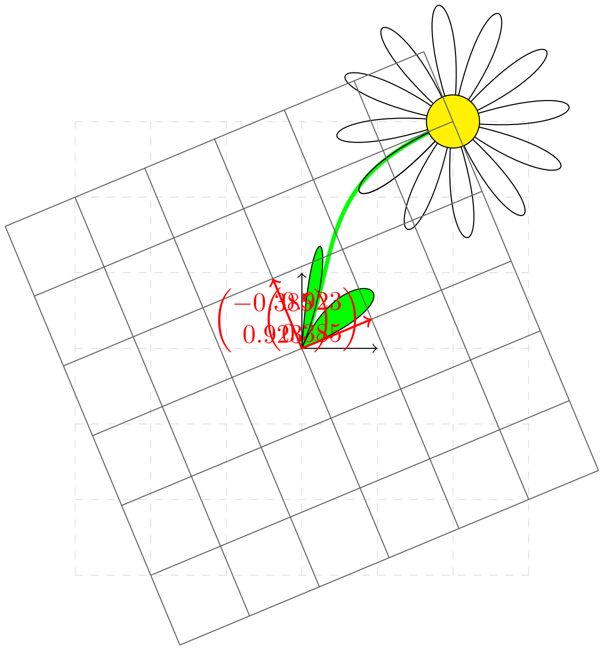
Obrázek 18: Zvětšení 1,5-krát podle osy x.



Obrázek 19: Zkosení podél osy x.



Obrázek 20: Projekce na osu x.



Obrázek 21: Symetrie kolem přímky jdoucí počátkem a bodem $(2,3)^T$ (čísla jsou zaokrouhlená).

Víme, že lineární zobrazení je jednoznačně dáno obrazy nějaké báze, nemusí se nutně jednat o kanonickou bázi. Přemýšlejme, které obrazy budou jednoduché najít (takto dostaneme nejčastěji lineární zobrazení zadané, pomocí obrazů nějakých vektorů). Symetrie podle přímky zachová danou přímku, víme tedy, že: $f\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Navíc, co je kolmé na tuto přímku se akorát zobrazí na minus samo sebe: $f\left(\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ (využili jsme poučku ze střední školy, jak najít kolmý vektor, ve druhém semestru se to naučíme obecně). Dané dva předobrazy tvoří bázi B (ověřte), jednoduše jsme tedy získali matici ${}_K[f]_B = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{pmatrix}$. Nyní jen stačí využít, co jsme se naučili o převodech souradnic:

$$\begin{aligned}
{}_K[f]_K &= {}_K[f]_{B\,B}[id]_K \\
&= {}_K[f]_B \left({}_K[id]_B\right)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{2}{13} & \frac{3}{13}\\\frac{-3}{13} & \frac{2}{13}\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}\frac{-5}{13} & \frac{12}{13}\\\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

7. Určete matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$, o kterém víte: $f\left((1,2,3)^T\right) = (1,2)^T$ $f\left((3,2,1)^T\right) = (2,1)^T$ $f\left((4,4,3)^T\right) = (0,2)^T$

   Řešení: Lineární zobrazení je dáno tím, kam zobrazí bázi. Ověřte, že vektory $(1,2,3)^T, (3,2,1)^T, (4,4,3)^T$

tvoří bázi prostoru $\mathbb{Z}_5^3$, označme tuto bázi B. Pak máme jednoduše ${}_K[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Pomocí znalostí o převodech mezi bázemi pak můžeme psát:

$$\begin{aligned} {}_K[f]_K &= {}_K[f]_{B\,B}[id]_K \\ &= {}_K[f]_B \left({}_K[id]_B\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Je toto zobrazení prosté? *Řešení:* Pokud bychom měli $f(x_1) = f(x_2)$, pak $0 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$ a tedy $x_1 - x_2$ je netriviální vektor z kernelu. Tedy zobrazení je prosté, pokud je dimenze jádra rovna nule.
- Pokud není prosté, najděte kolizi (tj. dva různé vektory takové, že $f(x_1) = f(x_2)$). *Řešení:* Stačí najít netriviální vektor x z kernelu (jádra matice f), pak víme, že $f(0) = f(x) = 0$.
- Je na? *Řešení:* Zobrazení $f\colon U \to V$ je na právě když je dimenze sloupcového prostoru matice f rovna dimenzi V.

11 Cvičení

1. Jak souvisí lineární zobrazení se souřadnicemi a převody mezi bázemi. . . ?

   Řešení: Na převod mezi souřadnicemi se můžeme dívat jako na lineární zobrazení.

2. Dokažte, že derivace polynomu je lineární zobrazení. Napište matici derivace pro prostor reálných polynomů stupně nejvýš pět. Jak určíte matici druhé derivace?

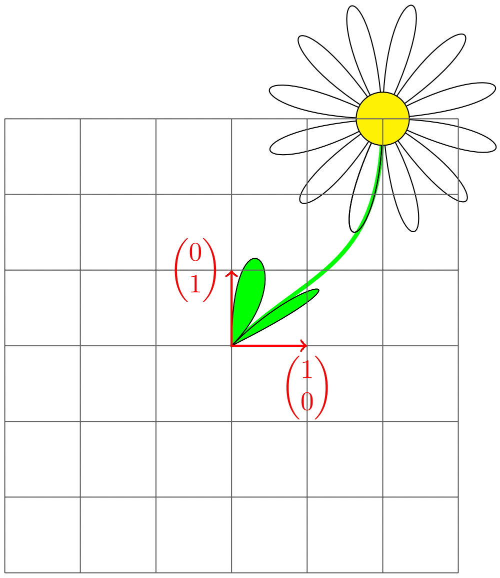
   Řešení: Reálné polynomy tvoří vektorový prostor. Derivace přiřadí polynomu polynom, součtu polynomů přiřadí součet jejich derivací a alfa-násobku polynomu přiřadí alfa-násobek jeho derivace.

   Pokud píšeme vektor polynomu $P(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + p_4x^4 + p_5x^5$ jako $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)^T$, pak je matice derivace:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 2p_2 \\ 3p_3 \\ 4p_4 \\ 5p_5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Určete matice lineárních zobrazení v rovině.

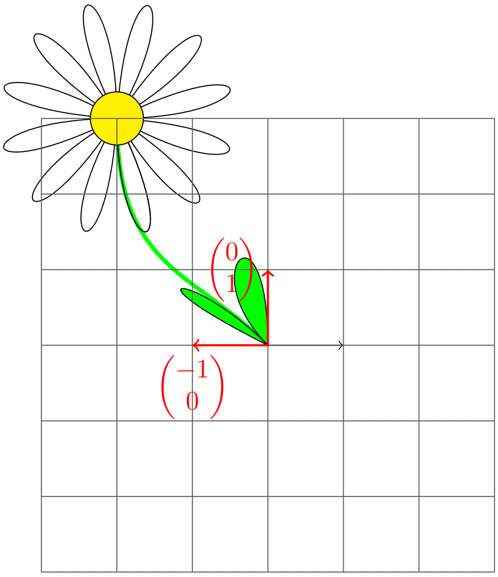
   - identita *Řešení:* Na obrázku 22 vidíme květinu rostoucí z počátku souřadnic, která ještě není lineárně transformovaná. Stejně je znázorněná původní mřížka 3x3, která je v tomto případě překrytá její lineárně transformovanou kopií. Černé šipky představují původní vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a červené šipky s popisky jejich obrazy (v tomto případě opět



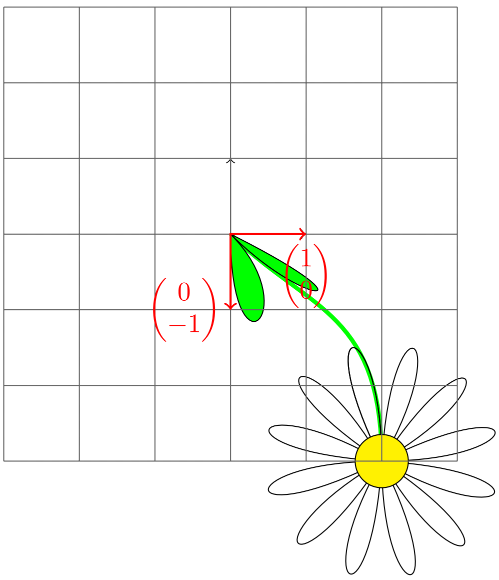
Obrázek 22: Původní netransformovaná květina.

splývají). Zobrazení je identita a je samozřejmně dáno maticí $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (první sloupec je kam se zobrazí vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ a druhý sloupec je obraz vektoru $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$).

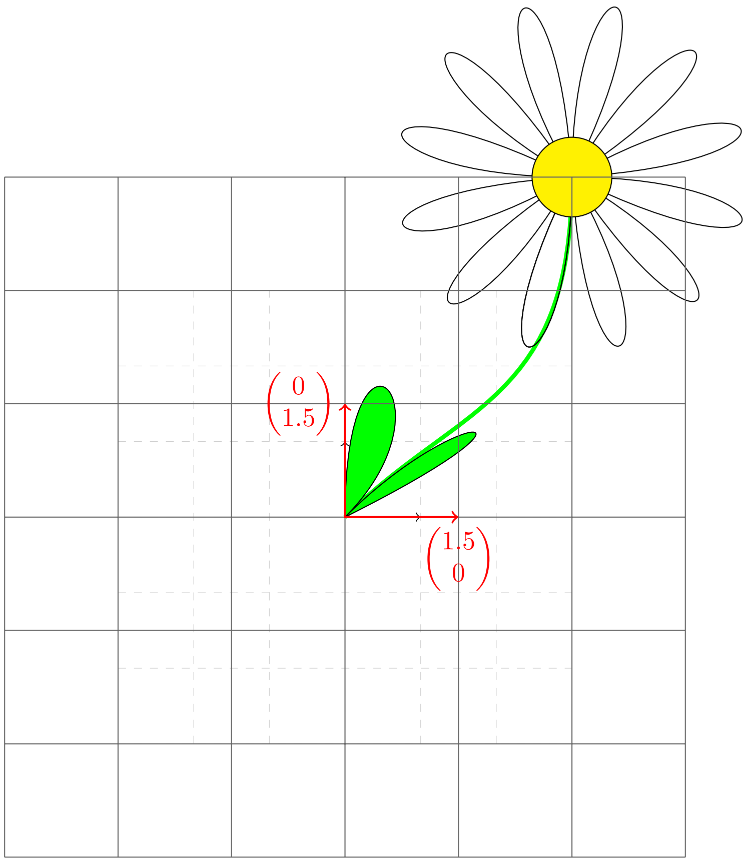
- symetrie podle osy y *Řešení:* Jak vidíme na obrázku 23 symetie podle osy y jen překlopí květinu, maticí transformace je $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- symetrie podle osy x *Řešení:* Jak vidíme na obrázku 24 symetie podle osy x jen překlopí květinu květem dolů, maticí transformace je $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$
- zvětšení *Řešení:* Zvětšení (obrázek 25) $1,5$-krát je dáno maticí $\begin{pmatrix}1,5 & 0\\ 0 & 1,5\end{pmatrix}$
- rotace okolo počátku souřadnic *Řešení:* Rotace okolo počátku souřadnic proti směru hodinových ručiček o úhel φ (obrázek 25) zobrazí vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ a vektor $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ na vektor $\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$ její matice je tedy $\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi)\end{pmatrix}$. Konkrétní rotace je zobrazena na obrázku 26.
- zvětšení podle osy x *Řešení:* Zvětšení podél osy x (obrázek 27) $1,5$-krát je dáno maticí $\begin{pmatrix}1,5 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- zkosení *Řešení:* Zkosení přičte k jednumu vektoru násobek druhého (obrázek 28), je dáno maticí $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
- projekce na osu x *Řešení:* Projekce na osu x (obrázek 29) ponechá netknutou x-ovou složku a y-ovou nastaví na nulu, je dáno maticí $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$



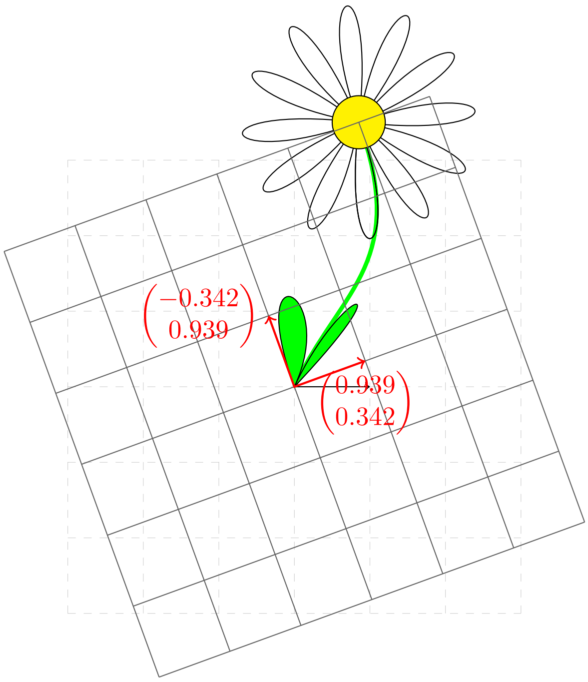
Obrázek 23: Symetrie podle osy y.



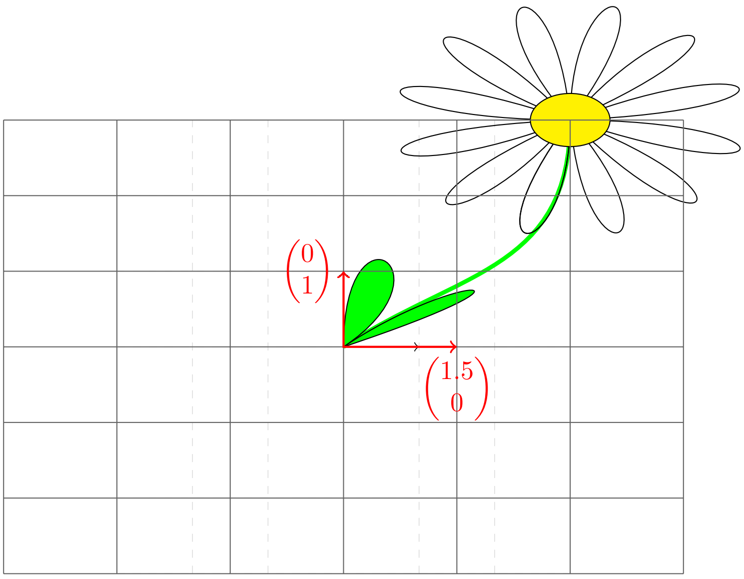
Obrázek 24: Symetrie podle osy x.



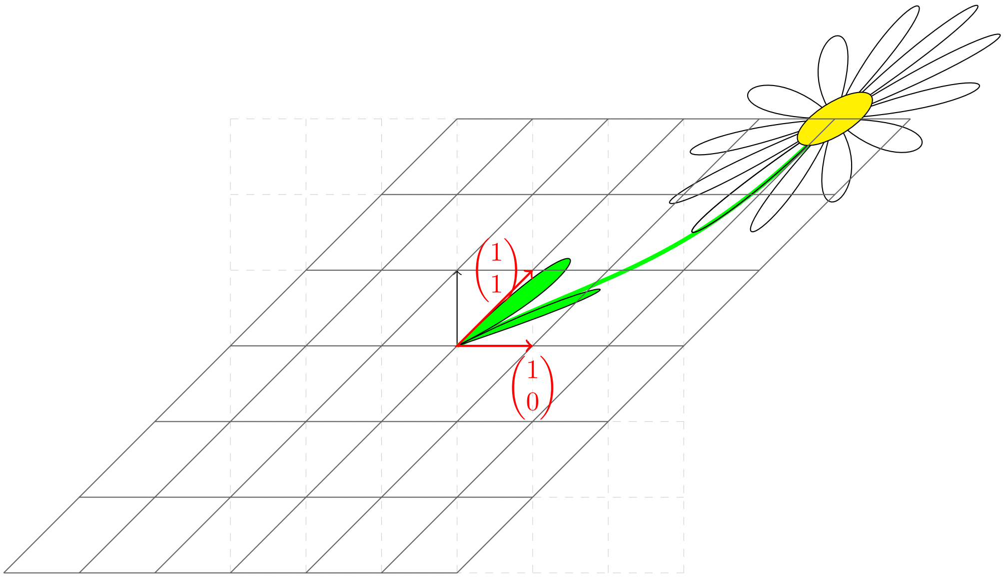
Obrázek 25: Zvětšení 1,5-krát.



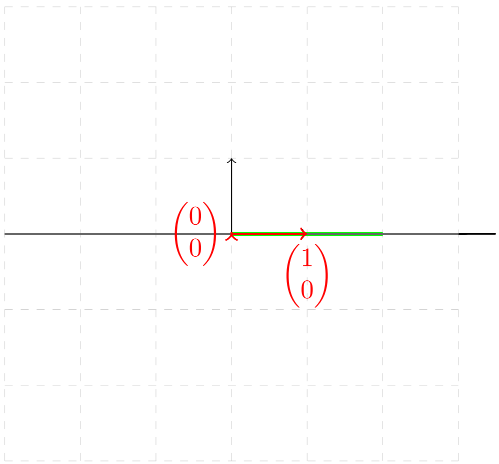
Obrázek 26: Rotace o úhel 20°, čísla jsou zaokrouhlená.



Obrázek 27: Zvětšení 1,5-krát podle osy x.



Obrázek 28: Zkosení podél osy x.



Obrázek 29: Projekce na osu x.

- symetrie podle obecné osy *Řešení:* Vyřešme pro konkrétnost symetrii okolo přímky procházející počátkem souřadnic a bodem $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ označme si toto zobrazení jako f. Kam se zobrazí vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$? Na to není tak snadné odpovědět, ale předvedeme si jiný způsob, jak najít matici tohoto lineárního zobrazení ${}_K[f]_K$ (a pomocí ní už pak snadno i obraz libovolného vektoru).

  Víme, že lineární zobrazení je jednoznačně dáno obrazy nějaké báze, nemusí se nutně jednat o kanonickou bázi. Přemýšlejme, které obrazy budou jednoduché najít (takto dostaneme nejčastěji lineární zobrazení zadané, pomocí obrazů nějakých vektorů). Symetrie podle přímky zachová danou přímku, víme tedy, že: $f\left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$. Navíc, co je kolmé na tuto přímku se akorát zobrazí na minus samo sebe: $f\left(\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ (využili jsme poučku ze střední školy, jak najít kolmý vektor, ve druhém semestru se to naučíme obecně). Dané dva předobrazy tvoří bázi B (ověřte), jednoduše jsme tedy získali matici ${}_K[f]_B = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{pmatrix}$. Nyní jen stačí využít, co jsme se naučili o převodech souradnic:

$$\begin{aligned}
{}_K[f]_K &= {}_K[f]_{B\,B}[id]_K\\
&= {}_K[f]_B\left({}_K[id]_B\right)^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\3 & 2\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{13} & \frac{3}{13}\\\frac{-3}{13} & \frac{2}{13}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\frac{-5}{13} & \frac{12}{13}\\\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Odvoďte součtové vzorce pro $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos(\alpha+\beta)$ pomocí matic zobrazení.

   Řešení: Použijeme matici pro rotaci o úhel okolo počátku. Jedná se o lineární zobrazení složením dvou rotací dostaneme rotaci o součet příslušných úhlů, proto dostáváme:

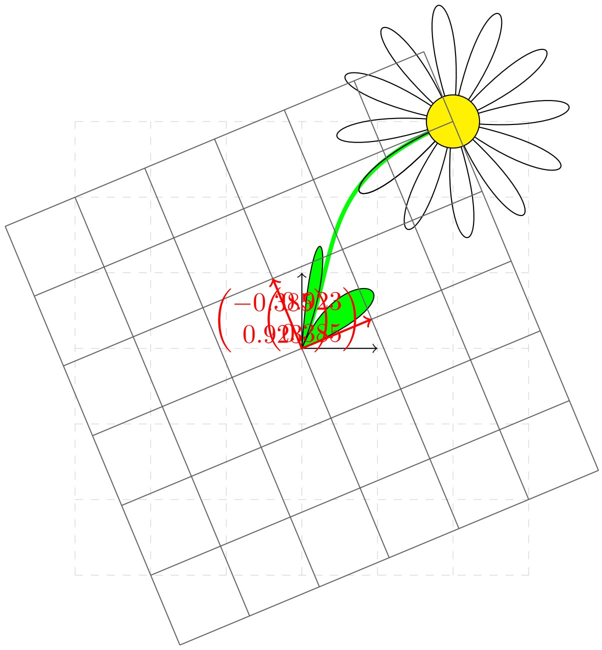
$$\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\\sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\beta) & -\sin(\beta)\\\sin(\beta) & \cos(\beta)\end{pmatrix}.$$

   Tedy $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta)\cos(\alpha)$ a $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta)$.

5. Určete matici lineárního zobrazení $f\colon \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$, o kterém víte: $f\left((1,2,3)^T\right) = (1,2)^T$ $f\left((3,2,1)^T\right) = (2,1)^T$ $f\left((4,4,3)^T\right) = (0,2)^T$

   Řešení: Lineární zobrazení je dáno tím, kam zobrazí bázi. Ověřte, že vektory $(1,2,3)^T, (3,2,1)^T, (4,4,3)^T$ tvoří bázi prostoru $\mathbb{Z}_5^3$, označme tuto bázi B. Pak máme jednoduše ${}_K[f]_B = \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}$.
   Pomocí znalostí o převodech mezi bázemi pak můžeme psát:

$$\begin{aligned}
{}_K[f]_K &= {}_K[f]_{B\,B}[id]_K\\
&= {}_K[f]_B\left({}_K[id]_B\right)^{-1}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\2 & 2 & 4\\3 & 1 & 3\end{pmatrix}^{-1}
\end{aligned}$$



Obrázek 30: Symetrie kolem přímky jdoucí počátkem a bodem $(2,3)^T$ (čísla jsou zaokrouhlená).

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

- Je toto zobrazení prosté? *Řešení:* Pokud bychom měli $f(x_1) = f(x_2)$, pak $0 = f(x_1) - f(x_2) = f(x_1 - x_2)$ a tedy $x_1 - x_2$ je netriviální vektor z kernelu. Tedy zobrazení je prosté, pokud je dimenze jádra rovna nule.
- Pokud není prosté, najděte kolizi (tj. dva různé vektory takové, že $f(x_1) = f(x_2)$). *Řešení:* Stačí najít netriviální vektor x z kernelu (jádra matice f), pak víme, že $f(0) = f(x) = 0$.
- Je na? *Řešení:* Zobrazení $f\colon U \to V$ je na právě když je dimenze sloupcového prostoru matice f rovna dimenzi V.