Domácí úkoly z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (4) Vektorové prostory

Dcv. 1. [2 body]

Nad $\mathbb{Z}_5$ spočtěte průnik $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\} \bigcap \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}\right\}$. Kolik obsahuje vektorů?

(Span značí lineární obal.)

Dcv. 2. [2 body]

Nechť V jsou polynomy nad $\mathbb{Z}_5$ stupně nejvýš tři (z přednášky víme, že V je vektorový prostor). Dokažte, že množina $U \subseteq V$, definovaná jako

$$U = \{p(1) = 0 \mid p \in V\}$$

je vektorový podprostor V.

Připomeňme, že každý polynom stupně nejvýš tři $p \in V$ můžeme zapsat jako $p(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3$, kde $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}_5$. Hodnotu v bodě definujeme dosazením za proměnnou x, tedy například pokud $p(x) = 2 + 1x + 0x^2 + 3x^3$, pak $p(2) = 2 + 2 + 0 + 3 \cdot 2^3 = 4 + 4 = 3$ (počítáme nad $\mathbb{Z}_5$). Polynomy sčítáme jako funkce (což odpovídá sčítání po koeficientech nebo také sčítání funkcí – sečtení funkčních hodnot).

Dcv. 3. [4 body]

Pracujme s vektorovým prostorem polynomů stupně nejvýš tři nad $\mathbb{Z}_5$. Stejně jako v minulém případě nechť

$$U = \{p(1) = 0 \mid p \in V\}.$$

Určete průnik U a následujícího lineárního obalu tří polynomů

$$\mathrm{Span}\left\{2 + 3x^2 + 2x^3, 2 + x + 2x^2 + 3x^3, 2 + 2x^2 + 4x^3\right\}.$$