Domácí úkoly z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (6) Maticové prostory

Dcv. 1. [3 body] Mějme lineární zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}^2$ (z trojic reálných čísel do reálných polynomů stupně nejvýš dva) a $g\colon \mathcal{P}^2 \to \mathbb{R}^3$ zadaná následovně:

$$f((1,0,0)^T) = 2x^2 + x + 2$$
$$f((0,1,0)^T) = -2x + 1$$
$$f((0,0,1)^T) = 3x^2 + 3$$

$$g(2x^2 + x) = (2,-1,8)^T$$
$$g(x^2 + x) = (3,2,5)^T$$
$$g(-x^2 - x + 1) = (-1,3,-9)^T$$

Spočítejte matici zobrazení $g \circ f$ (tedy zobrazení že $\forall v \in \mathbb{R}^3\colon (g \circ f)(v) = g(f(v))$) vůči kanonické bázi. Je toto zobrazení prosté? Je toto zobrazení na?

Dcv. 2. [3 body] O lineárním zobrazení $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ víte:

$$f((1,1,1)^T) = (1,2,1)^T$$
$$f((0,1,1)^T) = (1,2,2)^T$$
$$f((0,0,1)^T) = (2,4,3)^T$$

Určete množinu předobrazů vektoru $(1,2,2)^T$ (tedy množinu $\{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = (1,2,2)^T\}$), dejte si pozor vůči které bázi tuto množinu určujete!

Pro oba příklady kanonická báze prostoru $\mathbb{R}^3$ je tvořena vektory $(1,0,0)^T, (0,1,0)^T, (0,0,1)^T$ (v tomto pořadí). Obdobně pro jiné dimenze.