Příklady na procvičení z Lineární algebry 1 (ZS 2020/2021): (9) Báze, dimenze

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{T}$ a mějme vektory $v_1, \dots, v_n \in V$.

Definice 1 (Lineární nezávislost) *Vektory $v_1, \dots, v_n \in V$ se nazývají* lineárně nezávislé*, pokud rovnost $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ nastane pouze pro $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. V opačném případě jsou vektory* lineárně závislé.

Definice 2 (Lineární obal) Lineární obal *vektorů $v_1, \dots, v_n$ je*

$$Span(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \middle| \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{T} \right\}.$$

Span nekonečné množiny... {LK konečně mnoha vektorů} $v_i \in V$

Definice 3 (Báze) *Vektory $v_1, \dots, v_n$ tvoří* bázi *V pokud jsou lineárně nezávislé a*

$$\boxed{Span(v_1, \dots, v_n) = V.}$$

Definice 4 (Dimenze) Dimenze *V je velikost jeho libovolné báze.* používala se Steinitzova věta

---

Cv. 1. Ve vektorovém prostoru $\boxed{\mathbb{Z}_5^3}$ vyjádřete vektor $(3, 2, 4)$ jako lineární kombinaci vektorů $(3, 3, 2)$, $(1, 1, 4)$ a $(0, 2, 1)$. Je toto vyjádření jednoznačné?

$$\alpha_1\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$$

! Bacha jestli dáváte vektory do sloupců / řádků

$$\mathbb{Z}_5 \quad \left(\begin{array}{ccc|c}3&1&0&3\\3&1&2&2\\2&4&1&4\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&4&1&4\\3&1&2&2\\3&1&0&3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&4&1&4\\0&0&3&1\\0&0&1&2\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}2&4&1&4\\0&0&3&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$3\alpha_3 = 1 \quad /\cdot 2$$
$$\alpha_3 = 2$$
$$2\alpha_1 + 4t + 2 = 4$$
$$2\alpha_1 = 2 + t \quad /\cdot 3$$
$$\alpha_1 = 1 + 3t$$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}1+3t\\t\\2\end{pmatrix}} \qquad t \in \mathbb{Z}_5$$

$$(1+3t)\begin{pmatrix}3\\3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}$$

---

nechť $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ je báze $\mathbb{R}^3$

$u \in \mathbb{R}^3$ $\qquad [u]_B = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$ je vektor souřadnic

pokud $u = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{v}_3$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$[u]_B = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \leadsto \vec{u} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

souřadnice u vůči bázi B ✗ vektor u

Cv. 2. Doplňte množinu M na bázi vektorového prostoru V.

(a) $M = \{(1,2,0,0)^T, (2,1,1,3)^T, (0,1,0,1)^T\}$, $V = \mathbb{R}^4$.

(b) $M = \{-x^2, x+x^2, x^3-1\}$, v prostoru V reálných polynomů stupně nejvýše tři.

chci $v \in \mathbb{R}^4$ aby $M \cup \{v\}$ byla lin. nez.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 2 & 1 & 1 & v_2 \\ 0 & 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 3 & 1 & v_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 0 & -3 & 1 & v_2-2v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 3 & 1 & v_4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 0 & -3 & 1 & v_2-2v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 2 & v_4+v_2-2v_1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 & v_2-2v_1+3v_3 \\ 0 & 0 & 2 & v_4+v_2-2v_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 1 & v_2-2v_1+3v_3 \\ 0 & 0 & 0 & v_4+v_2-2v_1-2(v_2-2v_1+3v_3) \end{pmatrix}$$

$\underline{v_4} + v_2 - 2v_1 - 2(v_2 - 2v_1 + 3v_3) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank} = 4$ ✓

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

POSTUP 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{S}(A)$,

$\operatorname{Span}(\text{řádky } A) \neq \operatorname{Span}(\text{sloupců } A)$

POSTUP 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

kde jsou pivoty, to je báze

$\operatorname{rank}(A)$ ... # pivotů = # nenul. řádků po Gaussově elim.

⊙ když po Gaussově elim. je řádek nenulový ⇒ není lineární kombinací ostatních řádků

$M = \{-x^2, x + x^2, x^3 - 1\} \subseteq \underline{\underline{P}}^3$ ... reálné polynomy stupně ≤ 3

$-x^2 = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$

kanon. báze

$K = \{1, x, x^2, x^3\}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \qquad -x^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

ty převodní $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ... $\underline{\underline{1}}$

POSTUP 3 ... do sloupců + kanon. báze

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underbrace{1 & 0 & 0 & 1}_{1v_1 + 1v_4} \end{pmatrix}$$

Cv. 3. Souřadnice vektoru u vůči uspořádané bázi $X = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ jsou $\boxed{[u]_X = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T}$. Určete souřadnice téhož vektoru u vůči bázi $Y = (v_1 + v_4, v_2 + v_3, v_4, v_2)$.

$$u = a_1 \cdot v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$$

$$[u]_Y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \beta_1 (v_1 + v_4) + \beta_2 (v_2 + v_3) + \beta_3 \cdot v_4 + \beta_4 \cdot v_2 = u$$

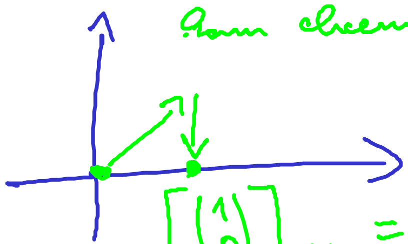
roznásob

$$\underbrace{(\beta_1)}_{= a_1} v_1 + \underbrace{(\beta_2 + \beta_4)}_{= a_2} v_2 + \underbrace{(\beta_2)}_{= a_3} v_3 + \underbrace{(\beta_1 + \beta_3)}_{= a_4} v_4 = u$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 - a_1 \\ a_2 - a_3 \end{pmatrix}$$

souřadnice „instrukce pro žábu kolik kterých skoků, aby doskákala kam chceme"

v_1 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ v_2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{Ž} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

|báze| → největší lin. nez. podmnožina

Cv. 4. Určete dimenze a báze následujících vektorových podprostorů prostoru $\mathbb{Z}_5^7$.

(a) $U = \mathrm{Span}\big((4,1,0,3,4,0,0)^T, (4,3,1,0,2,3,1)^T, (4,1,4,0,3,2,4)^T,$
$(2,4,1,4,4,3,1)^T, (0,4,3,2,2,4,3)^T\big).$

$\mathbb{Z}_5$

(b) $V = \big\{(x_1,\dots,x_7)^T \in \mathbb{Z}_5^7 : x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5+x_6+2x_7=0,$
$3x_1+4x_2+3x_3+x_4+4x_5+2x_6+4x_7=0,\ 2x_1+x_2+4x_3+4x_5+2x_7=0\big\}.$

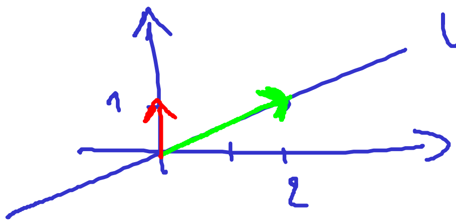
$$\begin{pmatrix} 4&4&4&2&0\\ 1&3&1&4&4\\ 0&1&4&1&3\\ 3&0&0&4&2\\ 4&2&3&4&2\\ 0&3&2&3&4\\ 0&1&4&1&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4&4&4&2&0\\ 0&2&0&1&4\\ 0&1&4&1&3\\ 0&4&4&0&4\\ 0&3&4&2&2\\ 0&3&2&3&4\\ 0&1&4&1&3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4&4&4&2&0\\ 0&2&0&1&4\\ 0&0&4&3&1\\ 0&0&3&1&2\\ 0&0&4&3&1\\ 0&0&2&4&3\\ 0&0&4&3&1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4&4&4&2&0\\ 0&2&0&1&4\\ 0&0&4&3&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

dim Span ... = 3

$$\underbrace{\text{báze}}_{\mathrm{Span}\{(4103400)^T \dots (0432243)^T\}} = (4103400)^T, (4310231)^T, (4140324)^T$$

Ptal jsem se na bázi podprostoru ↑



$U \subseteq \mathbb{R}^2$ báze $U = \begin{pmatrix} 2\\ 1 \end{pmatrix}$

dim $U = 1$

báze je uspořádaná $v_1, v_2, v_3, \dots, v_d$

$\begin{pmatrix} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_d \end{pmatrix}$ ← abych mohl lehce zapisovat souřadnice

Cv. 5. Rozhodněte, zdali prostory U a V z minulého příkladu jsou v inkluzi a pokud ano, nalezněte takovou bázi většího z nich, aby rozšiřovala bázi menšího.

1) jsou v inkluzi $U \subseteq V$?

$V \subseteq U$?

? $\exists v \in V \setminus U$

? $\exists w \in U \setminus V$

jak zjistím

$$\left(\underbrace{\;\cdots\;}_{\text{báze } V} \;\middle|\; \underbrace{\;\cdots\; u_2 \;\cdots\;}_{\text{báze } U} \right) \overset{\text{Gauss}}{\sim} \left(\underbrace{\;\cdots\;}_{\text{pivoty}} \right)$$

$u_2 \notin \mathrm{Span}(V)$

pokud $\exists v, w$ $\Rightarrow$ $U \not\subseteq V \wedge V \not\subseteq U$

pokud $\exists v, \nexists w$ $\Rightarrow$ $U \subsetneq V$

pokud $\nexists v, \nexists w$ $\Rightarrow$ $U = V$

$u_1 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$

$\dim V > \dim U \Rightarrow V \not\subseteq U$

soustavy s více pravými stranami

$Ax = b_1$

$Ay = b_2$

$Az = b_3$

$$\left(A \;\middle|\; b_1 \; b_2 \; b_3 \right)$$