Řešená cvičení z Matematické analýzy I

Jaroslav Hančl, Karel Král, Ondřej Pangrác a `https://kam.mff.cuni.cz/~sbirka/`

3. června 2020

Tento text není určen k šíření. Všechny chyby v tomto textu jsou samozřejmě záměrné. Reportujte je prosím na adresu `kralka@iuuk.mff.cuni`....

Obsah

Kapitola 1

Zadání

1.1 Cvičení

1. Řešte následující rovnice a nerovnice v $\mathbb{R}$:
   (a) $\log(x^2 - 25) = \log(2x + 10)$
   (b) $\log(x^2 + 1) = 2\log(3 - x)$
   (c) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$
   (d) $||x - 2| + 1| \leq 5$
   (e) $\sin(2x) = \sin(x)$
   (f) $\sin(3x - 2) > \frac{1}{3}$

   Řešení: 1

2. Načrtněte grafy následujících funkcí:
   (a) $f(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1|$
   (b) $f(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})| + 1$
   (c) $f(x) = |\log_3 |x + 1|| - 1$

   Řešení: 2

3. Dokažte následující tvrzení:
   (a) (Jedno z mnoha tvrzení, kterým se říká trojúhelníková nerovnost)
   $$\forall a, b \in \mathbb{R} \colon |a + b| \leq |a| + |b|$$
   (b) $\forall a, b \in \mathbb{R} \colon ||a| - |b|| \leq |a - b|$

   Řešení: 3

4. Přečtěte následující a zjistěte, co znamenají:
   (a) Pro dané $x \in \mathbb{Z}$ definujeme $y \in \mathbb{Z} \colon (y \leq x \vee y \leq -x) \wedge (\forall z \in \mathbb{Z} \colon (z \leq x \vee z \leq -x) \Rightarrow z \leq y)$
   Co je y?
   (b) Pro dané $a, b \in \mathbb{N}$ definujme $c \in \mathbb{N}$:
   $$((\exists d \in \mathbb{N} \colon cd = a) \wedge (\exists d \in \mathbb{N} \colon cd = b)) \wedge \forall d \in \mathbb{N} \colon (((\exists e \in \mathbb{N} \colon de = a) \wedge (\exists e \in \mathbb{N} \colon de = b)) \Rightarrow d \leq c)$$

Co je c?

(c) $A = \{1, 2, 3, \dots, |A|\}$ Co je A?

(d) $\forall n \in \mathbb{N} \colon \exists! B \subseteq \mathbb{N} \colon n = \sum_{d \in B} 2^d$ Co je B?

Řešení: 4

5. Následující výroky zapište pomocí kvantifikátorů a pak znegujte (pokud umíte, určete která verze platí).

   (a) Všechna přirozená čísla jsou sudá.

   (b) Každé prvočíslo je liché.

   (c) Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly.

   (d) Mezi n a $2n$ najdeme vždy nějaké prvočíslo.

   Řešení: 5

6. Rozhodněte, zda jsou následující výroky ekvivalentní:

   (a) $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$, $\neg(A \wedge \neg B)$, $\neg A \vee B$ (ekvivalence prvních dvou výroků se využívá při důkazu pomocí obměny implikace)

   (b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$, $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

   Řešení: 6

7. Nechť A, B jsou výroky. Pomocí konjunkce $\wedge$ a negace $\neg$ zapište:

   (a) $A \vee B$

   (b) $A \Rightarrow B$

   (c) $A \Leftrightarrow B$

   Řešení: 7

1.2 Cvičení

1. Nechť A je neprázdná podmnožina reálných čísel ($A \subseteq \mathbb{R}$, navíc $A \neq \emptyset$). Víte, že neexistuje minimum A. Zapište formálně pomocí matematických symbolů výrok „A má minimum“ a pak ho znegujte. Dokažte, že A je nekonečně velká (aspoň spočetně velká).

   Řešení: 1

2. Určete definiční obor následující funkce $\frac{1}{\sqrt{5-\log_2(x^2-9)}}$.

   Řešení: 2

3. Dokažte následující tvrzení:

   (a) Množina všech podmnožin přirozených čísel $\{X \mid X \subseteq \mathbb{N}\}$ je nespočená.

   (b) Množina všech konečných podmnožin přirozených čísel $\{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| \in \mathbb{N}\}$ je spočená.

   Řešení: 3

4. Nechť $p(k, q) = \frac{\lfloor 10^k q \rfloor}{10^k}$, kde $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Najděte infimum a supremum množiny $P = \{p(n, 4/3) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, pokud existují najdetě i minimum a maximum.

   Řešení: 4

5. Pro dané množiny najděte jejich minimum, maximum, supremum, infimum (pokud existují).
   (a) $\{2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$
   (b) $\left\{5^{(-1)^j 3^k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\right\}$
   (c) $\left\{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
   (d) $\left\{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) \mid n \in \mathbb{N} \text{ sudé}\right\}$

   Řešení: 5

6. Formálně dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že $a < b$ existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.

   Řešení: 6

7. Definujme asymptotickou notaci (v angličtině známou jako „big O notation"), česky asymptotický horní odhad:

   Nechť $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, definujeme že $f \in \mathcal{O}(g)$ jestliže

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq cg(n).$$

   Často se píše $f = \mathcal{O}(g)$ namísto $f \in \mathcal{O}(g)$, není to zcela formální, ale je to velice rozšířené v literatuře o algoritmech. Rozhodněte, zda platí:
   (a) $100 \log_2 n \in \mathcal{O}(n)$
   (b) $100n \in \mathcal{O}(n^2)$
   (c) Pokud $f \in \mathcal{O}(g)$, pak $\forall c \in \mathbb{R}^+\colon cf \in \mathcal{O}(g)$.
   (d) Pokud pro každé n platí $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$ a navíc $f_1 \in \mathcal{O}(f_2)$, pak $f \in \mathcal{O}(f_2)$.
   (e) Pokud dokážete, že $\log_2 f \in \mathcal{O}(\log_2 g)$, znamená to, že $f \in \mathcal{O}(g)$?

   Řešení: 7

8. Nechť $A, B \subseteq \mathbb{R}$ a nechť $S_A = \sup A$, $S_B = \sup B$, $I_A = \inf A$, $I_B = \inf B$. Co lze říct o supremech a infimech následujících množin:
   (a) $A \cup B = \{c \mid c \in A \vee c \in B\}$
   (b) $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$
   (c) $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$
   (d) $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$
   (e) $A \cap B = \{c \mid c \in A \wedge c \in B\}$
   (f) $-A = \{-a \mid a \in A\}$
   (g) $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$
   (h) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

   Řešení: 8

9. Dokažte, že následující jsou metriky, jsou definované pro $x, y \in \mathbb{R}^n$:
   - Manhattanská metrika: $d_M(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
   - Eukleidovská metrika: $d_E(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
   - Maximová metrika: $d_m(x, y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$

V každé z nich nakreslete kružnici v $\mathbb{R}^2$.

Dalšími příklady metrik, se kterými jste se mohli setkat jsou: Levenštejnova metrika (vzdálenost dvou stringů – kolik operací nahrazení, vložení nebo vypuštění znaku musíme udělat, abychom z jednoho řetězce dostali druhý), délka nejkratší cesty v grafu.

Řešení: 9

1.3 Cvičení

1. Rozhodněte, zdali jsou následující posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monotónní, pokud ano, určete typ monotonie (rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, konstantní).

   (a) $a_n = 2n + (-1)^n$

   (b) $\frac{1}{1+n^2}$

   (c) $\frac{n+1}{n+2}$

   (d) $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}$

   Řešení: 1

2. Podle definice určete limitu následujících posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

   (a) $a_n = 1/n$

   (b) $a_n = 1/\sqrt{n}$

   (c) $a_n = \log n$

   (d) $a_n = \frac{1}{1+n^2}$

   (e) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

   (f) $a_n = \sin(1/n)$

   Řešení: 2

3. Určete limitu následujících posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo dokažte, že neexistují:

   (a) $a_n = (-1)^n$

   (b) $a_n = \cos((-1)^n)$

   (c) $a_n = (-1)^{n!}$

   (d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

   (e) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$

   (f) $a_n = \frac{2^n}{n^n}$

   Řešení: 3

4. Nechť $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, definujeme že $f \in \mathcal{O}(g)$ jestliže

   $$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq cg(n).$$

   Rozhodněte, zda platí:

   (a) $2^{3n} \in \mathcal{O}(2^n)$

   (b) $\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$

(c) $n^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

(d) $n \log n \in \mathcal{O}(n^{1.1})$

(e) Co je třída funkcí $\mathcal{O}\left(2^{\mathcal{O}(\log n)}\right)$?

Pro úplnost dodejme, že k velkému O existuje ještě malé, malá a velká omega (asymptotický horní odhad) a velká theta (asymptotickou rovnost). My zatím definujeme jen ty velké varianty:

Nechť $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, definujeme že $f \in \Omega(g)$ jestliže

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq cg(n).$$

Řekneme, že f patří do třídy $\Theta(g)$, jestliže $f \in \mathcal{O}(g)$ a zároveň $f \in \Omega(g)$.

Jaký je význam těchto notací? Definice byly převzaty z *Průvodce labirintem algoritmů* Martin Mareš, Tomáš Valla (pdf dostupné na: `http://pruvodce.ucw.cz/static/pruvodce.pdf`).

Řešení: 4

1.4 Cvičení

1. Spočtěte následující limity posloupností:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$,

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$,

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{100}n}{n^2+1}$,

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4(n+2)^{18}}{2n^{18}+7n^{17}+3n^7+6n+11}$,

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $a > 1$, $k \in \mathbb{R}$,

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a \in \mathbb{R}$,

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$,

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,

   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}\right)$,

   (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$,

   (l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

   - $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+50}{\frac{1}{n}}$

   Řešení: 1

2. Spočete v závislosti na $k, l \in \mathbb{N}$

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$,

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l}$.

Řešení: 2

3. Nalezněte chybu:

(a)

$$\begin{align} 2 &= \lim_{n\to\infty} 2 \tag{1.1}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} \tag{1.2}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \tag{1.3}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \tag{1.4}\\ &= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+0}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} \tag{1.5}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+0}{\frac{1}{n}} \tag{1.6}\\ &= \lim_{n\to\infty} 1 \tag{1.7}\\ &= 1 \tag{1.8} \end{align}$$

(b)

$$\begin{align} \frac{1}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n^2} \tag{1.9}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} \tag{1.10}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} \tag{1.11}\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}\right) \tag{1.12}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2} \tag{1.13}\\ &= 0+0+0+\cdots+0 \tag{1.14}\\ &= 0 \tag{1.15} \end{align}$$

(c)

$$\begin{align} e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{1.16}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^n \tag{1.17}\\ &= \lim_{n\to\infty}(1+0)^n \tag{1.18}\\ &= \lim_{n\to\infty} 1 \tag{1.19}\\ &= 1 \tag{1.20} \end{align}$$

Řešení: 3

4. (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^6+7n^3-5}{50n^5-24n^2}$,

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 7^n+n^3 5^n}{-3n\cdot 7^n+\sqrt{n}6^n}$,

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$,

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+1})$,

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin(2n)}{n\cos(3n)+(2n+\sin(4n))^2}$,

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$, $(a,b,c>0)$,

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,

   (h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $(a \geq 0)$,

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

   (j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n+2^n}}$,

   (k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{2n+1}{n+2})^n+(\frac{3n+1}{n+3})^n}$,

   (l) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n+3^n\sin(2^n)}{5^n+4^n\cos(n!)}}$,

   (m) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{2}+\pi)\cdot n$,

   (n) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$,

   (o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sin^2(n)}-\sqrt{n-\cos^2(n)}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$.

   (p) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$,

   (q) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2})$,

   (r) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^{100}-(4-\frac{3}{n})^{50}}{(8-\frac{1}{n})^{34}-(4+\frac{1}{n})^{51}}$.

   Řešení: 4

5. Spočtěte limity:

   - $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n-3^n}{5^n+3^n}$,
   - $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n+5^n}{2^{n+1}+3^{n+1}+5^{n+1}}$.

   Řešení: 5

6. Spočtěte limity:

   - $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$ (pro $n \geq 2$),
   - $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$,
   - $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$.

   Řešení: 6

7. Určete hromadné body posloupnosti definované následovně: $a_1 = 1$, pro $n \geq 2$ je $a_n = \min\{d \in \mathbb{N} : d \geq 2 \wedge d \backslash n\}$ (poslední znak znamená, že d dělí n).

   Řešení: 7

8. Ukažte, že součet harmonické řady je neomezený, tj. posloupnost součtů $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ má limitu $+\infty$.

   Řešení: 8

1.5 Cvičení

1. Spočtěte limity:
   - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ (spíš těžší teoretický bonus, můžete využívat dále),
   - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$,
   - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n}$,
   - $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ pro a, b, c nezáporná reálná.

   Řešení: 1

2. Spočtěte součet geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ (v závislosti na parametru q).

   Řešení: 2

3. Ukažte, že harmonická řada diverguje, tj. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

   Řešení: 3

4. Mějme kladné reálné číslo c. Spočtěte limitu posloupnosti zadané $a_1 = \sqrt{c}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$.

   Řešení: 4

5. Najděte množinu hromadných bodů daných posloupností a určete jejich lim inf a lim sup
   (a) $a_n = (-1)^n \left(2 - \frac{3}{n}\right)$
   (b) $a_n = \cos \frac{2\pi n}{3}$
   (c) $a_n = n^{\sin \frac{\pi n}{2}}$
   (d) $a_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$

   Řešení: 5

6. (a) Najděte všechny hromadné body posloupnosti (a_n) zadané rekurencí
   $$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1/a_n)$$
   a první hodnotou $a_1 = 3/2$.

   (b) Jaká je množina hromadných bodů posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = 1$ a další členy jsou dány vztahem $a_n = \min\{k \in \mathbb{N} : k > 1, k \text{ dělí } n\}$.

   Řešení: 6

7. Rozhodněte, jestli dané řady konvergují nebo divergují

   (a)
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3-5}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{1000}}$$

Řešení: 7

1.6 Cvičení

1. Spočítejte $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x^2)$, kde sgn je funkce signum, tedy

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{pro } x < 0 \\ 0 & \text{pro } x = 0 \\ 1 & \text{pro } x > 0 \end{cases}$$

   Řešení: 1

2. Exponenciálu jste definovali následovně:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

   Speciálně jste měli tvrzení bez důkazu, že tato řada konverguje pro každé reálné číslo $x \in \mathbb{R}$.

   Přesvědčete se o tom, že $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ (speciálně budete muset věřit, že operace s nekonečnou řadou jsou ok).

   Řešení: 2

3. Definujeme

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

   a opět věříme tvrzení bez důkazu, že tato řada konverguje pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ (a dokonce absolutní hodnota výsledku je nejvýš jedna).

   Přesvědčete se, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

   Řešení: 3

4. Dokažte, že neexistuje $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Řešení: 4

5. S využitím předchozích řešení spočtěte:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$,

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$.

Řešení: 5

6. Spočtěte limity

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^5+7x+1}{3x^5-4x^3-x^2}$,
- $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2-x-2)^2}{x^3-12x+16}$,
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$.

Řešení: 6

1.7 Cvičení

1. Spočítejte následující limity:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(1/x)$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin(1/x^3)$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[\ln(x)]{e}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(|x|)$

(e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\sin(x)}$

Řešení: 1

2. Určete $\sin^{-1}(0.1)$ s přesností ± 0.0001.

Řešení: 2

3. Nechť $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, ukažte, že následující funkce jsou spojité:

(a) $(f+g)(x) = f(x) + f(x)$

(b) $(f\cdot g)(x) = f(x)g(x)$

Nechť $g\colon D_g \to \mathbb{R}$, $f\colon D_f \to R_f \subseteq D_g$, pak jejich složení je spojitá funkce:

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

S pomocí předchozího dokažte, že následující funkce jsou spojité:

(a) $\sin(x)\sqrt{x} - 28\ln(x)$

(b) $e^{\sin(\ln(x))}$

Řešení: 3

4. Připomeňte si poučky o derivacích (Věta 13). Spočítejte derivace následujících funkcí:

(a) $3x^2 - 25x + 50$

(b) $\sin(x^5)$

(c) $\sin(x)\cos(x)$

(d) $(\sin(x))^3$

(e) $\sin(\cos(x))$

Řešení: 4

1.8 Cvičení

1. Připomeňte si poučky o derivacích (Věta 13). Spočítejte derivace následujících funkcí:

   (a) $\sqrt{\sin(x)}$

   (b) $\cos^2(x) + \sin^2(x)$

   (c) Dle věty o derivaci inverzní funkce ověřte výsledek derivace $\ln(x)$.

   (d) $\frac{x^2+1}{3x}$

   (e) x^x

   Řešení: 1

2. Pokud mocninná řada konverguje pro každý bod nějakého otevřeného intervalu I. Pak pro každé $x \in I$ můžeme její derivaci spočítat jako derivaci polynomu:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

   Spočítejte takto derivace následujících funkcí:

   (a) e^x

   (b) $\sin(x)$

   (c) $\cos(x)$

   Řešení: 2

3. Představte si, že chcete aproximovat funkci v bodě $a \in \mathbb{R}$ polynomem. Chcete, aby derivace byly ty samé.

   (a) Konstantou, tedy $T(a) = f(a)$.

   (b) Lineárním polynomem (první derivace je stejná, tedy $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$).

   (c) Kvadratickým polynomem (první i druhá derivace je stejná, tedy $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$ a také $T''(a) = f''(a)$).

   (d) Kubickým polynomem (první i druhá i třetí derivace je stejná, tedy $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$ a také $T''(a) = f''(a)$ a také $T'''(a) = f'''(a)$).

   (e) Řadou, tak aby všechny derivace byly stejné:

   (f) Jak nahradíte následující funkce řadou v $a = 0$?

      i. e^x

      ii. $\sin(x)$

   Poznamenejme, že jsme právě vymysleli Taylorův polynom, respektive Taylorovu řadu (tahák Sekce 2.8).

Zkusme pomocí Taylorova polynomu v nule stupně tři aproximovat sin(0.1).

$$T(0.1) = 0.1 - \frac{0.1^3}{6} = 0.09983333333333$$

$$\sin(0.1) = 0.0998334$$

Řešení: 3

1.9 Cvičení

1. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity
   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$
   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$

   Řešení: 1
2. Vyšetřete průběh následujících funkcí:
   (a) $f(x) = x^3 - 12x + 16$
      - *Definiční obor, průsečíky s osami:*
      - *Limity v krajních bodech:*
      - *Derivace, monotonie, extrémy:*
      - *Druhá derivace, konvexita:*
      - *Asymptoty:*

   (b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$
      - *Definiční obor*
      - *Průsečíky s osami, limity v krajních bodech*
      - *Derivace, monotonnost, extrémy*

   Řešení: 2

1.10 cvičení

1. Spočítejte:
   (a) Taylorovu řadu v nule ($a = 0$) polynomu $p(x) = 7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$.
   (b) Taylorovu řadu v jedničce ($a = 1$) funkce $7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$.
   (c) Taylorovu řadu v nule ($a = 0$) funkce $\ln(1 + x)$
   (d) Pomocí Taylorova polynomu v nule odhadněte sin(0.1) s přesností 10^{-6} (dostanete hodnotu, která je zaručeně v intervalu plus minus 10^{-6} od té skutečné).
   (e) Jak byste odhadovali přesnost Taylorova polynomu v nule pro aproximaci $\ln(1 + x)$?
   (f) Spočítejte Taylorovu řadu pro $\sqrt{1 + x}$.

   Řešení: 1

2. Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity
   (a) Pro $m, n \in \mathbb{N}$ spočítejte $\lim_{x \to 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$.

   Řešení: 2

3. Vyšetřete průběh následujících funkcí:
   (a) $f(x) = \ln(|x| - x^2)$
   (b) $\sin(\sin(x))$
   (c) Spoustu dalších příkladů a jejich řešení na průběh funkce najdete na stránkách Jardy Hančla:

   `https://kam.mff.cuni.cz/~jaroslav/vyuka%2019-20/Cviceni%20MA1.html`

   Řešení: 3

4. Dokažte následující užitečné odhady:
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon e^x \geq 1 + x$
   (b) $\forall x \in (-1, \infty)\colon \ln(x+1) \leq x$
   (c) $\forall x \in (-1, \infty)\colon 1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$ nebo ekvivalentně $\forall x \in (-1, \infty)\colon \ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$
   (d) $\forall x \geq 0\colon \sin(x) \leq x$

   Řešení: 4

1.11 cvičení

1. Víte, že plechovka má tvar válce a má mít objem jeden litr. Chcete použít co nejméně plechu. Jaký nejmenší povrch může taková plechovka mít?

   Řešení: 1

2. Máte žebřík dlouhý 10 metrů, který se opírá o zeď. Vršek žebříku je 6 metrů vysoko a vršek padá rychlostí 2 metry za sekundu. Jak rychle se v tomto okamžiku pohybuje spodek žebříku?

   Řešení: 2

3. Nechť funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřeném intervalu I a má prvních n derivací spojitých. Navíc předpokládejme, že pro nějaké $a \in I$ platí:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

   a navíc

$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

   Dokažte, že f má v a lokální extrém právě tehdy když n je sudé. Navíc
   - Pokud n je sudé a $f^{(n)}(a) > 0$, pak a je lokální minimum f.
   - Pokud n je sudé a $f^{(n)}(a) < 0$, pak a je lokální maximum f.

   Řešení: 3

4. Najdete k následujícím funkcím jejich primitivní funkce (pro danou $f(x)$ najděte $F(x)$ takovou, že $F'(x) = f(x)$).
   (a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

(b) $f(x) = e^x - e^{-x}$

(c) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

(d) $f(x) = xe^{-x^2}$

(e) $f(x) = x\sin(x)$

(f) $f(x) = xe^x$

(g) $f(x) = \ln(x)$

Řešení: 4

1.12 cvičení

1. Najděte primitivní funkci:

   (a) $\int \frac{1}{x+\alpha}\ dx$

   (b) $\int \frac{1}{(x+\alpha)^2}\ dx$

   (c) $\int \frac{1}{x^2+1}\ dx$

   Řešení: 1

2. Najděte primitivní funkci:

   (a) $\int \frac{1}{1-x^2}\ dx$

   (b) $\int \frac{x-2}{(x-1)^2}\ dx$

   (c) $\int \frac{3}{x^2+2x+4}\ dx$

   Řešení: 2

3. Najděte primitivní funkci:

   (a) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\ dx$

   (b) $\int \arctan x\ dx$

   (c) $\int \cos^2(x)\ dx$

   (d) $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$

   (e) $\int \tan^2 x\ dx$

   Řešení: 3

4. Integrujte $\int \frac{1}{\sin x}\ dx$.

   Řešení: 4

1.13 cvičení

1. Spočítejte

   (a) primitivní funkci $\int \sin(x)\ dx$,

   (b) určitý integrál $\int_0^\pi \sin(x)\ dx$,

   (c) určitý integrál $\int_0^{2\pi} \sin x\ dx$.

Řešení: 1

2. Spočtěte určitý integrál
   (a) $\int_0^1 (x^2 + x + 3)\ dx$,
   (b) $\int_0^\pi x \sin x\ dx$,
   (c) $\int_1^2 x e^{x^2}\ dx$,
   (d) $\int_0^{\pi/4} \tan x\ dx$.

   Řešení: 2

3. Spočtěte určitý integrál
   (a) $\int_{-1}^1 |x|\ dx$,
   (b) $\int_{1/e}^e |\ln x|\ dx$,

   Řešení: 3

4. Spočítejte následující plochy:
   (a) Spočtěte plochu ohraničenou parabolou a přímkou ve výšce h nad vrcholem paraboly.
   (b) Spočtěte plochu kruhu o poloměru r.
   (c) Spočtěte plochu mezi křivkami funkcí $f(x) = x^2 - 2x + 1$ a $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ (s průsečíky 0 a 1).
   (d) Vezměme funkci $\sin x$ na intervalu $(0, \pi)$ a její "převrácený obraz ukotvený v bodě $(0, 1)$" (funkce $1 - \sin x$). Spočtěte plochu útvaru který leží mezi těmito křivkami (taková čočka).

   Řešení: 4

5. Na vektorovém prostoru funkcí, které jsou spojité na $[-\pi, \pi]$, můžeme definovat skalární součin:
   $$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x)\ dx$$

   My nebudeme dokazovat, že toto je skalární součin (ani nic o Fourierových řadách, které vznikly kvůli řešení rovnic tepla a dnes jsou používány nejen při zpracování zvuku a obrazu, ale i pro analýzu časových řad, ani o cool aplikacích jako pohybový mikroskop: `https://www.youtube.com/watch?v=fHfhorJnAEI`). My toto použijeme jako zajímavý typ integrálů na procvičování.

   Spočítejte:
   (a) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx) \cos(mx)\ dx$ pro $m \in \mathbb{N}$
   (b) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx) \sin(mx)\ dx$ pro $m \in \mathbb{N}$
   (c) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx)\ dx$ pro $m \neq n \in \mathbb{N}$
   (d) $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx)\ dx$ pro $m, n \in \mathbb{N}$
   (e) Pro funkci $s(x) = x/\pi$ na $[-\pi, \pi]$ která je navíc periodická s periodou 2π (tzn. $\forall x \in \mathbb{R}\colon s(x) = s(x + 2\pi)$) spočítejte:
      i. $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} s(x) \cos(nx)\ dx$ pro $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$
      ii. $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{\pi} s(x) \sin(nx)\ dx$ pro $n \in \mathbb{N}$

iii. Co se stane, když sečteme prvních několik členů následující řady:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Řešení: 5

1.14 cvičení

1. Určete hodnoty gama funkce pro přirozená čísla, tj.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

pro $z \in \mathbb{N}$.

Řešení: 1

2. Spočítejte objem a povrch koule.

Řešení: 2

3. Spočítejte délku křivky funkce $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(x)}{4}$ na intervalu $[2, 4]$.

Řešení: 3

4. Spočítejte objem nekonečného „trychtýře“ vzniklého rotací $f(x) = 1/x$ na intervalu $x \in [1, \infty]$ okolo osy x.

Řešení: 4

5. Vyšetřete konvergenci nebo divergenci řad (pokud konvergují, tak co možno nejpřesněji odhadněte):

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Řešení: 5

Kapitola 2

Tahák

2.1 Základní vlastnosti funkcí

2.2 Logika

Negace výroků:

1. $\neg(\neg A) \equiv A$
2. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$
3. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$
4. $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge (\neg B)$
5. $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \Leftrightarrow (\neg B)$
6. $\neg\left(\forall x \colon \varphi(x)\right) \equiv \exists x \colon \neg\varphi(x)$
7. $\neg\left(\exists x \colon \varphi(x)\right) \equiv \forall x \colon \neg\varphi(x)$

Pozor na “existuje právě jedno”: $\neg\left(\exists! x \colon \varphi(x)\right) \equiv (\forall x \colon \neg\varphi(x)) \vee (\exists x \exists y \colon x \neq y \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y))$

2.3 Limity

Definice. *Nechť $(a_a) \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. Číslo a je limitou posloupnosti (a_n), psáno* $\lim a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a$*, když*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 \colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

Věta 1 (Bolzano-Weierstrass (BW))**.** *Každá posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má podposloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, která je monotónní.*
Věta 2 ((EDL))**.** $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$ *speciálně* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.
Věta 3 (Věta o limitě podposloupnosti (VOVP))**.** *Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *a (b_n) je posloupnost vybraná z (a_n). Pak* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.
Věta 4 (Věta o aritmetice limit (VOAL))**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ a posloupnosti $(a_n), (b_n)$ splňují* $\lim a_n = a$ *a* $\lim b_n = b$. *Potom*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = ab$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b} \ \textit{pro } b \neq 0$$

pokud má pravá strana těchto rovností smysl.

- *Smysl dává:*

$$t + \infty = \infty + t = \infty$$
$$t - \infty = -\infty + t = -\infty$$
$$t / \pm \infty = 0$$
$$\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty$$
$$-\infty - \infty = -\infty$$
$$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

  kde $t \in \mathbb{R}$.

  Pro $t \in (0, \infty]$ *máme*

$$t \cdot \infty = \infty \cdot t = \infty$$
$$t \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot t = -\infty$$

  Pro $t \in [-\infty, 0)$ *máme*

$$t \cdot \infty = \infty \cdot t = -\infty$$
$$t \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot t = \infty$$

- *Smysl nedává (a tedy nemůžeme použít tuto větu přímo, ale musíme dál přemýšlet – laicky řečeno tady záleží jak jsou ta nekonečna velká, případně jak malé jsou ty nuly):*

$$\pm\infty / \pm \infty$$
$$\mathit{cokoliv}/0$$
$$\infty - \infty$$
$$-\infty - (-\infty)$$
$$0 \cdot (\pm\infty)$$

Věta 5 (Věta o dvou policajtech)**.** *Nechť posloupnosti* $(a_n), (b_n), (c_n) \subset \mathbb{R}$ *splňují, že*

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = a \in \mathbb{R}$$

a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že pro každé* $n > n_0$ *platí* $a_n \leq c_n \leq b_n$*. Pak* (c_n) *konverguje a navíc* $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = a$*.*

Věta 6 (Násobení limitní nulou (VOSON))**.** *Nechť posloupnost* (a_n) *je omezená a posloupnost* (b_n) *konverguje k nule, pak* $\lim_{n \to \infty} a_n \cdot b_n = 0$*.*

Věta 7. *Nechť* $(a_n) \subset (0, \infty)$ *je posloupnost kladných reálných čísel a nechť* $N \in \mathbb{N}$ *je takové, že* $\exists q \in [0, 1)$ *že pro každé přirozené* $n \geq N$ *platí:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1.$$

Pak:

1. *Pro každé přirozené* $n \geq N$ *platí* $a_n \leq a_N q^{n-N}$ *(matematickou indukcí)*
2. *v důsledku čehož:* $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$*.*

Pozor na to, že existuje posloupnost ***kladných*** *reálných čísel* (b_n) *taková, že:*

- $b_n > 0$ *pro všechna přirozená* n
- $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$

- $\lim_{n\to\infty} b_n > 0$

Věta 8. *Pro libovolné $a \in (0,1)$ platí, že $\lim_{n\to\infty} n^a = \infty$.*

Pozor, že například $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \left(n^{1/n}\right) = 1$. Takže tato věta nelze přímo použít na nekonstatní odmocniny.

2.4 Hromadné body

Definice (Hromadný bod)**.** *Reálné číslo α nazveme hromadným bodem posloupnosti (a_n), pokud existuje posloupnost (b_n) vybraná z (a_n), která má limitu α. Množinu všech hromadných bodů posloupnosti (a_n) značíme $H(a_n)$. Dále definujme nejmenší a největší limitu posloupnosti*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min(H) \qquad a \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n = \max(H).$$

Věta 9 (Základní vlastnosti množiny hromadných bodů)**.** *Množina $H(a_n)$ je neprázdná a je jednobodová právě, tehdy když (a_n) má limitu. Hodnoty* $\liminf$ *a* $\limsup$ *vždy existují a pokud je posloupnost omezená, tak jsou to vlastní hodnoty. (Podívejte se na ekvivalenty těchto vlastností do poznámek z přednášky.)*

2.5 Řady

Definice (Definice konvergence řad)**.** *Říkáme, že řada $\sum a_n$ konverguje, pokud konverguje posloupnost částečných součtů (s_n) zadaná vztahem $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.*

2.5.1 Základní řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1, \\ +\infty & \text{pro } q \geq 1, \\ \text{neexistuje} & \text{pro } q \leq -1, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} = \begin{cases} \text{konverguje} & \text{pro } \alpha > 1, \\ \text{diverguje} & \text{pro } \alpha \leq 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.5.2 Další kritéria na konvergenci řad:

Věta 10 (Další kritéria konvergence řad)**.** *Nechť $\sum a_n$, $\sum b_n$ jsou řady s nezápornými koeficienty.*

(NPK) Nutná podmínka konvergence: *Pokud řada $\sum a_n$ konverguje, pak $\lim a_n = 0$.*

(SK) Pokud $a_n < b_n$ a $\sum b_n$ konverguje, pak i $\sum a_n$ konverguje.
Pokud $a_n < b_n$ a $\sum a_n$ diverguje, pak i $\sum b_n$ diverguje.

(LSK) Definujme $\lim \frac{a_n}{b_n} = \ell$. Pak pro $0 < \ell < \infty$ platí, že $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ konverguje.

2.6 Limity funkcí

Definice (Okolí)**.** Okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ *(přesněji δ-okolí bodu a, kde $\delta > 0$) je interval $U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta)$, neboli*

$$U(a,\delta) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \delta\}.$$

Okolí nekonečna *definujeme jako $U(+\infty,\delta) = (1/\delta, +\infty)$, $U(-\infty,\delta) = (-\infty, 1/\delta)$.*

Pravé okolí $U^+(a,\delta) = [a, a+\delta)$, levé okolí *je symetricky* $U^-(a,\delta) = (a-\delta, a]$.

Prstencové okolí *je okolí bez toho bodu, tedy* $P(a,\delta) = U(a,\delta) \setminus \{a\}$.
Definice (Limita funkce)**.** *Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu $A \in \mathbb{R}$ pokud*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \colon x \in P(a,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(A,\varepsilon)\ .$$

Zapisujeme $\lim_{x\to a} f(x) = A$.
Věta 11 (Aritmetika limit funkcí)**.** *Nechť $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, nechť f, g jsou funkce definované na nějakém prstencovém okolí $P(a,\Delta)$ bodu a, nechť platí $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Potom:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$*, je-li tento součet definovaný*
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = A \cdot B$*, je-li tento součin definovaný*
3. *Nechť je navíc g na nějakém prstencovém okolí bodu a nenulová, pak $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$, je-li tento podíl definovaný*

Věta 12 (Limita složené funkce)**.** *Nechť $A, B, C \in \mathbb{R}^*$, nechť $g(x)$ je funkce splňující*

$$\lim_{x\to A} g(x) = B,$$

a $f(x)$ je funkce splňující

$$\lim_{x\to B} f(x) = C.$$

Navíc nechť je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

P1 *Funkce $f(x)$ je spojitá v B (tedy $f(B) = \lim\limits_{x\to B} f(x) = C$).*

P2 *Na nějakém prstencovém okolí $P(A,\eta)$ funkce $g(x)$ nenabývá hodnotu B, tj. $B \notin g(P(A,\eta))$.*

Pak

$$\lim_{x\to A} f(g(x)) = C.$$

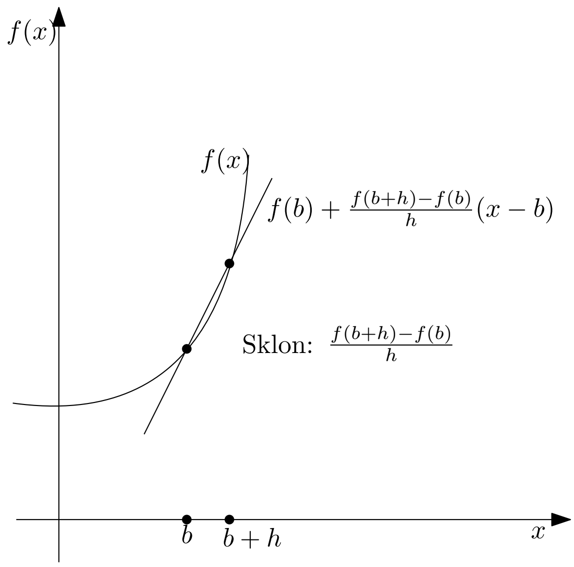
2.7 Derivace

Definice. *Nechť $f \colon M \to \mathbb{R}$, $b \in M$, $U(b,\delta) \subseteq M$ pro nějaké $\delta > 0$. Derivace funkce f v bodě b je limita:*

$$f'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$$

Věta 13. *O derivacích víte následující:*

1. $c' = 0$ *(derivace konstanty je nula)*
2. $(x^k)' = kx^{k-1}$ *pro libovolné $k \in \mathbb{R}$ kdykoliv je toto definováno (bacha na dělení nulou při derivaci $(x^{1/2})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$)*
3. $\sin'(x) = \cos(x)$
4. $\cos'(x) = -\sin(x)$
5. $\ln'(x) = 1/x$ *pro $x > 0$*
6. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ *kdekoliv $g(x) \neq 0$*
7. $(e^x)' = e^x$



Obrázek 2.1: Definice derivace v obrázku pro pevné h

8. *Derivace je lineární operátor, tedy $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$ pokud je pravá strana definována*
9. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ *pokud je pravá strana definována a f nebo g je spojitá*
10. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ *pokud je pravá strana definována, g, f mají derivaci a g je spojitá*

2.8 Taylor

Definice (Taylorův polynom)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, f je funkce definovaná na nějakém okolí a, která má v a vlastní n-tou derivaci $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Taylorův polynom řádu n v bodě a je následující polynom:*

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Definice (Taylorova řada)**.** *Nechť funkce f definovaná na nějakém okolí $a \in \mathbb{R}$ má vlastní derivaci všech řádů v a. Pak Taylorovou řadou v $x \in \mathbb{R}$ rozumíme následující řadu:*

$$T^{f,a}(x) = f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

2.9 l'Hospital

Věta 14 (l'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť $a \in \mathbb{R}^*$, nechť pro nějaké $\delta > 0$ mají dvě funkce $f, g \colon P(a,\delta) \to \mathbb{R}$ vlastní derivaci, nechť navíc $g'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in P(a,\delta)$.*

1. „Případ $\frac{0}{0}$“ *Jestliže*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

a navíc

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$$

(limita podílu derivací existuje) pak platí:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2. „Případ $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$“ *Nebo pokud*

$$\lim_{x\to a}|g(x)| = \infty$$

a navíc

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A \in \mathbb{R}^*$$

(limita podílu derivací existuje) pak platí:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Totéž platí pro jednostranné limity $x \to a^+$, $x \to a^-$.

2.10 Integrály

Věta 15. *Nechť F je primitivní funkce k f a nechť G je primitivní funkce k funkci g na nějakém intervalu I. Nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou dvě čísla. Pak:*

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx = \alpha F(x) + \beta G(x)$$

Věta 16 (O substituci)**.** *Mějme funkce*

$$\varphi\colon (\alpha,\beta) \to (a,b)$$

$$f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$$

přičemž φ má na (α,β) vlastní derivaci.

Nechť $F\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ je primitivní funkcí k f na intervalu (a,b). Pak na intervalu (α,β) platí, že

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = F(\varphi(t)) + c$$

Věta 17 (Integrace per partes)**.** *Nechť jsou funkce f, g spojité na intervalu (a,b) a funkce F, G jsou k nim na (a,b) primitivní. Potom i funkce Fg, fG mají na intervalu (a,b) primitivní funkci a tamtéž platí identita:*

$$\int f(x)G(x)\ dx + \int F(x)g(x)\ dx = F(x)G(x) + c$$

2.10.1 Délka křivky, objem a povrch rotačních těles

Věta 18 (Délka křivky)**.** *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ má na $[a,b]$ spojitou první derivaci. Pak graf funkce f na intervalu $[a,b]$ má délku:*

$$\textit{délka}\left(\left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b\right\}\right) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

Věta 19 (Objem rotačního tělesa)**.** *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovatelná a nezáporná na $[a,b]$. Pak objem rotačního tělesa vzniklého rotací rovinného útvaru mezi f a osou x okolo osy x*

$$V = \left\{(x,y,z) \mid a \le x \le b \wedge \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\right\}$$

je

$$\mathit{objem}(V) = \pi \int_a^b f^2(t)\ dt.$$

Věta 20 (Povrch rotačního tělesa)**.** *Nechť $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ je Riemannovsky integrovatelná a nezáporná na $[a,b]$. Pak povrch pláště rotačního tělesa vzniklého rotací rovinného útvaru mezi f a osou x okolo osy x*

$$V = \left\{(x,y,z) \mid a \le x \le b \wedge \sqrt{y^2+z^2} \le f(x)\right\}$$

je

$$\mathit{povrch\ pláště}(V) = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1+(f'(t))^2}\ dt$$

2.10.2 Odhady a řady

Věta 21 (Odhad součtu pomocí integrálu)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, nechť funkce f je neklesající na intervalu $[1,n]$. Pak platí:*

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \le \int_1^n f(x)\ dx \le \sum_{k=2}^{n} f(k)$$

Věta 22 (Integrální kritérium konvergence)**.** *Nechť $f\colon [1,\infty) \to [0,+\infty)$ je nerostoučí nezáporná funkce. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy když*

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b f(x)\ dx < +\infty$$

Kapitola 3

Řešení

3.1 Cvičení

1. **Řešte následující rovnice a nerovnice v $\mathbb{R}$:**

(a) $\log(x^2 - 25) = \log(2x + 10)$

Řešení: Víme, že funkce logaritmus je definovaná jen pro kladná reálná čísla. Dostáváme tedy pro každou stranu rovnice jednu podmínku:

- Pro levou stranu rovnice:

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &> 0 \\ x^2 &> 25 \\ x &\in (-\infty, -5) \cup (5, \infty) \end{aligned}$$

- Pro pravou stranu rovnice:

$$\begin{aligned} 2x + 10 &> 0 \\ x &> 5 \\ x &\in (5, \infty) \end{aligned}$$

Obě strany rovnice jsou tedy definované jen pro interval $(5, \infty)$, tedy všechna řešení která nalezneme tam musí patřit.

Dále si uvědomíme, že logaritmus je prostá funkce a tedy můžeme psát:

$$\begin{aligned} \log(x^2 - 25) &= \log(2x + 10) \\ x^2 - 25 &= 2x + 10 \\ x^2 - 2x - 35 &= 0 \\ (x + 5)(x - 7) &= 0 \end{aligned}$$

Tato kvadratická rovnice má dvě řešení: $x_1 = -5, x_2 = 7$, jen $x_2 = 7 \in (5, \infty)$ (tedy nás ani nenapadne dosadit -5 do jednoho z logaritmů a přemýšlet čemu se rovná logaritmus nuly – v nule není logaritmus definován).

Tedy naše původní rovnice má jediné řešení $x = 7$.

(b) $\log(x^2 + 1) = 2\log(3 - x)$

Řešení: Napřed zase určíme, kde jsou obě strany definované:

- Levá strana:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &> 0 \\ x &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Pravá strana:

$$\begin{aligned} 3 - x &> 0 \\ x &\in (-\infty, 3) \end{aligned}$$

Tedy hledáme řešení v množině $(-\infty, 3)$ (jen tam jsou všechny výrazy definované).

Použijeme vlastnosti logaritmu k postupným úpravám:

$$\begin{aligned}
\log(x^2+1) &= 2\log(3-x) \\
\log(x^2+1) - 2\log(3-x) &= 0 \\
\log(x^2+1) - \log\left((3-x)^2\right) &= 0 && (a\log x = \log(x^a)) \\
\log\left(\frac{x^2+1}{(3-x)^2}\right) &= 0 && \text{(rozdíl logaritmů je logaritmus podílu)} \\
\frac{x^2+1}{(3-x)^2} &= 1 && (\log x = 0 \text{ jen pro } x = 1) \\
x^2 + 1 &= (3-x)^2 \\
& && (x \in (-\infty, 3), \text{ nedělíme ani nenásobíme nulou}) \\
x &= \frac{4}{3} \in (-\infty, 3)
\end{aligned}$$

Jediné řešení tedy je $\frac{4}{3}$.

(c) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$

Řešení: Podíl není definovaný pro $x = 4$.

Jedničku převedeme na levou stranu rovnosti a po převodu na společný jmenovatel dostaneme:

$$\begin{aligned}
\frac{x-2}{2x-8} &\geq 1 \\
\frac{x-2+2x-8}{2x-8} &\geq 0 \\
\frac{x-2-2x+8}{2x-8} &\geq 0 \\
\frac{-x+6}{2x-8} &\geq 0
\end{aligned}$$

Poslední nerovnice jistě platí pokud jsou obě strany kladné **nebo** obě záporné:

- $-x+6 \geq 0$ a zároveň $2x-8 > 0$ tedy $x \in (-\infty, 6] \cap [4, \infty) = (4, 6]$ (pozor na dělení nulou)
- $-x+6 \leq 0$ a zároveň $2x-8 < 0$ tedy $x \in [6, \infty) \cap (-\infty, 4) = \emptyset$

Protože mezi podmínkami bylo nebo, řešení je spojení daných množin $x \in (4, 6] \cup \emptyset = (4, 6]$, což souhlasí s naší původní podmínkou $x \neq 4$.

(d) $||x-2|+1| \leq 5$

Řešení: Zaveďte substituci $y = |x-2|$ a vyřešte $|y+1| \leq 5$, pak odvoďte řešení pro původní rovnici s x.

(e) $\sin(2x) = \sin(x)$

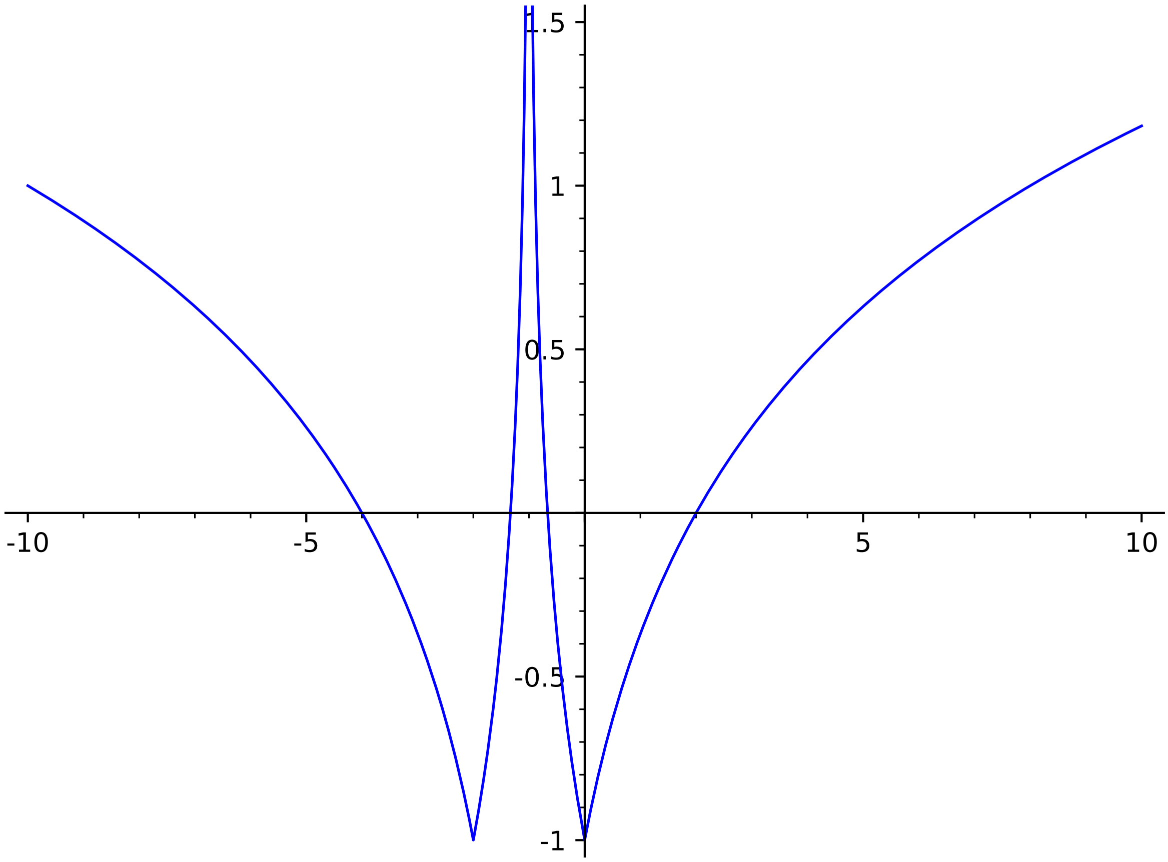
(f) $\sin(3x-2) > \frac{1}{3}$

2. **Načrtněte grafy následujících funkcí:**

   (a) $f(x) = ||||x| - 1| - 1| - 1|$

   (b) $f(x) = |\sin(x + \frac{\pi}{2})| + 1$

   (c) $f(x) = |\log_3 |x + 1|| - 1$ ***Řešení:*** Viz Obrázek 3.1.



Obrázek 3.1: $f(x) = |\log_3 |x + 1|| - 1$

3. **Dokažte následující tvrzení:**
   (a) **(Jedno z mnoha tvrzení, kterým se říká trojúhelníková nerovnost)**

   $$\forall a, b \in \mathbb{R}\colon |a+b| \leq |a| + |b|$$

   (b) $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon ||a| - |b|| \leq |a-b|$

4. **Přečtěte následující a zjistěte, co znamenají:**

   (a) **Pro dané** $x \in \mathbb{Z}$ **definujeme** $y \in \mathbb{Z}\colon (y \leq x \vee y \leq -x) \wedge (\forall z \in \mathbb{Z}\colon (z \leq x \vee z \leq -x) \Rightarrow z \leq y)$ **Co je** y**?**

   Řešení: Absolutní hodnota $y = |x|$.

   (b) **Pro dané** $a, b \in \mathbb{N}$ **definujme** $c \in \mathbb{N}$**:**

   $$((\exists d \in \mathbb{N}\colon cd = a) \wedge (\exists d \in \mathbb{N}\colon cd = b)) \wedge \forall d \in \mathbb{N}\colon\ (((\exists e \in \mathbb{N}\colon de = a) \wedge (\exists e \in \mathbb{N}\colon de = b)) \Rightarrow d \leq c)$$

   Co je c**?**

   Řešení: Největší společný dělitel. Výrok x je dělitelné y zapíšeme jako: $\exists z\colon xz = z$.

   (c) $A = \{1, 2, 3, \ldots, |A|\}$ **Co je** A**?**

   Řešení: Nesmysl, taková množina není dobře definovaná. Respektive tuto definici splňuje libovolná množina prvních k přirozených čísel.

   (d) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \exists! B \subseteq \mathbb{N}\colon n = \sum_{d \in B} 2^d$ **Co je** B**?**

   Řešení: Množina pozic s jedničkami v binárním zápisu čísla n.

5. **Následující výroky zapište pomocí kvantifikátorů a pak znegujte (pokud umíte, určete která verze platí).**
   (a) **Všechna přirozená čísla jsou sudá.**
   (b) **Každé prvočíslo je liché.**
   (c) **Některé přirozené číslo je dělitelné všemi prvočísly.**
   (d) **Mezi n a $2n$ najdeme vždy nějaké prvočíslo.**

6. **Rozhodněte, zda jsou následující výroky ekvivalentní:**

   (a) $A \Rightarrow B$, $\neg B \Rightarrow \neg A$, $\neg(A \wedge \neg B)$, $\neg A \vee B$ **(ekvivalence prvních dvou výroků se využívá při důkazu pomocí obměny implikace)**

   (b) $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$, $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

7. **Nechť A, B jsou výroky. Pomocí konjunkce $\wedge$ a negace $\neg$ zapište:**
   (a) $A \vee B$
   (b) $A \Rightarrow B$
   (c) $A \Leftrightarrow B$

3.2 Cvičení

1. **Nechť A je neprázdná podmnožina reálných čísel ($A \subseteq \mathbb{R}$, navíc $A \neq \emptyset$). Víte, že neexistuje minimum A. Zapište formálně pomocí matematických symbolů výrok „A má minimum“ a pak ho znegujte. Dokažte, že A je nekonečně velká (aspoň spočetně velká).**

   Řešení: „A má minimum“:
   $$\exists m \in A \; \forall a \in A \colon m \leq a$$

   Negace „A má minimum“:
   $$\forall m \in A \; \exists a \in A \colon m > a$$

   Víme, že A je neprázdná, vezmeme tedy $a_0 \in A$ libovolné.

   - Z předpokladu víme, že a_0 není minimum, existuje tedy $a_1 \in A$ takové, že $a_1 < a_0$.
   - Z předpokladu víme, že a_1 není minimum, existuje tedy $a_2 \in A$ takové, že $a_2 < a_1$.
   - Z předpokladu víme, že a_2 není minimum, existuje tedy $a_3 \in A$ takové, že $a_3 < a_2$.
   - Z předpokladu víme, že a_3 není minimum, existuje tedy $a_4 \in A$ takové, že $a_4 < a_3$.
   - ...

   Navíc podle tranzitivity platí $a_j < a_k$ pro každé dvě $j < k \in \mathbb{N}$. Takto jsme našli spočetně mnoho (pro každé přirozené číslo jedno) různých prvků a_i, které náleží do A. Množina A má tedy nekonečně velkou podmnožinu a je tedy sama aspoň spočetně velká.

   Lze také dokazovat sporem. Nechť je konečná, pak má minimum (plyne z toho, že máme lineární uspořádání). Ale důkaz předchozí věty je stejně většinou stejný jako předchozí důkaz.

2. **Určete definiční obor následující funkce $\frac{1}{\sqrt{5-\log_2(x^2-9)}}$.**

Řešení: Logaritmus je definovaný jen pro kladná reálná čísla, tedy $x^2 - 9 > 0$, z čehož plyne první podmínka $x \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$.

Odmocnina je definovaná pro nezáporná čísla, ale dělíme jejím výsledkem, takže ani nesmí vyjít nula, dohromady tedy máme:

$$\begin{aligned} 5 - \log_2(x^2 - 9) &> 0 \\ 5 &> \log_2(x^2 - 9) && (2^y \text{ je rostoucí funkce}) \\ 2^5 &> x^2 - 9 \\ 41 &> x^2 \end{aligned}$$

Tedy druhá podmínka je: $x \in (-\sqrt{41}, \sqrt{41})$.

Obě podmínky musí platit zároveň a dostáváme výsledek:

$$x \in (-\sqrt{41}, -3) \cup (3, \sqrt{41}).$$

Pozor, že ve všech řešeních netriviálně využíváte toho, že dvojkový logaritmus je rostoucí funkce nebo že dva na něco je rostoucí funkce.

3. **Dokažte následující tvrzení:**

(a) **Množina všech podmnožin přirozených čísel $\{X \mid X \subseteq \mathbb{N}\}$ je nespočená.**

Řešení: Pro spor předpokládejme, že existuje nějaká bijekce $f\colon \mathbb{N} \to \{X \subseteq \mathbb{N}\}$. Tedy například $f(1) = \{1, 42\}$, $f(2) = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$, $f(3) = \{100\}$, $f(4) = \mathbb{N} \setminus \{58\}\ldots$

Definujme množinu $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$. Tato sebereference je základem Cantorovy diagonální metody (často na každém prvku změníme něco). Tuto množinu můžeme definovat dle schéma vydělení Zermelovy-Frankelovy teorie množin `https://cs.wikipedia.org/wiki/Zermelova%E2%80%93Fraenkelova_teorie_mno%C5%BEin#Sch%C3%A9ma_axiom%C5%AF_vyd%C4%9Blen%C3%AD`

Co je předobrazem M? Množina $M \subseteq \mathbb{N}$ a f je bijekce, tedy musí existovat nějaké $k \in \mathbb{N}$ takové, že $f(k) = M$.

Podívejme se, jestli $k \in M$ nebo ne:

- Pokud $k \in M = f(k)$, pak dostáváme spor s definicí M (ta obsahuje jen taková přirozená čísla, že $k \notin f(k)$).
- Pokud $k \notin M = f(k)$, pak dostáváme spor s definicí M (ta obsahuje všechna taková přirozená čísla, že $k \notin f(k)$).

V obou případech jsme dostali spor. Principem vyloučeného třetího (jedno z $k \in M$ nebo $k \notin M$ musí platit) usoudíme, že naše M nemá žádný předobraz.

Pár poznámek:

- Sice jsme nikde nevyužili přímo vlastností f, například toho, co je $f(1)$. Ale tuto funkci jsme potřebovali. Kde?
- Proč takovou množinu M nemůžeme sestrojit i pro bijekci mezi přirozenými čísli a konečně velkými množinami $\{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| \in \mathbb{N}\}$ jako v další části tohoto příkladu? Kde tento důkaz selže?
- Jak souvisí tento důkaz s důkazem z přednášky, kde jste dokazovali, že reálných čísel je víc než přirozených?

(b) **Množina všech konečných podmnožin přirozených čísel $\{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| \in \mathbb{N}\}$ je spočená.**

Řešení: Jednoduché s pomocí Cantor-Bernsteinovy věty (viz `https://cs.wikipedia.org/wiki/Cantorova%E2%80%93Bernsteinova_v%C4%9Bta`).

Z definice můžeme použít následující bijekci: $f\colon \mathbb{N} \to \{X \subseteq \mathbb{N} \mid |X| \in \mathbb{N}\}$ definovanou:

$$f(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid \ d\text{-tá nejvýznamnější číslice binárního zápisu } n-1 \text{ je rovna jedné}\}.$$

Umíte modifikovat tuto funkci, aby každá $X \subseteq \mathbb{N}$ byla obrazem nekonečně mnoha přirozených čísel?

4. **Nechť** $p(k,q) = \frac{\lfloor 10^k q \rfloor}{10^k}$**, kde** $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ **pro libovolné** $x \in \mathbb{R}$**. Najděte infimum a supremum množiny** $P = \{p(n, 4/3) \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$**, pokud existují najdetě i minimum a maximum.**

   Řešení: Naše množina je $P = \{1,3; 1,33; 1,333; ,1,3333; \ldots\}$.

   - Infimum a minimum je $1,3$ (zbylé prvky mají více trojek za desetinnou čárkou a tedy jsou větší).
   - Supremum je $4/3$ a maximum neexistuje (dokažte).
     - $4/3$ je horní závora: Chceme ukázat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{\lfloor 10^n \frac{4}{3} \rfloor}{10^n} \leq \frac{4}{3}$.

       Víme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme $\lfloor x \rfloor \leq x$. Tedy usoudíme, že $\lfloor 10^n \frac{4}{3} \rfloor \leq 10^n \frac{4}{3}$. Vydělením obou stran 10^n dostaneme to, co jsme chtěli.
     - $4/3$ je nejmenší horní závora: Pro spor předpokládejme, že existuje menší horní závora.

       Formalizujeme to následovně: nechť $\varepsilon \in \mathbb{R}$ takové, že $\varepsilon > 0$ (mohli jsme také psát $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ nebo jen nechť je ε kladné). Pro spor předpokládáme, že $\frac{4}{3} - \varepsilon$ je horní závora.

       Tedy by mělo platit následující (a to dovedeme ke sporu):

$$
\begin{aligned}
\frac{\lfloor 10^n \frac{4}{3} \rfloor}{10^n} &\leq \frac{4}{3} - \varepsilon \\
\left\lfloor 10^n \frac{4}{3} \right\rfloor &\leq 10^n \frac{4}{3} - 10^n \varepsilon && \text{(rozmyslíme si, že } \forall x \in \mathbb{R}\colon x - 1 < \lfloor x \rfloor) \\
10^n \frac{4}{3} - 1 &\leq 10^n \frac{4}{3} - 10^n \varepsilon \\
-1 &\leq -10^n \varepsilon \\
1 &\geq 10^n \varepsilon \\
10^{-n} &\geq \varepsilon
\end{aligned}
$$

       Má platit pro každé n, což ale nemůže platit (tedy jsme došli ke sporu) pro dostatečně velké (například $n = \lceil \log_{10}(\varepsilon/2) \rceil$).

5. **Pro dané množiny najděte jejich minimum, maximum, supremum, infimum (pokud existují).**

   (a) $\{2^{-n} + 3^{-m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

   Řešení: Množina: $\left\{\frac{5}{6}, \frac{11}{18}, \frac{7}{12}, \frac{29}{54}, \frac{83}{162}, \frac{245}{486}, \frac{731}{1458}, \frac{2189}{4374}, \frac{6563}{13122}, \dots\right\}$.

   - min neexistuje
   - max $= 5/6$
   - sup $= 5/6$
   - inf $= 0$

   (b) $\left\{5^{(-1)^j 3^k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\right\}$

   Řešení:

   - min neexistuje
   - max neexistuje
   - sup $= \infty$ nebo můžeme říct, že v reálných číslech supremum nemá
   - inf $= 0$

   (c) $\left\{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$

   Řešení: Množina: $\{1, 0.9238, 0.8660, 0.7071, 0, -0.4999, \dots\}$ (zaokrouhlené).

   - min neexistuje
   - max $= 1$
   - sup $= 1$
   - inf $= -1$

   (d) $\left\{\cos((n + \frac{1}{n})\pi) \mid n \in \mathbb{N}\ \textbf{sudé}\right\}$

   Řešení: Množina: $\{0, 0.7071, 0.8660, 0.9238, 0.9510, \dots\}$ (zaokrouhlené).

   - min $= 0$
   - max neexistuje
   - sup $= 1$
   - inf $= 0$

6. **Formálně dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že $a < b$ existuje $q \in \mathbb{Q}$ takové, že $a < q < b$.**

Řešení: Nechť $a < b \in \mathbb{R}$. Chceme zvolit racionální číslo, které bude dostatečně blízko prostředku, tedy reálnému číslu $c = a + \frac{b-a}{2}$.

Jak na to přijdeme (pozor, že teď provádíme výpočet, kterým se dobereme k požadovanému racionálnímu číslu). Důkaz provádíme pouze pokud mezi a, c není celé číslo (jinak už jsme hotoví), tedy $0 < c - a < 1$.

$$\begin{aligned} a < c < b & \qquad \text{(předpoklad, vynásobíme)} \\ 10^k a < 10^k c < 10^k b & \qquad (\text{volme } k = 10 - \log_{10}(c-a)) \\ 10^k a < \lfloor 10^k c \rfloor < 10^k b & \qquad (\text{rozdíl mezi } a, c \text{ je vždy víc než } 10) \\ a < \frac{\lfloor 10^k c \rfloor}{10^k} < b & \qquad \text{(náš výsledek je podíl dvou celých čísel a jmenovatel je nenulový)} \end{aligned}$$

7. **Definujme asymptotickou notaci (v angličtině známou jako „big O notation“), česky asymptotický horní odhad:**

   Nechť $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **jsou dvě funkce, definujeme že** $f \in \mathcal{O}(g)$ **jestliže**

   $$\exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq cg(n).$$

   Často se píše $f = \mathcal{O}(g)$ **namísto** $f \in \mathcal{O}(g)$**, není to zcela formální, ale je to velice rozšířené v literatuře o algoritmech. Rozhodněte, zda platí:**

   (a) $100 \log_2 n \in \mathcal{O}(n)$ ***Řešení:*** Platí.

   (b) $100n \in \mathcal{O}(n^2)$ ***Řešení:*** Platí.

   (c) **Pokud** $f \in \mathcal{O}(g)$**, pak** $\forall c \in \mathbb{R}^+ : cf \in \mathcal{O}(g)$**.** ***Řešení:*** Platí.

   (d) **Pokud pro každé** n **platí** $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$ **a navíc** $f_1 \in \mathcal{O}(f_2)$**, pak** $f \in \mathcal{O}(f_2)$**.** ***Řešení:*** Platí.

   (e) **Pokud dokážete, že** $\log_2 f \in \mathcal{O}(\log_2 g)$**, znamená to, že** $f \in \mathcal{O}(g)$**?** ***Řešení:*** Rozhodně ne! Uvažme například funkce $f(n) = n^2$ a $g(n) = n$.

8. **Nechť** $A, B \subseteq \mathbb{R}$ **a nechť** $S_A = \sup A$**,** $S_B = \sup B$**,** $I_A = \inf A$**,** $I_B = \inf B$**. Co lze říct o supremech a infimech následujících množin:**

   (a) $A \cup B = \{c \mid c \in A \vee c \in B\}$

   (b) $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

   (c) $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$

   (d) $A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$

   (e) $A \cap B = \{c \mid c \in A \wedge c \in B\}$

   (f) $-A = \{-a \mid a \in A\}$

   (g) $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$

   (h) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

9. **Dokažte, že následující jsou metriky, jsou definované pro $x, y \in \mathbb{R}^n$:**
   - **Manhattanská metrika:** $d_M(x,y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
   - **Eukleidovská metrika:** $d_E(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
   - **Maximová metrika:** $d_m(x,y) = \max_{i=1}^n |x_i - y_i|$

   V každé z nich nakreslete kružnici v $\mathbb{R}^2$.

   Dalšími příklady metrik, se kterými jste se mohli setkat jsou: Levenštejnova metrika (vzdálenost dvou stringů – kolik operací nahrazení, vložení nebo vypuštění znaku musíme udělat, abychom z jednoho řetězce dostali druhý), délka nejkratší cesty v grafu.

3.3 Cvičení

1. **Rozhodněte, zdali jsou následující posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monotónní, pokud ano, určete typ monotonie (rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, konstantní).**

   (a) $a_n = 2n + (-1)^n$

   (b) $\frac{1}{1+n^2}$

   (c) $\frac{n+1}{n+2}$

   (d) $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}$

2. **Podle definice určete limitu následujících posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:**

   (a) $a_n = 1/n$

   (b) $a_n = 1/\sqrt{n}$

   (c) $a_n = \log n$

   (d) $a_n = \frac{1}{1+n^2}$

   (e) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

   (f) $a_n = \sin(1/n)$

3. **Určete limitu následujících posloupností** $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ **nebo dokažte, že neexistují:**

   (a) $a_n = (-1)^n$

   (b) $a_n = \cos((-1)^n)$

   (c) $a_n = (-1)^{n!}$

   (d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

   (e) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$

   (f) $a_n = \frac{2^n}{n^n}$

4. **Nechť $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, definujeme že $f \in \mathcal{O}(g)$ jestliže**

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq cg(n).$$

Rozhodněte, zda platí:

(a) $2^{3n} \in \mathcal{O}(2^n)$ ***Řešení:*** Rozhodně neplatí! $\frac{2^{3n}}{2^n} = 2^{2n}$ což nemůžeme shora odhadnout konstantou.

(b) $\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$ ***Řešení:*** Platí.

(c) $n^3 \in \mathcal{O}(2^n)$ ***Řešení:*** Platí.

(d) $n \log n \in \mathcal{O}(n^{1.1})$ ***Řešení:*** Platí.

(e) Co je třída funkcí $\mathcal{O}\left(2^{\mathcal{O}(\log n)}\right)$? ***Řešení:*** $\cup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{O}(n^k)$

Pro úplnost dodejme, že k velkému O existuje ještě malé, malá a velká omega (asymptotický horní odhad) a velká theta (asymptotickou rovnost). My zatím definujeme jen ty velké varianty:

Nechť $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, definujeme že $f \in \Omega(g)$ jestliže

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq cg(n).$$

Řekneme, že f patří do třídy $\Theta(g)$, jestliže $f \in \mathcal{O}(g)$ a zároveň $f \in \Omega(g)$.

Jaký je význam těchto notací? Definice byly převzaty z *Průvodce labirintem algoritmů* Martin Mareš, Tomáš Valla (pdf dostupné na: `http://pruvodce.ucw.cz/static/pruvodce.pdf`).

3.4 Cvičení

1. **Spočtěte následující limity posloupností:**

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ ***Řešení:*** Používáme následující zkratky:

   – Věta o aritmetice limit = VOAL (Věta 4),

   – Věta o součinu omezené posloupnosti a posloupnosti jdoucí do 0 = VOSON (Věta 6),

   – Věta o limitě odmocniny = VOLO (Věta 8),

   – Podílové kriterium o konvergenci k nule = PK (Věta 7).

   Čitatel i jmenovatel vynásobíme $\frac{1}{n^3}$ a použijeme VOAL.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{-1}+n^{-2}-\frac{3}{n^3}}{1-\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(2n^{-1}+n^{-2}-\frac{3}{n^3}\right) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n^3}\right) = 1$$

   Výsledek je 0.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$, ***Řešení:*** Čitatel i jmenovatel vynásobíme $\frac{1}{n^3}$ a použijeme VOAL.

   Výsledek je 2.

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$, ***Řešení:*** Čitatel i jmenovatel vynásobíme $\frac{1}{n^5}$ a použijeme VOAL.

   Výsledek je 2.

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{100}n}{n^2+1}$, ***Řešení:*** Čitatel i jmenovatel vynásobíme $\frac{1}{n^2}$ a použijeme VOAL.

   Výsledek je 0.

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4(n+2)^{18}}{2n^{18}+7n^{17}+3n^7+6n+11}$, ***Řešení:*** Čitatel i jmenovatel vynásobíme $\frac{1}{n^{18}}$ a použijeme VOAL.

   Výsledek je 2.

   (f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}$, $a>1$, $k\in\mathbb{R}$, ***Řešení:*** Přímo použijeme PK a pro ověření limitní podmínky použijeme VOAL.

   Výsledek je 0.

   (g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}$, $a\in\mathbb{R}$, ***Řešení:*** Přímo použijeme PK a pro ověření limitní podmínky použijeme VOAL.

   Výsledek je 0.

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$, ***Řešení:*** Použijeme VOSON, kde posloupnost $\sin(n!)$ je omezená a $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$ jde k nule, což se ukáže vynásobením čitatele i jmenovatele $\frac{1}{n}$ a VOLO pro $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \to 0$.

Výsledek je 0.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$, ***Řešení:*** Vhodně rozšíříme pomocí vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, kde $a = \sqrt{n+1}$ a $b = \sqrt{n}$. Upravíme, čitatel i jmenovatel vynásobíme $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a dopočteme použitím VOAL a VOLO pro $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ a $\sqrt{1+\frac{1}{n}} \to 1$.

Výsledek je 1.

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n}\right)$, ***Řešení:*** Vhodně rozšíříme pomocí vzorce $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, kde $a = \sqrt[3]{n+11}$ a $b = \sqrt[3]{n}$. Upravíme, čitatel i jmenovatel vynásobíme $\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ a dopočteme použitím VOAL a VOLO pro $\frac{1}{\sqrt[3]{(1+\frac{11}{n})^2}} \to 0$ a $\frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{11}{n}}} \to 0$.

Výsledek je 0.

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^5}{n^6+n!}$, ***Řešení:***

Čitatel i jmenovatel rozšíříme $\frac{1}{n!}$ a použijeme PK na $\frac{3^n}{n!}$, $\frac{n^6}{n!}$ a $\frac{n^5}{n!}$ a několikrát VOAL.

Výsledek je 0.

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$. ***Řešení:*** Použijeme součtový vzorec $\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k$ a VOAL.

Výsledek je $\frac{1}{2}$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+50}{\frac{1}{n}}$

Řešení:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}+50}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+50n}{1}$$
$$= \frac{\infty}{1} = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + 50n\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} 50n$$
$$= 0 + \infty$$
$$= \infty$$

Jenom pro příklad:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1}$$
$$= \frac{0}{1} = 0$$

2. **Spočete v závislosti na** $k, l \in \mathbb{N}$

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l}$**,**

Řešení: Pomocí binomické věty rozvedeme $(n-1)^l$ do řady. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^k - \sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}(-1)^m n^{l-m}}{n^k+n^l}.$$

Pokud $k > l$, tak je nejrychleji rostoucí člen n^k, a proto ho z čitatele i jmenovatele vytkneme. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}(-1)^m n^{l-m-k}}{1+n^{l-k}}.$$

Protože $k > l$, tak $\forall m \in \mathbb{N}\cup\{0\} : l-m-k < 0$ a $l-k < 0$ a z VOAL $n^{l-m-k} \to 0$ a $n^{l-k} \to 0$. Celkem tedy z VOAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Pokud $k = l$, tak se nám v čitateli odečte n^k. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\sum_{m=1}^{k}\binom{l}{m}(-1)^m n^{l-m}}{2n^k}.$$

Ze zbylých vidíme, že nám nejrychleji roste n^k, a proto ho z čitatele i jmenovatele vytkneme. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\sum_{m=1}^{k}\binom{l}{m}(-1)^m n^{l-m-k}}{2}.$$

Protože $k = l$, tak $\forall m \in \mathbb{N} : l-m-k < 0$ a z VOAL $n^{l-m-k} \to 0$. Celkem tedy z VOAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{2} = 0.$$

Pokud $k < l$, tak je nejrychleji rostoucí člen n^l, a proto ho z čitatele i jmenovatele vytkneme. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{k-l} - \sum_{m=0}^{l}\binom{l}{m}(-1)^m n^{l-m-l}}{n^{k-l}+1}.$$

Protože $k < l$, tak $\forall m \in \mathbb{N} : l-m-l < 0$, $k-l < 0$ a z VOAL $n^{l-m-l} \to 0$ a $n^{k-l} \to 0$. Navíc pro $m = 0$ je $\binom{l}{m}(-1)^m n^{l-m-l} = 1$. Celkem tedy z VOAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k-(n-1)^l}{n^k+n^l} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l}$**.**

Řešení: Pomocí binomické věty rozvedeme $(n+1)^k$ a $(n-1)^k$ do řady a aplikujeme $(-n)^l = (-1)^l n^l$. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k+(-n)^l}{(n-1)^k-n^l} = \frac{\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}n^{k-m} + (-1)^l n^l}{\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}(-1)^m n^{k-m} - n^l}.$$

Pokud $k > l$, tak je nejrychleji rostoucí člen n^k, a proto ho z čitatele i jmenovatele vytkneme. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} n^{k-m-k} + (-1)^l n^{l-k}}{\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (-1)^m n^{k-m-k} - n^{l-k}}.$$

Protože $k > l$, tak $\forall m \in \mathbb{N} : k - m - k < 0$ a $l - k < 0$ a z VOAL $n^{k-m-k} \to 0$ a $n^{l-k} \to 0$.
Navíc pro $m = 0$ je $\binom{k}{m}(-1)^m n^{k-m-k} = 1 = \binom{k}{m} n^{k-m-k}$. Celkem tedy z VOAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{1+0}{1-0} = 1.$$

Pokud $k = l$ a jsou liché, tak se nám v čitateli i jmenovateli odečte n^k. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{\sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} n^{k-m} +}{\sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} (-1)^m n^{k-m}}.$$

V čitateli i jmenovateli nám v tuto chvíli nejrychleji roste n^{k-1}, a proto ho vytkneme. Dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{\sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} n^{k-m-k+1} +}{\sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} (-1)^m n^{k-m-k+1}}.$$

Protože $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2 : k - m - k + 1 < 0$, tak z VOAL $n^{k-m-k+1} \to 0$.
Navíc pro $m = 1$ je $\binom{k}{m}(-1)^m n^{k-m-k+1} = -k$ a $\binom{k}{m} n^{k-m-k+1} = k$. Celkem tedy z VOAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{k}{-k} = -1.$$

Pokud $k = l$ a jsou sudé, tak se nám ve jmenovateli odečte n^k. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{2n^k + \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} n^{k-m} +}{\sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} (-1)^m n^{k-m}}.$$

Vytknutím n^{k-1} dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{2n + \sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} n^{k-m-k+1} +}{\sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} (-1)^m n^{k-m-k+1}}.$$

Protože $\forall m \in \mathbb{N}, m \geq 2 : k - m - k + 1 < 0$, tak z VOAL $n^{k-m-k+1} \to 0$.
Navíc pro $m = 1$ je $\binom{k}{m}(-1)^m n^{k-m-k+1} = -k$ a $\binom{k}{m} n^{k-m-k+1} = k$. Celkem tedy z VOAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{2 \cdot \infty + k}{-k} = -\infty.$$

Pokud $k < l$, tak je nejrychleji rostoucí člen n^l, a proto ho z čitatele i jmenovatele vytkneme. Dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} n^{k-m-l} + (-1)^l}{\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (-1)^m n^{k-m-l} - 1}.$$

Protože $k < l$, tak $\forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : k - m - l < 0$ a z VOAL $n^{k-m-l} \to 0$. Celkem tedy z VOAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^k + (-n)^l}{(n-1)^k - n^l} = \frac{0 + (-1)^l}{0 - 1} = (-1)^{l+1}.$$

3. **Nalezněte chybu:**

(a)

$$
\begin{aligned}
2 &= \lim_{n\to\infty} 2 && (3.1)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} && (3.2)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} && (3.3)\\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} && (3.4)\\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+0}{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} && (3.5)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+0}{\frac{1}{n}} && (3.6)\\
&= \lim_{n\to\infty} 1 && (3.7)\\
&= 1 && (3.8)
\end{aligned}
$$

Řešení: V rovnostech 3.4, 3.6 je ilegálně použita věta o aritmetice limit. Limita jmenovatele i čitatele je 0.

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{2n^2} && (3.9)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} && (3.10)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2} && (3.11)\\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+3+\cdots+(n-1)}{n^2}\right) && (3.12)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2} && (3.13)\\
&= 0+0+0+\cdots+0 && (3.14)\\
&= 0 && (3.15)
\end{aligned}
$$

Řešení: V rovnosti 3.13 je ilegálně použita věta o aritmetice limit. Nelze použít na součty, jejichž počet je závislý na proměnné přes kterou limitíme.

(c)

$$
\begin{aligned}
e &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n && (3.16)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)^n && (3.17)\\
&= \lim_{n\to\infty}(1+0)^n && (3.18)\\
&= \lim_{n\to\infty} 1 && (3.19)\\
&= 1 && (3.20)
\end{aligned}
$$

Řešení: Částečné limitění v rovnosti 3.17 není povolené.

4.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^6+7n^3-5}{50n^5-24n^2}$,

Řešení: Vytknutím n^5 z čitatele i jmenovatele a použitím VOAL dostáváme výraz $\frac{6\cdot\infty+7\cdot 0^2-5\cdot 0^5}{50-24\cdot 0^3}$, což po vyhodnocení podle pravidel dává ∞.

Výsledek je ∞.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 7^n+n^3 5^n}{-3n\cdot 7^n+\sqrt{n}6^n}$,

Řešení: Zlomek rozšíříme výrazem $\frac{1}{n7^n}$. Poté použitím PK na $n^2(\frac{5}{7})^n$ a $\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{6}{7})^n$, kde se pro ověření podmínek použije VOAL a VOLO a použitím VOAL na celkovou limitu dostáváme výraz $\frac{\infty+0}{-3+0} = -\infty$.

Výsledek je $-\infty$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$,

Řešení: Použijeme vzorec $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$, poté VOLO a VOAL.

Výsledek je 1.

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+2} - \sqrt[3]{n^3+1})$,

Řešení: Obě odmocniny převedeme na šestou odmocninu a použijeme vzorec

$$a^6-b^6 = (a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5).$$

Poté rozšíříme zlomek výrazem $\frac{1}{n^5}$ a použijeme několikrát VOLO a VOAL.

Výsledek je 1.

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+2n+n\sin(2n)}{n\cos(3n)+(2n+\sin(4n))^2}$,

Řešení: Vynásobíme čitatel i jmenovatel $\frac{1}{n^2}$ a poté několikrát použijeme VOAL a VOSON.

Výsledek je $\frac{1}{2}$.

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}$, $(a,b,c>0)$,

Řešení: Použijeme VODP + $\sqrt[n]{(\max\{a,b,c\})^n} \le \sqrt[n]{a^n,b^n,c^n} \le \sqrt[n]{3(\max\{a,b,c\})^n}$.

Výsledek je $\max\{a,b,c\}$.

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$,

Řešení: Použijeme $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \le \frac{1}{\sqrt{n^2}}$, VODP a VOLO.

Výsledek je 1.

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$, $(a\ge 0)$,

Řešení: Rozdělíme na případy:

- $a=0$
  Triviálně odvodíme, že limita je 0.
- $a\in(1,\infty)$
  Použijeme VODP, známou limitu $\sqrt[n]{n}\to 1$ a $\exists n_0 = [a]+2\ \forall n>n_0 : 1 \le \sqrt[n]{a} \le \sqrt[n]{n}$, kde $\sqrt[n]{n}\to 1$ víme.

- $a \in (0,1)$
  Pomocí $\frac{1}{a} = a' \in (1,\infty)$,
  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$$
  a předchozího případu snadno ukážeme rovnost 1.

Výsledek je 0 pro $a = 0$ a 1 pro $a > 1$.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

Řešení: Vhodně rozšíříme pomocí vzorce $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, kde $a = \sqrt{n+1}$ a $b = \sqrt{n}$. Upravíme a pomocí VOLO a VOAL ukážeme, že podposloupnost se sudými indexy ($a_{2n} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{2n}}}$) jde k $\frac{1}{2}$ a podposloupnost s lichými indexy ($a_{2n+1} = \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{2n+1}}}$) k $-\frac{1}{2}$. To implikuje, že limita neexistuje, neboť, pokud by existovala, tak z VOVP by obě podposloupnosti musely mít stejnou limitu, a to nemají.
Výsledek je limita neexistuje.

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2\cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}$,

Řešení: Rozšíříme vnitřek n-té odmocniny podle vzorce $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$, kde $a = \sqrt{3^n + 2\cdot 2^n}$ a $b = \sqrt{3^n + 2^n}$. Po lehké úpravě využijeme ve jmenovateli VODP s odhadem

$$\sqrt{3} = \sqrt[n]{\sqrt{3^n}} \le \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2\cdot 2^n} + \sqrt{3^n + 2^n}} \le \sqrt[n]{\sqrt{3\cdot 3^n} + \sqrt{2\cdot 3^n}} = \sqrt[n]{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\cdot\sqrt{3},$$

což spolu s VOAL a známými limitami dává, že jmenovatel jde k $\sqrt{3}$.
Výsledek je $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{2n+1}{n+2})^n + (\frac{3n+1}{n+3})^n}$,

Řešení: Pomocí VOAL a VODP s odhady

$$\frac{3n+1}{n+3} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^n} \le \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n + \left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^n}$$
$$\sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)^n + \left(\frac{3n+1}{n+3}\right)^n} \le \sqrt[n]{\left(\frac{2n+4}{n+2}\right)^n + \left(\frac{3n+9}{n+3}\right)^n} = \sqrt[n]{2^n + 3^n} \le 3\sqrt[n]{2}$$

snadno dostáváme výsledek 3.
Výsledek je 3.

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}}$,

Řešení: Pomocí VOAL a VODP s odhadem

$$\sqrt[n]{\frac{4^n - 3^n}{5^n + 5^n}} \le \sqrt[n]{\frac{4^n + 3^n \sin(2^n)}{5^n + 4^n \cos(n!)}} \le \sqrt[n]{\frac{4^n + 4^n}{5^n - 4^n}},$$

kde se v horním i dolním odhadu vytkne z čitatele uvnitř odmocniny 4^n, což se dá odmocnit na 4, a ze jmenovatele uvnitř odmocniny 5^n, což se dá odmocnit na 5. Pro ukázání, že horní i dolní odhad jdou oba k $\frac{4}{5}$ se dále využije VOAL a VODP s odhadem $1-(\frac{3}{4})^n \le \sqrt[n]{1-(\frac{3}{4})^n} \le 1$ a $1-(\frac{4}{5})^n \le \sqrt[n]{1-(\frac{4}{5})^n} \le 1$, kde na $(\frac{3}{4})^n$ a $(\frac{4}{5})^n$ se například aplikuje PK.
Výsledek je $\frac{4}{5}$.

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\frac{n\pi}{2}+\pi)\cdot n$,

Řešení: Nalezněte dvě vybrané podposloupnosti, kde každá jde k jinému číslu, což díky větě o vybrané posloupnosti dokazuje neexistenci limity. Například můžeme brát

$$a_{4n} = \cos\left(\frac{4n\pi}{2}+\pi\right)4n = \cos(2\pi+\pi)4n = -1\cdot 4n \to -\infty$$

a

$$a_{4n-1} = \cos\left(\frac{(4n-1)\pi}{2}+\pi\right)(4n-1) = \cos(2\pi+\frac{\pi}{2})(4n-1) = 0\cdot(4n-1) = 0.$$

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$,

Řešení: Nejprve vytknutím $\sqrt{n}$ a použitím VOLO zvlášť ukažme $\frac{5}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}} \to 0$. Díky tomu a VOAL dostáváme, na dluh existence pravé strany, že

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}.$$

Nyní z obou odmocnin v čitateli vytkneme n, abychom dostali pod odmocninou stejný výraz a lépe se nám rozšiřovalo. Poté čitatel rozšíříme podle vzorce $a^6-b^6 = (a-b)\sum_{k=0}^{5} a^k b^{5-k}$, kde například $a = \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n})^2}$ a $b = \sqrt[6]{(1+\frac{1}{n})^3}$ a ze jmenovatele vytkneme $\sqrt{n}$. Po lehkých úpravách dostáváme

$$\frac{-\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}}{(1-n^{-\frac{3}{4}})\sum_{k=0}^{5}(1+n^{-1})^{\frac{10+k}{6}}}.$$

Jmenovatel jde podle VOAL a VOLO k 5 a čitatel podle VOAL a případně VOLO k 0. Celkem podle VOAL $a_n \to 0+\frac{0}{5} = 0$.
Výsledek je 0.

(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+\sin^2(n)}-\sqrt{n-\cos^2(n)}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}$.

Řešení: Čitatel i jmenovatel rozšíříme podle vzorce $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$. Dostaneme limitu ze zlomku

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+\sin^2(n)}+\sqrt{n-\cos^2(n)}}.$$

Dále použitím VODP s odhadem

$$\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}} \le \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+\sin^2(n)}+\sqrt{n-\cos^2(n)}} \le \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} \le \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n-1}}$$

a dopočítáním horního a dolního odhadu rozšířením zlomku výrazem $\frac{1}{\sqrt{n}}$ a použitím VOLO dostáváme výsledek $\frac{1}{2}\cdot 1$.
Jiná možnost by byla nepoužívat VODP a rovnou rozšířit výrazem $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Poté by se ovšem muselo využít věty VOSON.
Výsledek je $\frac{1}{2}$.

(p) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}-\sqrt{n^3+1}}$,

Řešení: Rozšíříme zlomek výrazem $\frac{1}{n^{3/2}}$ a použijeme VOLO a VOAL.
Výsledek je 0.

(q) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})$,

Řešení: Použijeme vzorec $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$, kde $a = \sqrt[n]{3}$ a $b = \sqrt[n]{2}$. Poté použijeme

$$\frac{\sqrt{n}}{3n} = \frac{\sqrt{n}}{\sum_{k=0}^{n-1} 3} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{3})^k (\sqrt[n]{2})^{n-1-k}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sum_{k=0}^{n-1} 1} = \frac{\sqrt{n}}{n}$$

a třeba pomocí VL/(iv) a případným použitím VOAL ukážeme $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.
Výsledek je 0.

(r) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^{100} - (4-\frac{3}{n})^{50}}{(8-\frac{1}{n})^{34} - (4+\frac{1}{n})^{51}}$.

Řešení: Tento příklad nelze řešit vytknutím vhodného členu, neboť klíčovou roli hrají postupně podle priority členy $(\frac{1}{n})^1, (\frac{1}{n})^2, (\frac{1}{n})^3, \ldots$. Tyto členy obsahuje každá umocněná závorka a pro vysoká n mají největší vliv na to, jak blízko je každá umocněná závorka svojí limitě. Proto postupujeme následovně: Mocniny rozepíšeme pomocí Binomické věty, odečteme členy s nultou mocninou $\frac{1}{n}$, ze všech sum si vytáhneme členy s mocninou $(\frac{1}{n})^1$, čitatel i jmenovatel vynásobíme $\frac{n}{2^{98}}$. V sumách jsou nyní členy, které obsahuji alespoň první mocninu $\frac{1}{n}$, a tedy jdou k nule. Mimo sumu máme v čitateli $2 \cdot 100 + 3 \cdot 50$ a ve jmenovateli $-2 \cdot 34 - 4 \cdot 51$. Použijeme VOAL a jsme hotovi.
Výsledek je $\frac{-175}{136}$.

5. **Spočtěte limity:**

- $\lim_{n\to\infty} \frac{5^n-3^n}{5^n+3^n}$,

  Řešení: Zlomek rošíříme výrazem $\frac{1}{5^n}$ a upravíme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^n-3^n}{5^n+3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5^n}{5^n}-\frac{3^n}{5^n}}{\frac{5^n}{5^n}+\frac{3^n}{5^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{5}{5})^n-(\frac{3}{5})^n}{(\frac{5}{5})^n+(\frac{3}{5})^n} \ .$$

  Dále využijeme faktu, že $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ pro $a \in (-1,1)$ a aritmetiky limit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{5}{5})^n-(\frac{3}{5})^n}{(\frac{5}{5})^n+(\frac{3}{5})^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1 \ .$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n+5^n}{2^{n+1}+3^{n+1}+5^{n+1}}$.

  Řešení: Zlomek rošíříme opět výrazem $\frac{1}{5^n}$ a postupujeme podobně

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n+5^n}{2^{n+1}+3^{n+1}+5^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2/5)^n+(3/5)^n+(5/5)^n}{2(2/5)^n+3(3/5)^n+5(5/5)^n} = \frac{0+0+1}{2\cdot 0+3\cdot 0+5\cdot 1} = \frac{1}{5} \ .$$

6. **Spočtěte limity:**

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}$ **(pro** $n \geq 2$**),**

  Řešení: Výraz můžeme upravit

  $$\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} = \frac{\sqrt{n}/\sqrt{n}+1/\sqrt{n}}{\sqrt{n}/\sqrt{n}-1/\sqrt{n}} = \frac{1+1/\sqrt{n}}{1-1/\sqrt{n}} \ ,$$

  takže s aritmetikou limit dostáváme

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/\sqrt{n}}{1-1/\sqrt{n}} = \frac{1+0}{1-0} = 1 \ .$$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$ **,**

  Řešení: Překvapivě nejprve převedeme na zlomek a pak využijeme aritmetiku limit

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \frac{2}{\infty+\infty} = 0 \ .$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$ **.**

  Řešení:

7. **Určete hromadné body posloupnosti definované následovně: $a_1 = 1$, pro $n \geq 2$ je $a_n = \min\{d \in \mathbb{N} : d \geq 2 \wedge d \backslash n\}$ (poslední znak znamená, že d dělí n).**

Řešení: Pro $n \geq 2$ je a_n nejmenší netriviální dělitel čísla n, tedy jistě prvočíslo. Na druhou stranu, pro prvočíslo p jsou všechny členy $a_{p^k}, k = 1, 2, \dots$ rovny p. Tedy tvoří konstantní podposloupnost a p je její limitou a tím i hromadným bodem posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

8. **Ukažte, že součet harmonické řady je neomezený, tj. posloupnost součtů** $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ **má limitu** $+\infty$**.**

Řešení: Matematickou indukcí dokážeme pro $n = 2^m$ odhad $1 + \frac{m}{2} \leq H_n \leq 1 + m$. Pro neomezenost H_n je podstatný dolní odhad.

3.5 Cvičení

1. **Spočtěte limity:**

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ **(spíš těžší teoretický bonus, můžete využívat dále),**

  Řešení: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

  Platí $\forall n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{n} > 1$, ale $\forall c > 1\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0 : n < c^n$ takže $\sqrt[n]{n} < c$. Takže nás může napadnout, že 1 je ta správná limita.

  Uvažme posloupnost a_n takovou, že $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n$. Tato a_n jsou kladná a my ukážeme, že jdou k 0.

  Umocníme na n-tou a dostaneme

  $$n = (1 + a_n)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a_n^j \geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2.$$

  Takže

  $$\begin{aligned} n &\geq \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \\ 1 &\geq \frac{n-1}{2} a_n^2 \\ \frac{2}{n-1} &\geq a_n^2 \end{aligned}$$

  a tím pádem máme $0 \leq a_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ a $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$**,**

  Řešení: Obdobně jako v předchozím příkladě usoudíme, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n}$**,**

  Řešení: Pokusíme se odhadnout sdola konstantou a shora posloupností a použít větu o dvou policajtech (Věta 5).

  – Nejprve $\sqrt[n]{n^2 + 2^n} \geq \sqrt[n]{2^n} = 2$ a máme dolní odhad.

  – Pro $n \geq 4$ je $2^n \geq n^2$ a tedy $\sqrt[n]{n^2 + 2^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2\sqrt[n]{2}$ a jelikož posloupnost $\sqrt[n]{2}$ jde k 1, máme horní odhad také 2.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ **pro** a, b, c **nezáporná reálná.**

  Řešení: Předpokládejme $a \leq b \leq c$, pak podobně jako v předchozí úloze dostáváme $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \geq \sqrt[n]{c^n} = c$ jako dolní odhad a $\sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} \leq \sqrt[n]{3c^n} \leq c\sqrt[n]{3}$ jako horní odhad jdoucí také k c.

2. **Spočtěte součet geometrické řady $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ (v závislosti na parametru q).**

   Řešení: Využitím vztahu $(1+q+\ldots+q^n)(1-q) = 1-q^{n+1}$ dostáváme pro posl. částečných součtů $G_n = \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Pro $q \in (-1,1)$ konverguje q^n k 0 a díky aritmetice limit celá posloupnost k $\frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$.

   Pro $q \geq 1$ pak posl. částečných součtů jde k $+\infty$, pro $q \leq -1$ nemá limitu.

3. **Ukažte, že harmonická řada diverguje, tj. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.**

Řešení: Matematickou indukcí dokážeme pro $n = 2^m$ odhad $1 + \frac{m}{2} \le H_n \le 1 + m$. Pro neomezenost H_n je podstatný dolní odhad.

Je-li $m = 1$, je $n = 2$ a $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Pak dolní odhad $1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ a horní odhad $1 + 1 = 2$ jsou ok.

Indukční krok: $H_{2^{m+1}} = H_{2^m} + \sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k} \ge H_{2^m} + 2^m \cdot \frac{1}{2^{m+1}} = H_{2^m} + \frac{1}{2} \ge 1 + \frac{m}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{m+1}{2}$. Podobně $\ldots \le H_{2^m} + 2^m \cdot \frac{1}{2^m} = H_{2^m} + 1 \le 1 + m + 1 = 1 + (m+1)$.

Alternující harmonická řada je zajímavá:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

ukážeme o ní, že konverguje, ale že nemůžeme libovolně přeuspořádat její členy!

(a) **Alternující harmonická řada konverguje:** Ukážeme ideu důkazu (na několika místech tiše využíváme spojitosti exponenciály atd), že

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2$$

Pomocí Bernoulliho nerovnosti ukážeme, že

$$\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{\frac{n}{n+1}} \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)} \le \frac{2n+1}{n+1} \tag{3.21}$$

Pak použijeme větu o dvou policajtech a předchozí:

$$e^{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)} = 2 \tag{3.22}$$

To znamená, že:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{2n}\right) = \tag{3.23}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \tag{3.24}$$

$$= \ln(2) \tag{3.25}$$

(b) **Nemůžeme libovolně přeuspořádat její členy:** Zkusíme přeuspořádat její členy a nakonec dostaneme jiný výsledek.

Místo

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots$$

přeuspořádejme:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \ldots$$

Každé liché číslo se tam objeví jednou s kladným znaménkem, každé sudé jednou se záporným znaménkem (polovina z nich jako dvojnásobek lichého čísla a polovina jako dvojnásobek sudého). Obecně máme po trojicích:

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}$$

Pokud první dva sečteme dostaneme po dvojicích:

$$\frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{4k}$$

Tedy dostáváme:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \ldots\ldots + \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2(2k)} + \ldots \\
&\quad = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots\right) = \frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}$$

Dodejme ještě, že se vše tato řada dá přeskládat, aby konvergovala k libovolnému číslu (nebo dokonce divergovala).

4. **Mějme kladné reálné číslo c. Spočtěte limitu posloupnosti zadané $a_1 = \sqrt{c}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + c}$.**

Řešení: Pokud limita existuje, pak platí $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n + c} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n + c} = \sqrt{a + c}$. Tohle je užitečný trik, jak získat hodnotu limity (za předpokladu, že limita existuje můžeme využít toho, že každá podposloupnost má stejnou limitu).

Z toho dostáváme rovnost $a = \sqrt{a + c}$ s řešením $\frac{1}{2} \pm \sqrt{c + \frac{1}{4}}$. Nás zajímá to kladné řešení, neboť celá poslounost je kladná, označme ho $a = \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}}$.

V druhé části ukážeme, že posloupnost je kladná (zjevné), rostoucí a shora omezená, tudíž limita existuje.

Nerovnost $a_n < a_{n+1}$ je pro kladná čísla ekvivalentní $a_n^2 < a_{n+1}^2 = a_n + c$ a to platí pro $a_n \in (\frac{1}{2} - \sqrt{c + \frac{1}{4}}, \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}})$, takže je vše v pořádku pro $a_n \in (0, a)$.

Zbývá ukázat omezenost a jako horní závora se nám skvěle hodí číslo a. Postupujeme matematickou indukcí, pro $n = 1$ je $a_1 = \sqrt{c} < \frac{1}{2} + \sqrt{c + \frac{1}{4}} = a$.

Indukční krok: $a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} < \sqrt{a + c} = \sqrt{a^2} = a$.

5. **Najděte množinu hromadných bodů daných posloupností a určete jejich** $\liminf$ **a** $\limsup$

(a) $a_n = (-1)^n \left(2 - \frac{3}{n}\right)$

Řešení: Prvních pár členů $(1, 1/2, -1, 5/4, -7/5, \dots)$. Což společně s $(-1)^n$ motivuje si rozdělit posloupnost na dvě posloupnosti podle parity n. Pro $n = 2k$ dostáváme posloupnost $a_{2k} = 2 - \frac{3}{2k}$, která má limitu 2. Lichá $n = 2k - 1$ dávají posloupnost $a_{2k-1} = -2 + \frac{3}{2k-1}$, která má limitu -2. Máme tedy dva hromadné body. Jelikož sjednocením sudých a lichých čísel dostaneme celou množinu $\mathbb{N}$, proto i $H = \{-2, 2\}$. Což dává $\limsup a_n = 2$ a $\liminf a_n = -2$.

(b) $a_n = \cos \frac{2\pi n}{3}$

Řešení: Obdobně jako předchozí případ, rozdělíme (a_n) na tři podposloupnosti. Máme

$$a_{3k} = \cos \frac{6k\pi}{3} = \cos 2k\pi = 1,$$

$$a_{3k-1} = \cos \frac{(6k-2)\pi}{3} = \cos(2k\pi - \frac{2\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$
$$a_{3k-2} = \cos \frac{(6k-4)\pi}{3} = \cos(2k\pi - \frac{4\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}.$$

Proto $H \supset \{-\frac{1}{2}, 1\}$ a díky disjunktnímu rozkladu $\mathbb{N}$ i $H = \{-\frac{1}{2}, 1\}$. Pak jednoduše $\limsup a_n = 1$ a $\liminf a_n = -1/2$.

(c) $a_n = n^{\sin \frac{\pi n}{2}}$

Řešení: Posloupnost

$$\left(\sin \frac{\pi n}{2}\right)_{n=1}^{\infty} = (1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots)$$

v exponentu je periodická a proto uvažujeme tři posloupnosti a_{2k}, a_{4k-1} a a_{4k-3}. Hodnota exponentu je pak v daném pořadí $0, -1, 1$. Proto $a_{2k} = (2k)^0 \to 1$, $a_{4k-1} = (4k - 1)^{-1} \to 0$ a $a_{4k-3} = (4k-3)^1 \to \infty$ a máme $H = \{0, 1, \infty\}$, což dává $\limsup a_n = \infty$ a $\liminf a_n = 0$.

(d) $a_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$

Řešení: Opět rozdělíme na sudý a lichý případ, využijeme VOAL a VOLO a dostáváme $a_{2k} \to 3$ a $a_{2k-1} \to -1$. Proto $H = \{-1, 3\}$, $\limsup a_n = 3$ a $\liminf a_n = -1$.

6.

(a) **Najděte všechny hromadné body posloupnosti (a_n) zadané rekurencí**

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 1/a_n)$$

a první hodnotou $a_1 = 3/2$.

Řešení: Naznačme postup. Prvních pár členů

$$(a_n) = \left(\frac{3}{2}, \frac{13}{12}, \frac{313}{312}, \dots\right)$$

naznačuje, že se hodnoty budou blížit jedné. A opravdu, nejprve jednoduše dle AG nerovnosti $(x+y)/2 \geq \sqrt{xy}$ ukážeme, že $a_n \geq 1$. Potom ukážeme, že (a_n) je klesající pokud odhadneme $a_{n+1} - a_n > 0$. Pak, neboť (a_n) je omezená klesající posloupnost, tak musí mít limitu, nazvěme ji L. Toto L musí splňovat rovnici $L = \frac{1}{2}(L + 1/L)$, kterou převedeme na rovnost $L^2 = 1$. Proto tedy $L = 1$, neboť (a_n) je zdola odhadnutá hodnotou 1. A tedy $H = \{1\}$ a $\limsup a_n = \liminf a_n = 1$.

(b) **Jaká je množina hromadných bodů posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = 1$ a další členy jsou dány vztahem $a_n = \min\{k \in \mathbb{N} : k > 1, k$ dělí $n\}$.**

Řešení: Spočteme si prvích pár členů posloupnosti

$$(a_n) = (1, 2, 3, 2, 5, 2, 7, 2, 3, 2, 11, 2, 13, 2, 3, \dots).$$

Jak vidno z prvních pár členů, $a_{2k} = 2$, $a_{6k-3} = 3$, $a_{30k-25} = 5$ a najdou se i hodnoty $7, 11, 13, 17, 19, \dots$. Zkusíme tedy ukázat, H je množina všech prvočísel (a jedničky).

Všimneme si, že pro libovolné prvočíslo p platí $a_{p^k} = p$ pro libovolné $k \in \mathbb{N}$. Proto $p \in H$. Naopak, pokud p není prvočíslo, pak má rozhodně dělitele d splňující $1 < d < p$, a proto pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ nemůže platit $a_n = p$, neboť d je vždy lepší kandidát na minimum, než p. Howk.

7. **Rozhodněte, jestli dané řady konvergují nebo divergují**

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-2)^n$$

Řešení: Není spňena NPK (Věta 10), neboť $\lim(-2)^n$ neexistuje.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3-5}$$

Řešení: Odhadneme

$$\frac{n^2+1}{n^3-5} > \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$$

a použijeme SK (Věta 10), druhou variantu, s řadou $\sum n^{-1}$, o které už víme, že diverguje.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

Řešení: Buď opět použijeme SK (Věta 10) s $\sum n^{-2}$, tentokrát první variantu. Nebo rozepíšeme

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = x_n + y_n$$

při značení $x_n = 1/n$ a $y_n = 1/(n+1)$, a všimneme si, že $x_{n+1} = y_n$. To při následné sumaci dává

$$\sum\frac{1}{n(n+1)} = \sum(x_n - y_n) = 1 + \sum(x_{n+1} - y_n) = 1.$$

A proto řada konverguje. Ba dokonce umíme říci, že konverguje k 1.

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1000}}$$

Řešení: Není splněna NPK (Věta 10), neboť $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{1000}} = 1$.

3.6 Cvičení

1. **Spočítejte** $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x^2)$**, kde** sgn **je funkce signum, tedy**

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \textbf{pro } x < 0 \\ 0 & \textbf{pro } x = 0 \\ 1 & \textbf{pro } x > 0 \end{cases}$$

Řešení: Pro všechna $x \neq 0$ je $x^2 > 0$ a tedy $\operatorname{sgn}(x^2) = 1$, takže i když je $\operatorname{sgn}(0) = 0$, je $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x^2) = 1$ (limitu zkoumáme na prstencovém okolí).

2. **Exponenciálu jste definovali následovně:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

Speciálně jste měli tvrzení bez důkazu, že tato řada konverguje pro každé reálné číslo $x \in \mathbb{R}$**.**

Přesvědčete se o tom, že $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ **(speciálně budete muset věřit, že operace s nekonečnou řadou jsou ok).**

Řešení: Teď budeme věřit, že operace s nekonečnou řadou jsou ok (zrovna tyhle se dají rozmyslet jednoduše, pokud věříme, že e^x tak jak jsme ho definovali konverguje pro libovolné reálné x).

Vadí nám, že „dělíme nulou“. Vyjdeme z definice exponenciely a upravíme

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots - 1}{x} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \dots$$

a nyní dosadíme $x = 0$ a dostaneme řadu, která triviálně konverguje k 1.

O výsledku se můžeme přesvědčit i numericky:

$$\frac{e^{0,1} - 1}{0,1} = 1,05171$$

$$\frac{e^{0,01} - 1}{0,01} = 1,00502$$

$$\frac{e^{0,001} - 1}{0,001} = 1,0005$$

$$\frac{e^{-0,1} - 1}{-0,1} = 0,951626$$

$$\frac{e^{-0,01} - 1}{-0,01} = 0,995017$$

$$\frac{e^{-0,001} - 1}{-0,001} = 0,9995$$

3. **Definujeme**

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

a opět věříme tvrzení bez důkazu, že tato řada konverguje pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ (a dokonce absolutní hodnota výsledku je nejvýš jedna).

Přesvědčete se, že $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Řešení: Podobně jako v předchozím příkladu

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots$$

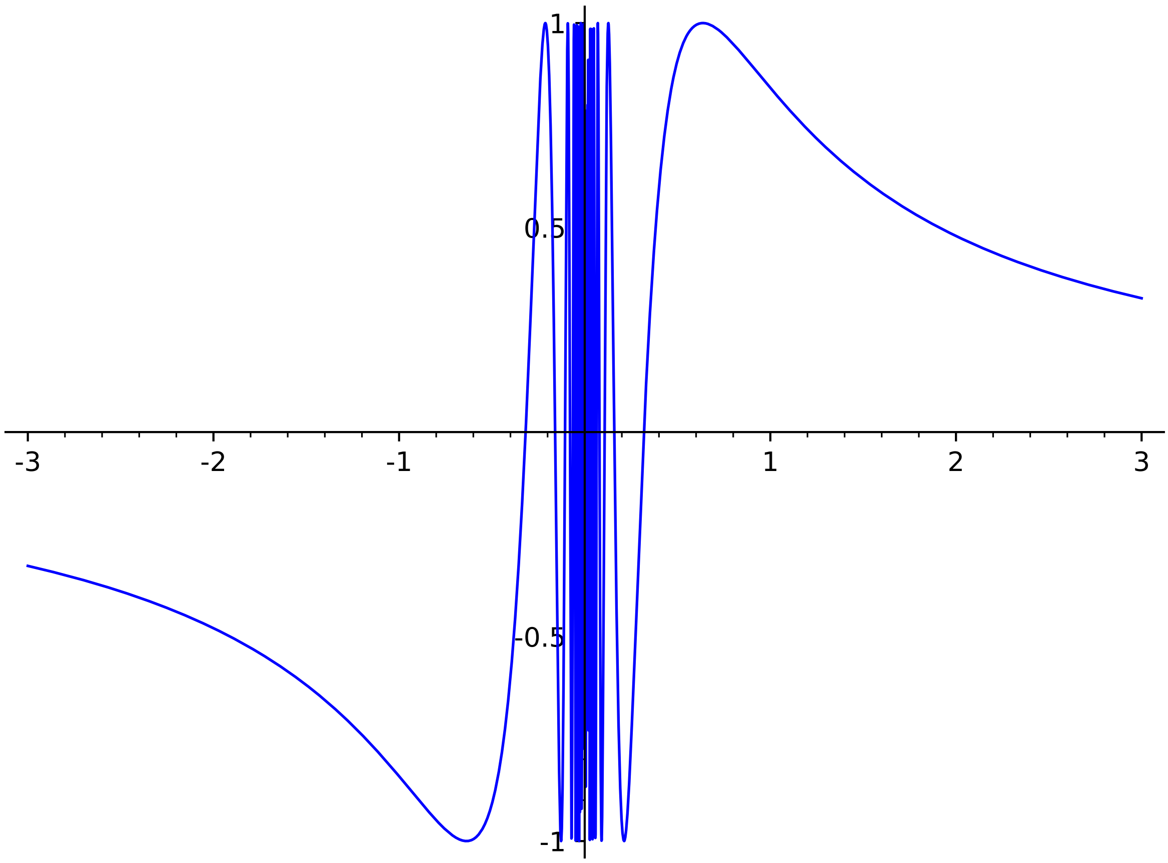
a dosadíme $x = 0$.

Tento příklad má i intuitivní vysvětlení, když se podíváte na graf sin hodně blízko nuly, tak je to skoro lineární funkce. Poznamenejme, že z definice sin můžeme i vykoukat, že $\sin(x) \leq x$ pro libovolné $x \geq 0$.

4. **Dokažte, že neexistuje** $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$**.**

Řešení: Dokazujeme, že neexistuje limita. Zvolme tedy $\varepsilon = 1/2$ a chceme ukázat, že pro libovolné $\delta > 0$ existují $x_1, x_2 \in P(0, \delta)$ taková, že $|\sin(1/x_1) - \sin(1/x_2)| > 1/2$. Pro dané δ volíme $x_1 = \frac{1}{2\pi\lceil\frac{1}{\delta}\rceil + \pi/2}$, $x_2 = \frac{1}{2\pi\lceil\frac{1}{\delta}\rceil + 3\pi/2}$ (hodnoty sinu budou 1, -1).

Viz Obrázek 3.2.



Obrázek 3.2: $f(x) = \sin(1/x)$

5. **S využitím předchozích řešení spočtěte:**

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x}$**,**

   Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} \tag{3.26}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = 1. \tag{3.27}$$

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$**,**

   Řešení:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} \tag{3.28}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} \tag{3.29}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{2} \tag{3.30}$$

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$**.**

   Řešení: Tentokrát použijeme větu o limitě složené funkce 12.

   Nejprve zvolíme $y = g(x) = \ln(x+1)$ a převedeme $x = e^y - 1$. Tím máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{y\to Y} \frac{y}{e^y - 1},$$

   kde za Y by se měla objevit hodnota $Y = g(0) = \ln(0+1) = 0$.

   V takovém případě bychom dopočetli

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{e^y - 1} = \lim_{y\to 0} \left(\frac{e^y - 1}{y}\right)^{-1} = 1,$$

   v případě, že první rovnost je skutečně korektní.

   To ukážeme pomocí věty o limitě složené funkce, k def. funkce g si přidáme funkci $f(y) = \frac{y}{e^y - 1}$ a

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{e^{\ln(x+1)} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x+1-1}.$$

   $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{y\to 0} f(y) = 1$, takže $\lim\limits_{x\to 0} f(g(x)) = 1$, pokud je splněna některá z podmínek věty.

   Spojitost funkce f v bodě 0 neplatí. Naštěstí např. na intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ má $g(x) = \ln(x+1) = 0$ jediné řešení $x = 0$ a tak na prstencovém okolí je $g(x) \neq 0$ a je to v pořádku.

6. **Spočtěte limity**

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5+7x+1}{3x^5-4x^3-x^2}$,

Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^5+7x+1}{3x^5-4x^3-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5}{x^5} \cdot \frac{2+7/x^4+1/x^5}{3-4/x^2-1/x^3} \tag{3.31}$$

$$= \frac{2+0+0}{3+0+0} = \frac{2}{3} \tag{3.32}$$

- $\lim_{x\to2} \frac{(x^2-x-2)^2}{x^3-12x+16}$,

Řešení: Pokud bychom pouze dosadili, dostaneme

$$\lim_{x\to2} \frac{(x^2-x-2)^2}{x^3-12x+16} = \frac{(2^2-2-2)^2}{2^3-12\cdot2+16} = \frac{0}{0},$$

což není definovaný výraz. Je z toho však vidět, že $x = 2$ je kořenem čitatele i jmenovate. Upravíme tedy

$$\lim_{x\to2} \frac{(x^2-x-2)^2}{x^3-12x+16} = \lim_{x\to2} \frac{((x-2)(x+1))^2}{(x-2)(x-2)(x+4)} \tag{3.33}$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{(x+1)^2}{x+4} \tag{3.34}$$

$$= \frac{3^2}{6} = \frac{3}{2} \tag{3.35}$$

- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}$.

Řešení:

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \tag{3.36}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \tag{3.37}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+\sqrt{1/x}}}{\sqrt{1+\sqrt{1/x+\sqrt{1/x^3}}}+1} \tag{3.38}$$

$$= \frac{\sqrt{1+\sqrt{0}}}{\sqrt{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}}+1} = \frac{1}{2} \tag{3.39}$$

3.7 Cvičení

1. **Spočítejte následující limity:**

   (a) $\lim_{x\to\infty} \cos(1/x)$

   Řešení: Funkce cos je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Můžeme tedy využít větu o limitě složené funkce (Věta 12), vnější funkce – cos – je spojitá, využíváme tedy její první případ.

$$\lim_{x\to\infty} \cos(1/x) = \cos\left(\lim_{x\to\infty} 1/x\right) = \cos(0) = 1$$

   (b) $\lim_{x\to\infty} \sin(1/x^3)$

   (c) $\lim_{x\to\infty} \sqrt[\ln(x)]{e}$

   Řešení: Přepíšeme na $\sqrt[\ln(x)]{e} = e^{1/\ln(x)}$ a řešíme jako předchozí.

   (d) $\lim_{x\to 0} \ln(|x|)$

   Řešení: Limita vnitřní funkce (absolutní hodnoty) je nula. Přirozený logaritmus v nule není ani definovaný, natož aby tam byl spojitý.

   Ale můžeme použít větu o limitě složené funkce (Věta 12) a to její druhou část, protože $|x| = 0$ jen pokud $x = 0$. Dostáváme výsledek mínus nekonečno, stejně jako kdybychom počítali limitu zprava $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$.

   (e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1-\sin(x)}$

   Řešení: Vnější funkce je $1/x$, vnitřní $1 - \sin(x)$.

   Můžeme použít lehkou modifikaci věty o limitě složené funkce (Věta 12) a to její druhé části, protože existuje okolí $\pi/2$ na kterém platí $\sin(x) = 1$ právě když $x = \pi/2$. Navíc $1 - \sin(x) \geq 0$, takže můžeme zkoumat

$$\lim_{x\to 0^+} 1/x = \infty$$

   Poznamenejme, že podobnou úvahu bychom mohli udělat i pokud jako vnější funkci bereme $\frac{1}{1-x}$ a za vnitřní $\sin(x)$.

2. **Určete** $\sin^{-1}(0.1)$ **s přesností** ± 0.0001.

Řešení: Víme, že funkce sin je spojitá, $\sin(0) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$. Používáme Darbouxovu vlastnost o nabývání mezihodnot a „půlíme interval.“

ℓ	$\sin(l)$	u	$\sin(u)$	$\frac{l+u}{2}$	$\sin\left(\frac{l+u}{2}\right)$
0	0.0	1.5708	1.0	0.7854	0.707108
0	0.0	0.7854	0.707108	0.3927	0.382684
0	0.0	0.3927	0.382684	0.19635	0.195091
0	0.0	0.19635	0.195091	0.098175	0.098017
0.098175	0.098017	0.19635	0.195091	0.147262	0.146731
0.098175	0.098017	0.147262	0.146731	0.122719	0.122411
0.098175	0.098017	0.122719	0.122411	0.110447	0.110222
0.098175	0.098017	0.110447	0.110222	0.104311	0.104122
0.098175	0.098017	0.104311	0.104122	0.101243	0.10107
0.098175	0.098017	0.101243	0.10107	0.099709	0.099544
0.099709	0.099544	0.101243	0.10107	0.100476	0.100307
0.099709	0.099544	0.100476	0.100307	0.100092	0.099925
0.100092	0.099925	0.100476	0.100307	0.100284	0.100116
0.100092	0.099925	0.100284	0.100116	0.100188	0.100021

Vidíme tedy, že $\sin^{-1}(0.1) \in [0.10009248046875, 0.10018835449218749]$.

Jednoduchý Python kód:

```python
from math import sin

precision = 0.0001
target = 0.1

l = 0   # lower bound sin(0) = 0
u = 1.5708  # upper bound sin(pi/2) = 1

while u - l > precision:
    m = (l+u)/2
    l, u = (l, m) if sin(m) > target else (m, u)

print(f'arcsin({target}) is in [{l}, {u}]')
```

3. **Nechť $f, g\colon D \to \mathbb{R}$, ukažte, že následující funkce jsou spojité:**

(a) $(f+g)(x) = f(x) + f(x)$

Řešení: Dle definice je funkce f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$, pokud:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Nyní už můžeme jednoduše použít větu o aritmetice limit funkcí 11:

$$\begin{aligned}(f+g)(a) &= f(a) + g(a) \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) && \text{(spojitost } f, g\text{)} \\ &= \lim_{x\to a} f(x) + g(x) && \text{(věta o aritmetice limit funkcí)} \\ &= \lim_{x\to a} (f+g)(x)\end{aligned}$$

(b) $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$

Řešení: Obdobně, akorát použijeme součinovou část věty o aritmetice limit funkcí 11.

Nechť $g\colon D_g \to \mathbb{R}$, $f\colon D_f \to R_f \subseteq D_g$, pak jejich složení je spojitá funkce:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Řešení: Tady budeme chtít použít větu o limitě složené funkce 12, využijeme toho, že vnější funkce g je spojitá (tedy první podmínka je splněná).

Předchozí tvrzení je jen implikace, protože složení dvou nespojitých funkcí může být spojité. Jako příklad definujme funkci $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, která není spojitá, ale složení sama se sebou je spojitá funkce:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pokud } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pak ale funkce $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 1$ neboť výsledek první aplikace f je buď jedna nebo nula (obojí je racionální číslo). To že f není spojitá si rozmyslete sami.

Obdobně poznamenejme, že i součet nespojitých funkcí může být spojitá funkce (například předchozí funkce plus její negace). Sami vymyslete příklad dvou nespojitých funkcí, jejichž součin je spojitý.

S pomocí předchozího dokažte, že následující funkce jsou spojité:

(a) $\sin(x)\sqrt{x} - 28\ln(x)$

Řešení: Definiční obor funkce $\sin(x)$ jsou všechna reálná čísla. Definiční obor funkce $\sqrt{x}$ jsou všechna nezáporná reálná čísla. Definiční obor funkce $\ln(x)$ jsou všechna kladná reálná čísla. Definiční obor celé funkce jsou tedy všechna kladná reálná čísla.

Konstanta -28 je spojitá funkce. Zbytek je součet dvou součinů spojitých funkcí.

(b) $e^{\sin(\ln(x))}$

Řešení: Exponenciála i $\sin(x)$ jsou definované pro všechna reálná čísla. Funkce $\ln(x)$ je definovaná jen pro kladná reálná čísla. Definiční obor celé funkce jsou tedy všechna kladná reálná čísla.

Složení spojitých funkcí je spojitá funkce (a tady máme složení spojité funkce a složení dvou spojitých funkcí).

4. **Připomeňte si poučky o derivacích (Věta 13). Spočítejte derivace následujících funkcí:**

   (a) $3x^2 - 25x + 50$

   Řešení: Využijeme 13:2 a linearitu derivací 13:8. Vyjde: $6x - 25$

   (b) $\sin(x^5)$

   Řešení: Použijeme poučku o derivaci složené funkce 13:10 a o derivaci monomu 13:2, vnitřní funkce je x^5, vyjde: $5x^4 \cos(x^5)$

   (c) $\sin(x)\cos(x)$

   Řešení: Použijeme poznatek o derivaci součinu 13:9 a derivaci sin a cos 13:3, 4:

$$\begin{aligned}(\sin(x)\cos(x))' &= (\sin(x))' \cos(x) + \sin(x)(\cos(x))' && \text{(derivace součinu 13:9)} \\ &= \cos^2(x) - \sin^2(x)\end{aligned}$$

   (d) $(\sin(x))^3$

   Řešení:

Řešení I První možnost je použít poznatek o derivaci složené funkce 13:10, kde vnitřní funkce je sin, vnější x^3:

$$\begin{aligned}\left((\sin(x))^3\right)' &= 3\sin^2(x)(\sin(x))' \\ &= 3\sin^2(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Řešení II Druhou možností je použít poznatek o derivaci součinu 13:9, vyjde to stejně:

$$\begin{aligned}\left((\sin(x))^3\right)' &= (\sin(x)(\sin(x)\sin(x)))' \\ &= \cos(x)\,(\sin(x)\sin(x)) + \sin(x)\,(\sin(x)\sin(x))' \\ &= \cos(x)\,(\sin(x)\sin(x)) + \sin(x)\,(\cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x)) \\ &= 3\sin^2(x)\cos(x)\end{aligned}$$

   (e) $\sin(\cos(x))$

   Řešení: Použijeme poznatek o derivaci složené funkce 13:10 kde vnitřní funkce je cos, vnější sin, vyjde: $\cos(\cos(x))(-\sin(x))$

3.8 Cvičení

1. **Připomeňte si poučky o derivacích (Věta 13). Spočítejte derivace následujících funkcí:**

   (a) $\sqrt{\sin(x)}$

   Řešení: Jedná se o složenou funkci, vnější je $\sqrt{x} = x^{1/2}$ kterou zderivujeme pomocí 2. Vnitřní podle poučky.

   $\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

   (b) $\cos^2(x) + \sin^2(x)$

   Řešení: Derivujeme součet dvou součinů: $-2\sin(x)\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$.

   Tohle dává smysl, protože si pamatujeme, že $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ a derivace konstanty je nula.

   (c) Dle věty o derivaci inverzní funkce ověřte výsledek derivace $\ln(x)$**.**

   Řešení: Logaritmus je inverzní funkce exponenciály, tedy platí $\ln(e^x) = x$. Exponenciála je spojitá a ryze monotónní. Tedy máme:

   $$(\ln(e^x))' = \frac{1}{e^x}$$

   Pro konkrétní $x = e^y$ dostaneme:

   $$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

   (d) $\frac{x^2+1}{3x}$

   Řešení: Dle derivace podílu máme:

   $$\begin{aligned}\left(\frac{x^2+1}{3x}\right)' &= \frac{(x^2+1)'(3x) - (3x)'(x^2+1)}{(3x)^2} \\ &= \frac{6x^2 - 3x^2 - 3}{9x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1}{3x^2}\end{aligned}$$

   (e) x^x

   Řešení: Na tuto funkci nemáme tabulku. Ale můžeme ji upravit a pak už máme postup, jak derivovat

   $$x^x = (e^{\ln(x)})^x = e^{x\ln(x)}$$

   Nyní máme spočítat derivaci složené funkce, vnější funkce je e^y, vnitřní je $x\ln(x)$, tedy součin funkcí.

   $$\begin{aligned}\left(e^{x\ln(x)}\right)' &= e^{x\ln(x)}\,(x\ln(x))' \\ &= e^{x\ln(x)}\,(\ln(x) + x(\ln(x))') \\ &= e^{x\ln(x)}\,(\ln(x) + 1) \\ &= x^x\,(\ln(x) + 1)\end{aligned}$$

2. **Pokud mocninná řada konverguje pro každý bod nějakého otevřeného intervalu I. Pak pro každé $x \in I$ můžeme její derivaci spočítat jako derivaci polynomu:**

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

Spočítejte takto derivace následujících funkcí:

(a) e^x

Řešení:

$$(e^x)' = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right)' = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x^1}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \dots = e^x$$

(b) $\sin(x)$

Řešení:

$$(\sin(x))' = \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)' = \frac{1}{1!} - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \dots = \cos(x)$$

(c) $\cos(x)$

Řešení:

$$(\cos(x))' = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)' = 0 - \frac{2x^1}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \dots = -\sin(x)$$

3. **Představte si, že chcete aproximovat funkci v bodě $a \in \mathbb{R}$ polynomem. Chcete, aby derivace byly ty samé.**

   (a) **Konstantou, tedy $T(a) = f(a)$.**

   Řešení: Jediné, co požadujeme je, aby $T(x)$ bylo konstanta a aby $T(x) = f(a)$. Řešení tedy je:
$$T(x) = f(a)$$

   (b) **Lineárním polynomem (první derivace je stejná, tedy $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$).**

   Řešení: Tady vlastně chceme rovnici tečny (koukněte se na obrázek z definice derivace – Definice 2.7).

   Chceme polynom stupně jedna, aby $T(a) = f(a)$ a aby $T'(a) = f'(a)$.

   Ukažme, že vyhovuje následující: $T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$. Pamatujte, že $f(a), f'(a)$ jsou jen dvě reálná čísla, předchozí je tedy skutečně polynom stupně jedna, který je možná trochu nezvykle napsaný.
$$T(a) = f(a) + f'(a)(a-a) = f(a) + 0f'(a) = f(a)$$
$$T'(x) = (f(a) + f'(a)(a-a))' = 0 + f'(a)(x-a)' = f'(a)$$

   Tedy speciálně
$$T'(a) = f'(a)$$

   Intuice, proč je tam člen $(x-a)$ je ta, že v nule bychom tam chtěli x, ale když místo x napíšeme $(x-a)$, tak náš graf to „posune“ tak po ose x, že kde je a, tam byla nula.

   Řešení tedy je:
$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

   (c) **Kvadratickým polynomem (první i druhá derivace je stejná, tedy $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$ a také $T''(a) = f''(a)$).**

   Řešení: Ukažme, že vyhovuje následující: $T(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$.

   Napřed si spočítáme první dvě derivace polynomu T:

   - První derivace T
$$\begin{aligned} T'(x) &= \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2\right)' \\ &= 0 + f'(a) + f''(a)(x-a) \\ &= f'(a) + f''(a)(x-a) \end{aligned}$$

   - Druhá derivace T
$$\begin{aligned} T''(x) &= (T'(x))' \\ &= (f'(a) + f''(a)(x-a))' \\ &= 0 + f''(a) \\ &= f''(a) \end{aligned}$$

Určitě platí, že $T(a) = f(a) + f'(a)(a-a) + \frac{f''(a)}{2!}(a-a)^2 = f(a) + 0 + 0 = f(a)$. Jak to dopadne, když vyhodnotíme první a druhou derivaci v bodě a?

- $T'(a) = f'(a) + f''(a)(a-a) = f'(a)$ přesně jak jsme chtěli.
- $T''(a) = f''(a)$ přesně jak jsme chtěli.

Řešení tedy je:

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

(d) Kubickým polynomem (první i druhá i třetí derivace je stejná, tedy $T(a) = f(a)$, $T'(a) = f'(a)$ a také $T''(a) = f''(a)$ a také $T'''(a) = f'''(a)$).

Řešení: Poslední, co rozepíšeme celé:

Napřed spočítáme první tři derivace T (zbylé jsou stejně nulové):

- První derivace

$$\begin{aligned} T'(x) &= \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3\right)' \\ &= f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2 \end{aligned}$$

- Druhá derivace

$$\begin{aligned} T''(x) &= (T'(x))' \\ &= \left(f'(a) + f''(a)(x-a) + \frac{f'''(a)}{2!}(x-a)^2\right)' \\ &= f''(a) + f'''(a)(x-a) \end{aligned}$$

- Třetí derivace

$$\begin{aligned} T'''(x) &= (T''(x))' \\ &= (f''(a) + f'''(a)(x-a))' \\ &= f'''(a) \end{aligned}$$

Všimněte si, jak se ta konstanta z vzorečku derivace $(x^k)' = kx^{k-1}$ postupně krátí s tím faktoriálem ve jmenovateli.

Když postupně vyhodnotíme dostáváme přesně to, co jsme chtěli:

- $T(a) = f(a)$
- $T'(a) = f'(a)$
- $T''(a) = f''(a)$
- $T'''(a) = f'''(a)$

Řešení tedy je:

$$T(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$

(e) Řadou, tak aby všechny derivace byly stejné:

Řešení: Obdobně jako předchozí, ale jen to bude „polynom nekonečného stupně" (pozor, že to je hodně laicky popsaná řada...).

$$f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Kde $f^{(n)}$ značí n-krát derivovanou funkci f – její n-tou derivaci.

(f) Jak nahradíte následující funkce řadou v $a = 0$**?**

i. e^x

Řešení: n-tá derivace e^x je pořád e^x. Navíc $e^0 = 1$, tedy i každá derivace v nule bude mít hodnotu 1.

Dostáváme:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

ii. $\sin(x)$

Řešení:

- $\sin(0) = 0$
- $\cos(0) = 1$
- $\sin' = \cos$
- $\sin'' = \cos' = -\sin$
- $\sin''' = -\sin' = -\cos$
- $\sin'''' = -\cos' = \sin$
- Teď už „cyklíme" (derivace jsou periodické)...

Dostáváme:

$$\sin(x) = 0 + x - 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

což je ta řada, pomocí které jsme funkci sin definovali na přednášce.

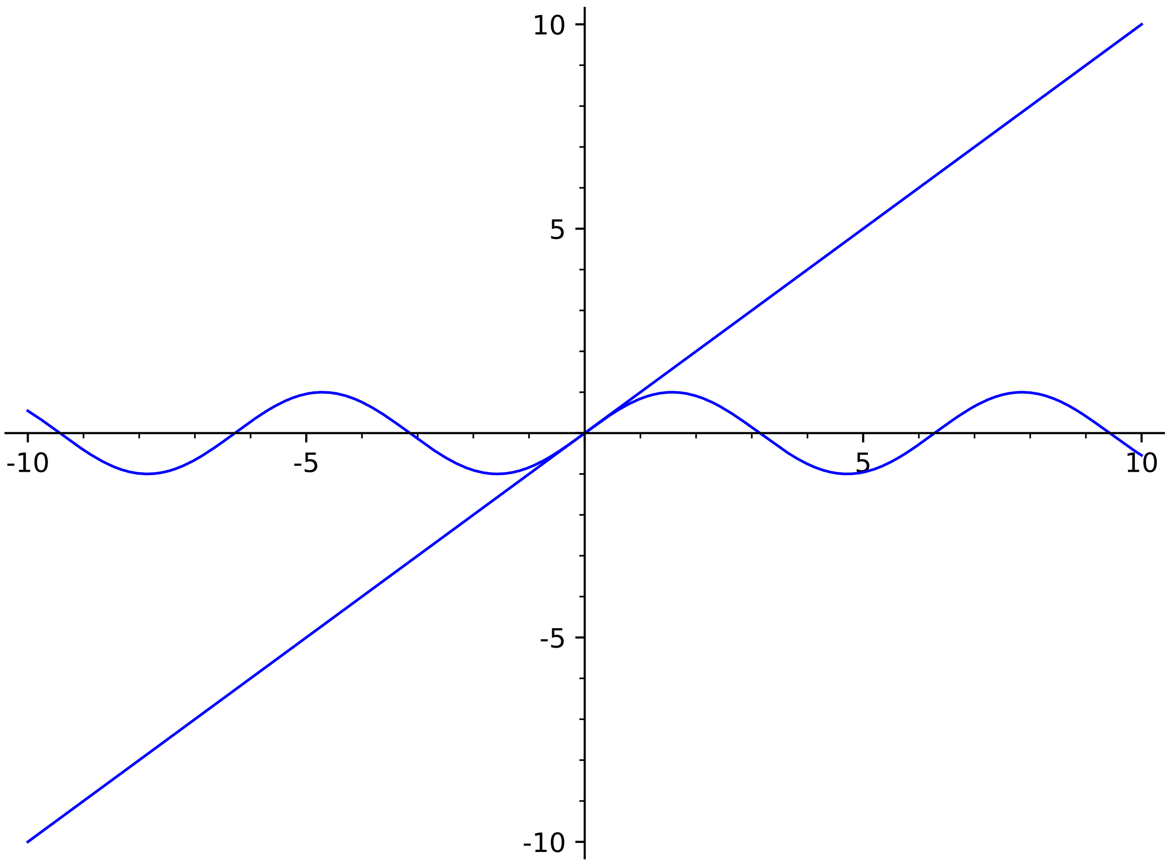
Poznamenejme, že jsme právě vymysleli Taylorův polynom, respektive Taylorovu řadu (tahák Sekce 2.8).

Zkusme pomocí Taylorova polynomu v nule stupně tři aproximovat $\sin(0.1)$.

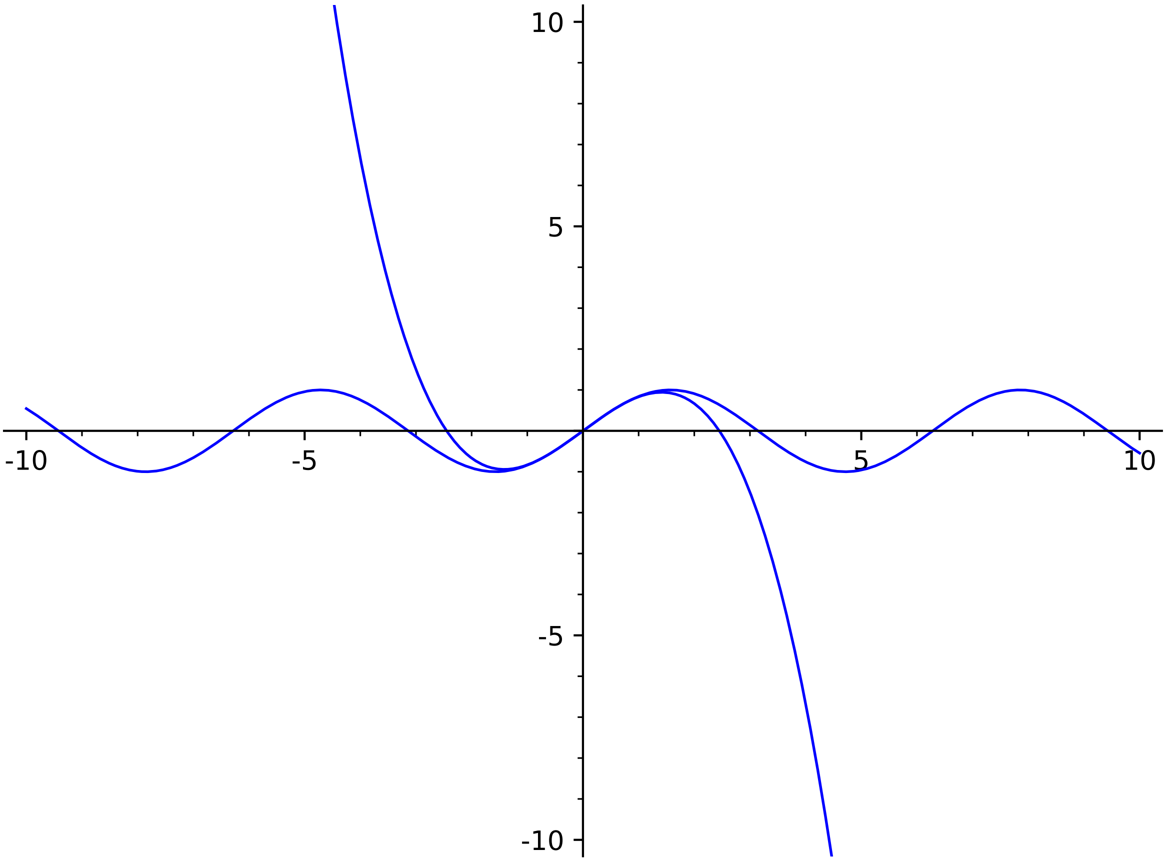
$$T(0.1) = 0.1 - \frac{0.1^3}{6} = 0.09983333333333$$

$$\sin(0.1) = 0.0998334$$

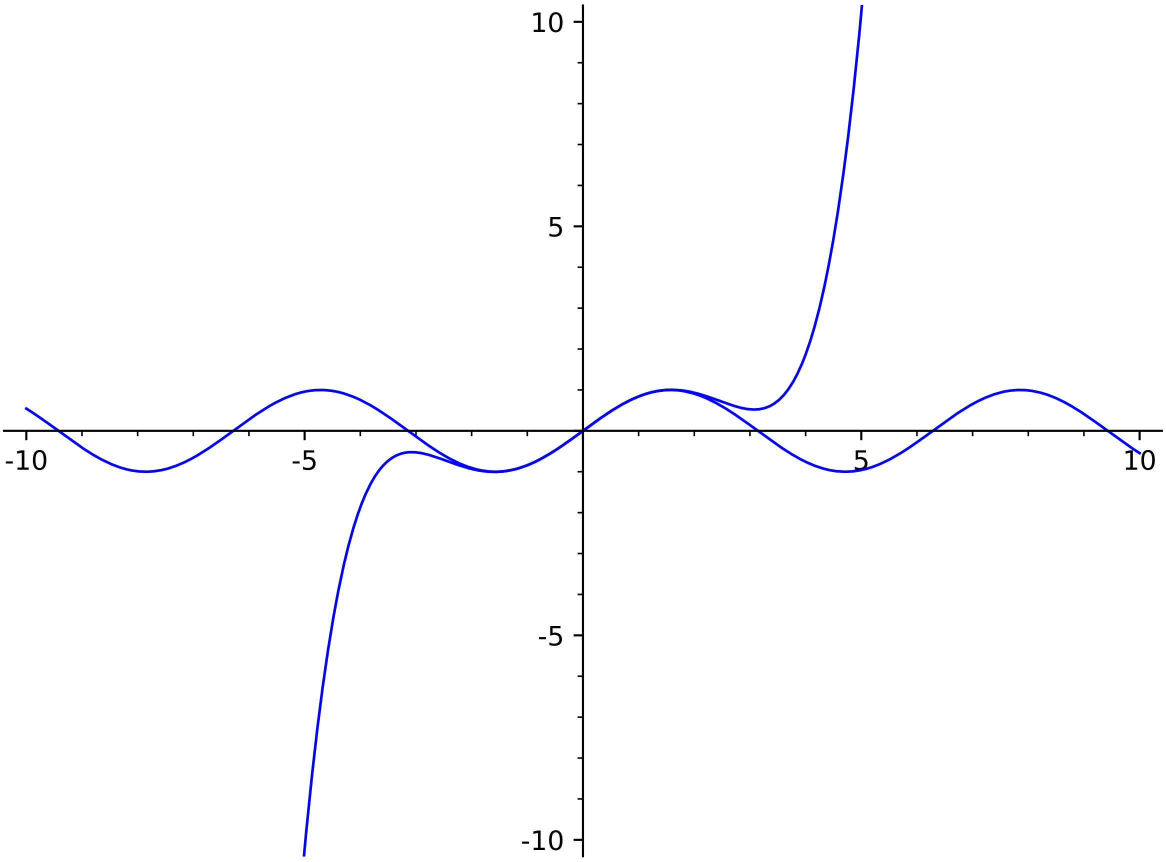
Řešení: Podívejte se ještě, jak vypadají na grafu Taylorovy polynomy v nule stupně jedna 3.3, tři 3.4, pět 3.5, sedm 3.6, devět 3.7, sedmnáct 3.8, pro funkci sin.



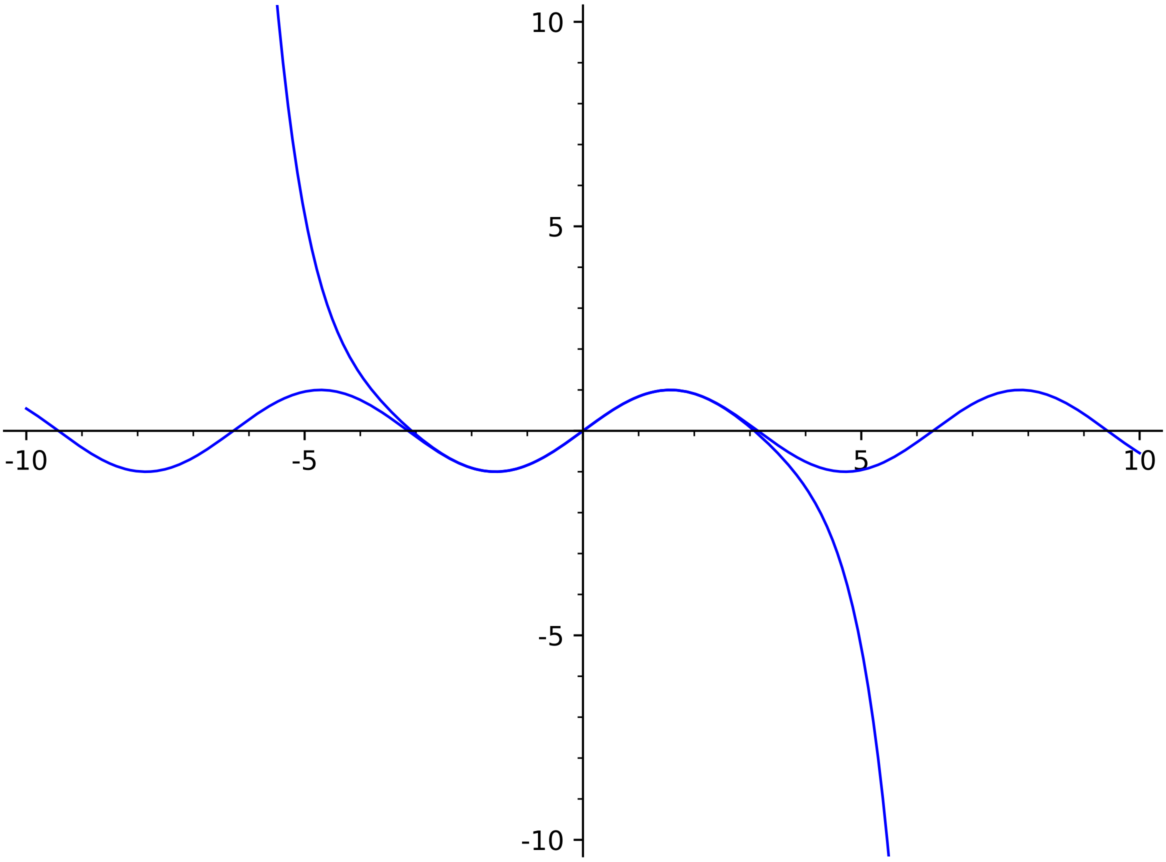
Obrázek 3.3: $\sin(x)$ vs $T(x) = x$



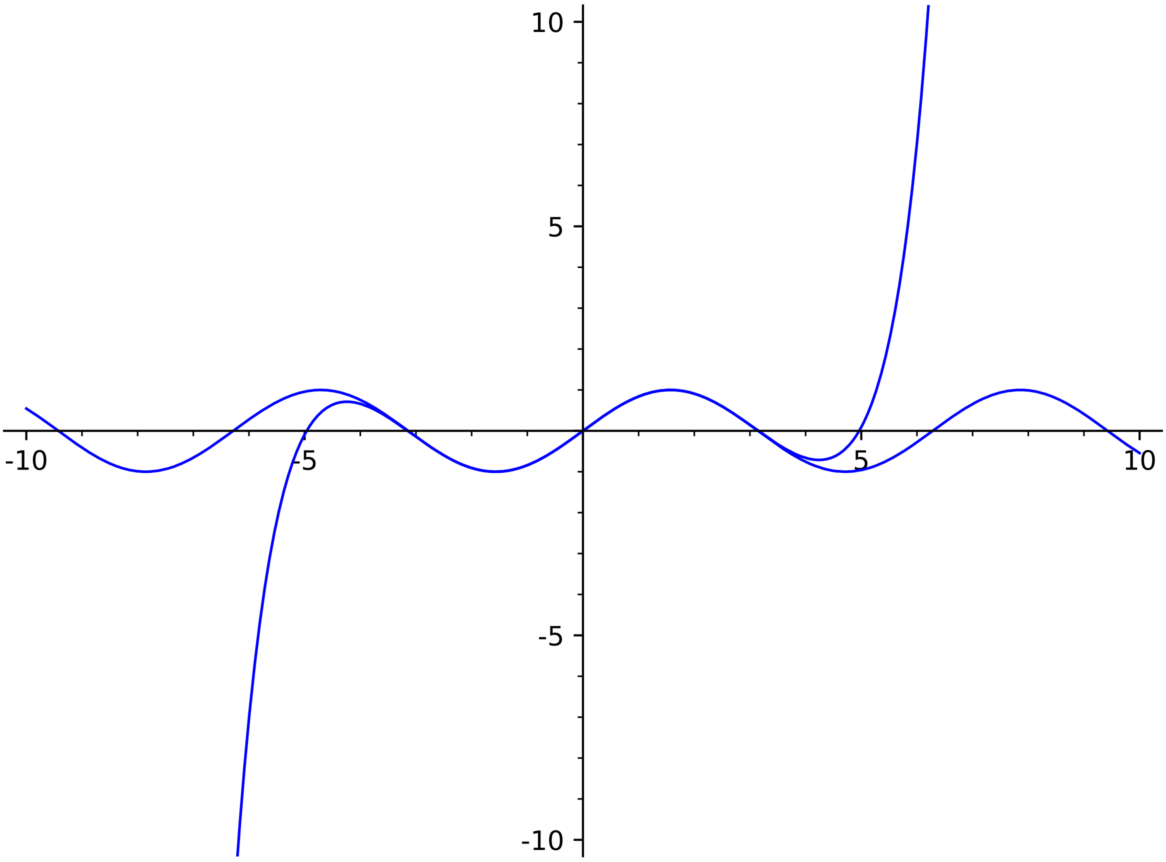
Obrázek 3.4: $\sin(x)$ vs $T(x) = x - \frac{x^3}{3!}$



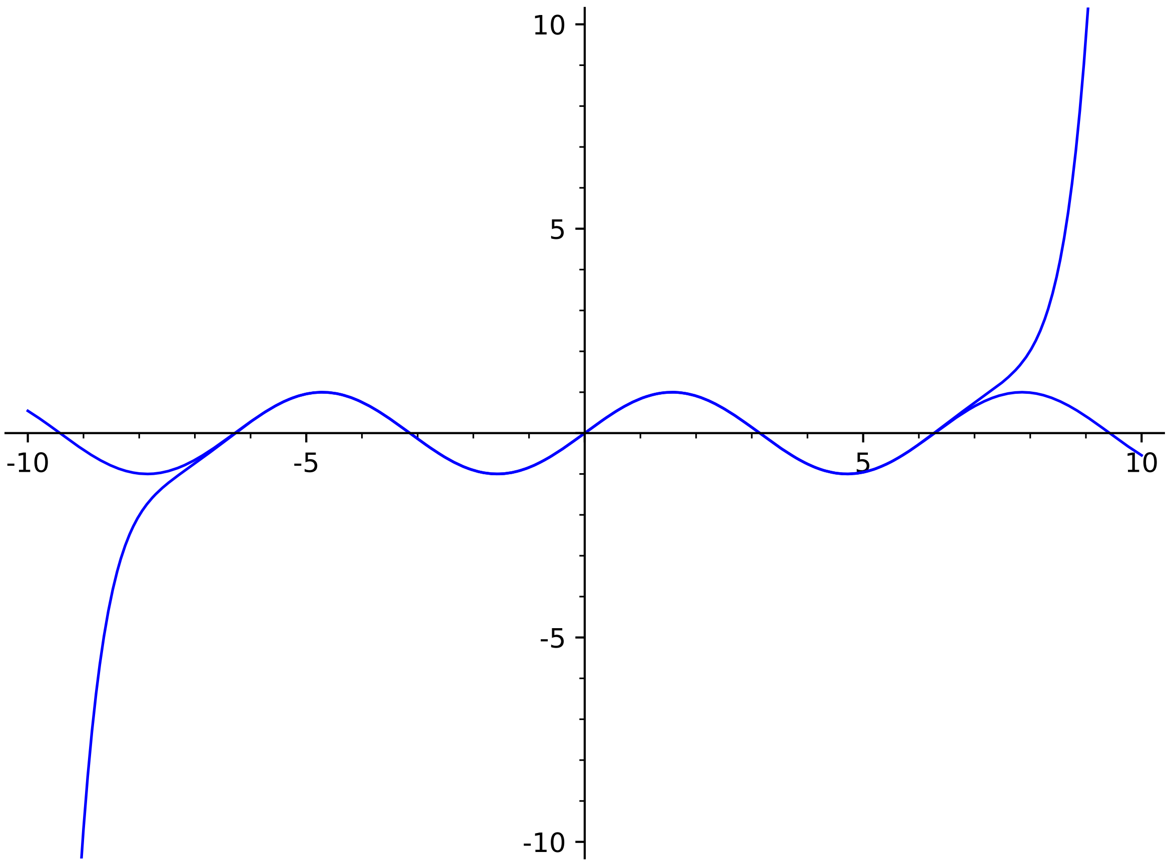
Obrázek 3.5: $\sin(x)$ vs $T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$



Obrázek 3.6: $\sin(x)$ vs $T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$



Obrázek 3.7: $\sin(x)$ vs $T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$



Obrázek 3.8: $\sin(x)$ vs $T(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{13}}{13!} - \frac{x^{15}}{15!} + \frac{x^{17}}{17!}$

3.9 Cvičení

1. **Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity**

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1}$

Řešení: Čitatel i jmenovatel konvergují k nule, použijeme l'Hospitalovo pravidlo (Věta 14), konkrétně „případ 0/0" (derivace jmenovatele je nenulová na malém prstencovém okolí jedničky):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+2x-3)'}{(x^2-1)'} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{2x+2}{2x} && \text{(Věta o aritmetice limit 11)} \\
&= 2
\end{aligned}$$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Řešení: Napřed chytře upravíme (nekonečno krát nula se nám nelíbí, tak nulu napíšeme jako 1/nekonečnem), pak l'Hospitalíme (0/0, derivace jmenovatele je nenulová na nějakém malém okolí nekonečna):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{1/x} && \text{(l'Hospital 0/0)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)'}{(1/x)'} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) && \text{(Věta o aritmetice limit)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$

Řešení: Neumíme vyhodnotit, protože máme $(0/0)^\infty$. Nevíme co s tím, ale máme nějakou funkci na nějakou funkci, tak použijeme starý dobrý trik a všechno převedeme do exponentu a pak budeme moct l'Hospitalovat:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{1-\cos(x)}}$$

Exponenciála je spojitá funkce, použijeme tedy větu o limitě složené funkce (Věta 12) a počítáme jen vnitřek, který rozložíme na něco, co už dopočítáme (a nejspíš jsme něco podobného viděli):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{1-\cos(x)} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}-1} \frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x^2} \frac{x^2}{1-\cos(x)} \right) && \text{(Věta o aritmetice limit)} \\
&= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\frac{\sin(x)}{x}-1} \right) \left(\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x^2} \right) \left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)} \right)
\end{aligned}$$

Mohli jste místo tohohle rozpisu použít l'Hospitala (ověřte předpoklady)? Pokud jste mohli, dostane vás to někam (vyzkoušejte)?

Dopočítáme ty tři dílčí limity:

- Použijeme větu o limitě složené funkce (Věta 12), kde použijeme, že na $P(0, 1/5)$ platí, že $\frac{sin(x)}{x} \neq 1$. Pak využijeme toho, že známe vnitřní limitu známe nebo dopočítáme jedním l'Hospitalem. Pak použijeme l'Hospitala na 0/0.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\frac{\sin(x)}{x} - 1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} \\ &= 1\end{aligned}$$

- Z definice funkce sin pomocí nekonečné řady je to celkem vidět. Obě části jdou k nule, aplikujeme l'Hospitala na 0/0 (možná chcete zase l'Hospitalovat, abyste se přesvědčili, že čitatel limití k nule).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x} - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin(x)}{x} - 1\right)'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}}{2x} && \text{(zjednodušíme, jinak budeme litovat)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{2x^3} && \text{(l'H 0/0)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{6x} && \text{(l'H 0/0)} \\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

- Známá limita (koukněte se na definici cos) nebo můžeme zase dvakrát l'Hospitalovat.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos(x)} = 2$$

Dílčí limity vyšly a jejich součin dává smysl, mohli jsme tedy použít větu o aritmetice limit.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{1-\cos(x)} = -\frac{1}{3}$$

Dosadíme do původní limity:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{1-\cos(x)}} = e^{-\frac{1}{3}}$$

2. **Vyšetřete průběh následujících funkcí:**

(a) $f(x) = x^3 - 12x + 16$

- ***Definiční obor, průsečíky s osami:***

  Řešení: $f(x) = x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$ je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Kořeny jsou 2 (dvojnásobný) a -4 a osou y protíná v $f(0) = 16$.

- ***Limity v krajních bodech:***

  Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

- ***Derivace, monotonie, extrémy:***

  Řešení:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$$

  Stacionární body jsou $-2, 2$, na intervalech $(-\infty, -2)$ a $(2, \infty)$ je $f'(x) > 0$ a tedy $f(x)$ rostoucí, naopak na intervalu $(-2, 2)$ je $f'(x) < 0$ a $f(x)$ je funkce klesající. Odtud také zjistíme, že v bodě $x = -2$ je lokální maximum a v bodě $x = 2$ je lokální minimum.

- ***Druhá derivace, konvexita:***

  Řešení:

$$f''(x) = 6x$$

  Inflexní bod pro $x = 0$. Na intervalu $(-\infty, 0)$ je $f''(x) < 0$ a funkce konkávní, na intervalu $(0, \infty)$ je $f''(x) > 0$ a funkce $f(x)$ je konvexní.

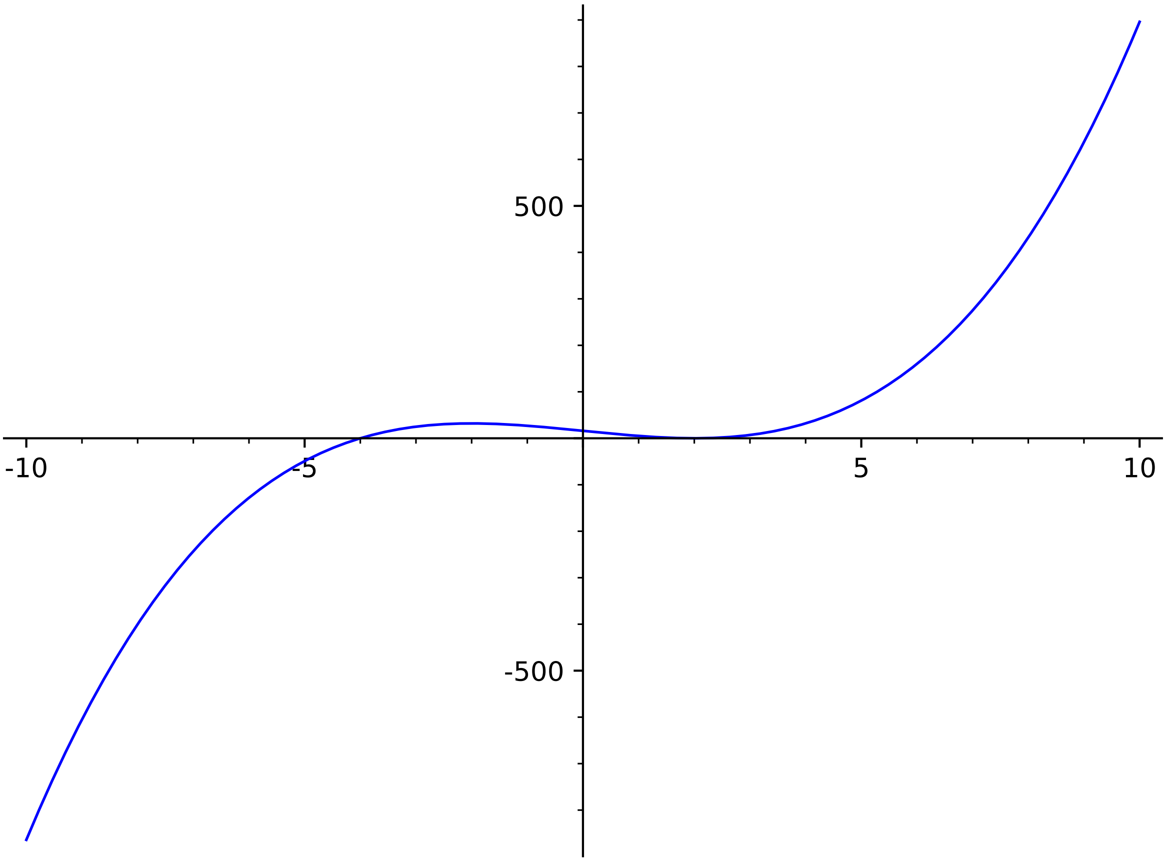
- ***Asymptoty:***

  Řešení:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

  To znamená, že asymptoty neexistují (nemáme směrnice).

  Řešení: Graf funkce je na Obrázku 3.9.



Obrázek 3.9: $f(x) = x^3 - 12x + 16$

(b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$

- ***Definiční obor***

  Řešení: Funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$ je defnovaná pro všechna reálná čísla vyjma $x = 1$.

  $$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{2}{3}$$

  a lze tak spojitě dodefinovat.

  Uvážím-li $\frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{x+1}{x^2+x+1} = g(x)$ pro $x \neq 1$ a $g(1) = \frac{2}{3}$, je $g(x)$ spojité rozšíření $f(x)$ na celé $\mathbb{R}$.

- ***Průsečíky s osami, limity v krajních bodech***

  Řešení:

  $$f(0) = 1$$

  Funkce $g(x)$ (a tedy i $f(x)$) má kořen $x = -1$ a

  $$\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} g(x) = 0.$$

- ***Derivace, monotonnost, extrémy***

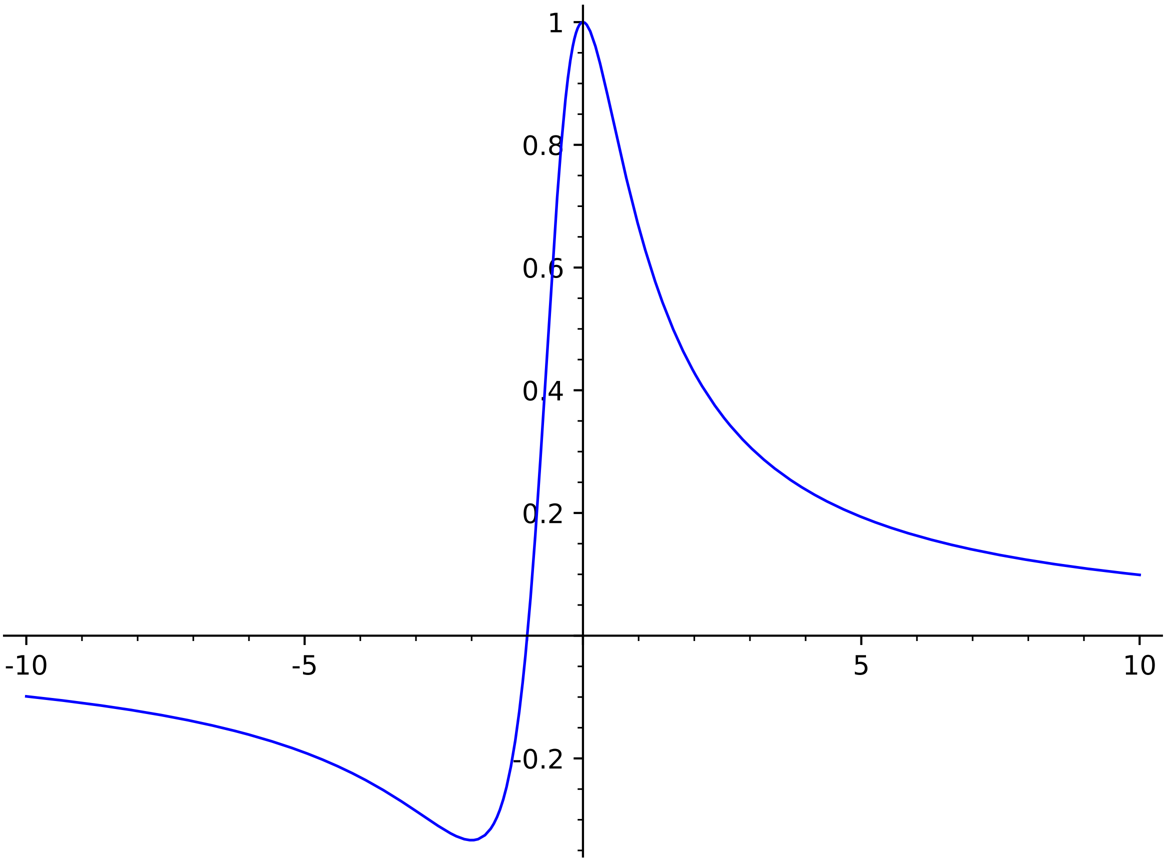
  Řešení: Pro derivaci platí

$$g'(x) = -\frac{x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Ta má kořeny -2 a 0:
Na intervalu $(-\infty, -2)$ je $g'(x) < 0$, tedy $g(x)$ je klesající.
Na intervalu $(-2, 0)$ je $g'(x) > 0$, tedy $g(x)$ je rostoucí.
Na intervalu $(0, \infty)$ je $g'(x) < 0$, tedy $g(x)$ je klesající.

Funkce $g(x)$ má v bodě -2 (globální) minimum a v bodě 0 (globální) maximum.

Řešení: Graf funkce je na Obrázku 3.10.



Obrázek 3.10: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3-1}$

3.10 Cvičení

1. **Spočítejte:**

   (a) **Taylorovu řadu v nule ($a = 0$) polynomu $p(x) = 7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$.**

   Řešení: Nejprve spočítáme derivace:

$$
\begin{aligned}
p'(x) &= \left(7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42\right)^{(1)} = 35x^4 - \frac{12}{7}x^2 + 6\pi x \\
p''(x) &= \left(7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42\right)^{(2)} = 140x^3 - \frac{24}{7}x + 6\pi \\
p'''(x) &= \left(7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42\right)^{(3)} = 420x^2 - \frac{24}{7} \\
p''''(x) &= \left(7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42\right)^{(4)} = 840x \\
p'''''(x) &= \left(7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42\right)^{(5)} = 840 \\
p''''''(x) &= \left(7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42\right)^{(k)} = 0 \qquad \text{(pro každé } k \geq 6)
\end{aligned}
$$

   Z vzorce máme:

$$
\begin{aligned}
T^{p,0}(x) &= p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n \\
&= p(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{(n)}(0)}{n!}x^n \\
&= -42 + \frac{0}{1!}x + \frac{6\pi}{2!}x^2 + \frac{-24/7}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{840}{5!}x^5 \\
&= p(x)
\end{aligned}
$$

   (b) **Taylorovu řadu v jedničce ($a = 1$) funkce $7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$.**

   Řešení: Derivace už máme spočítané. Z vzorce máme:

$$
\begin{aligned}
T^{p,1}(x) =& p(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n \\
=& \left(7 - \frac{4}{7} + 3\pi - 42\right) + \left(35 - \frac{12}{7} + 6\pi\right)(x-1) \\
&+ \frac{140 - \frac{24}{7} + 6\pi}{2!}(x-1)^2 + \frac{420 - \frac{24}{7}}{3!}(x-1)^3 \\
&+ \frac{840}{4!}(x-1)^4 + \frac{840}{5!}(x-1)^5 \\
=& p(x)
\end{aligned}
$$

   Podívejte se na grafy p a Taylorova polynomu malých stupňů v bodě 0 a 1:

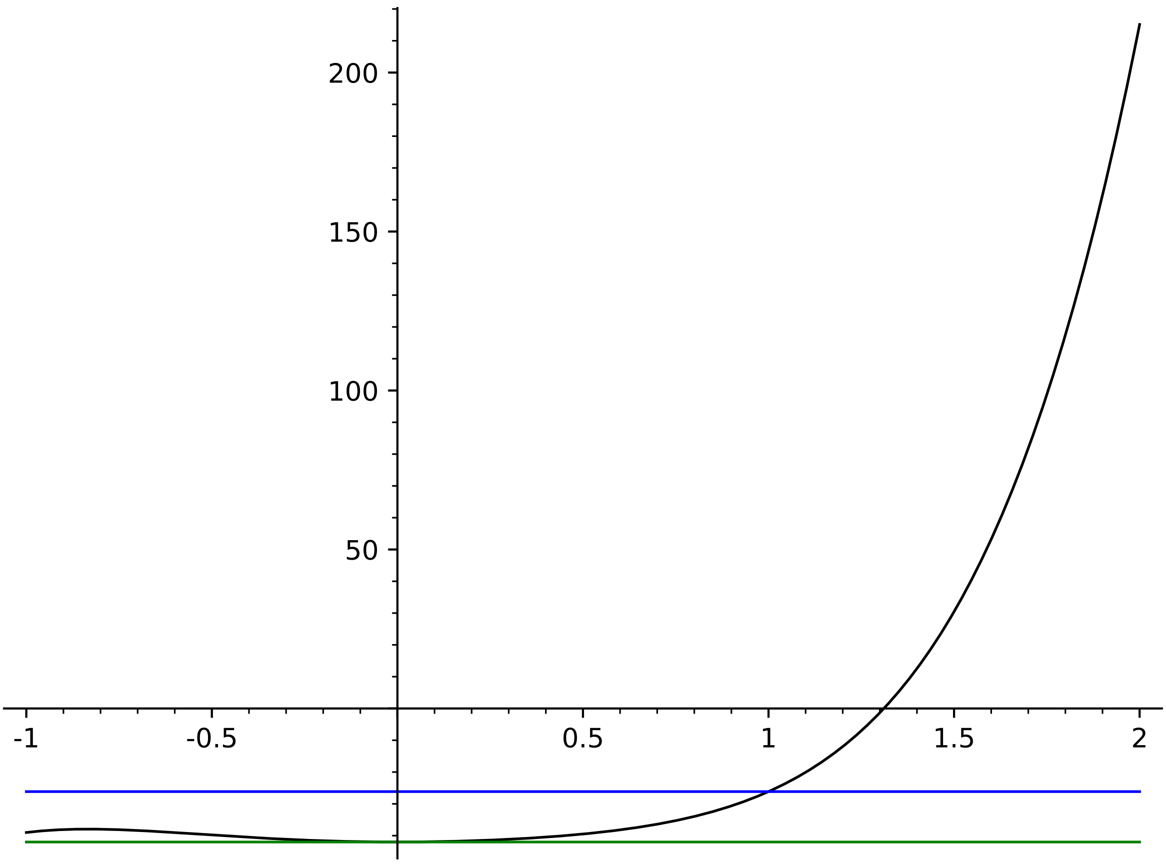
   - Stupně 0: Obrázek 3.11.
   - Stupně 1: Obrázek 3.12.

- Stupně 2: Obrázek 3.13.

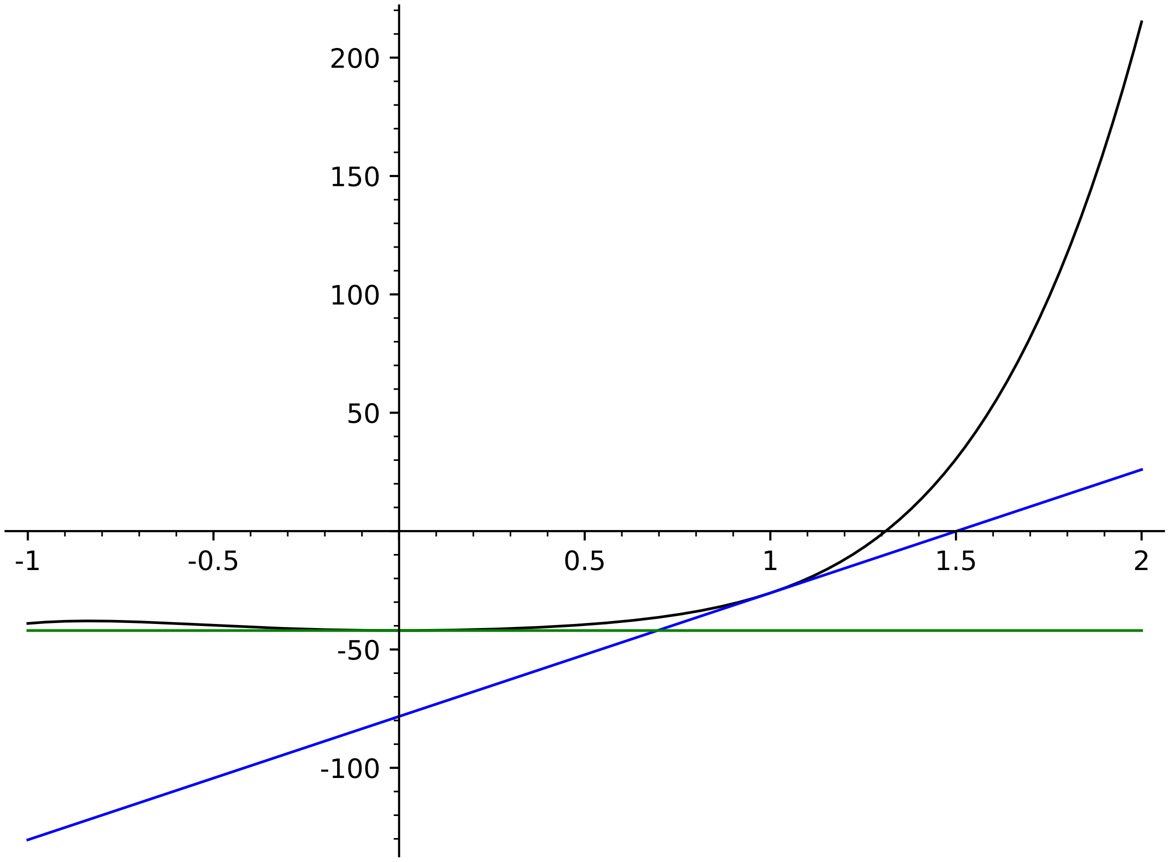
- Stupně 3: Obrázek 3.14.

- Stupně 4: Obrázek 3.15.

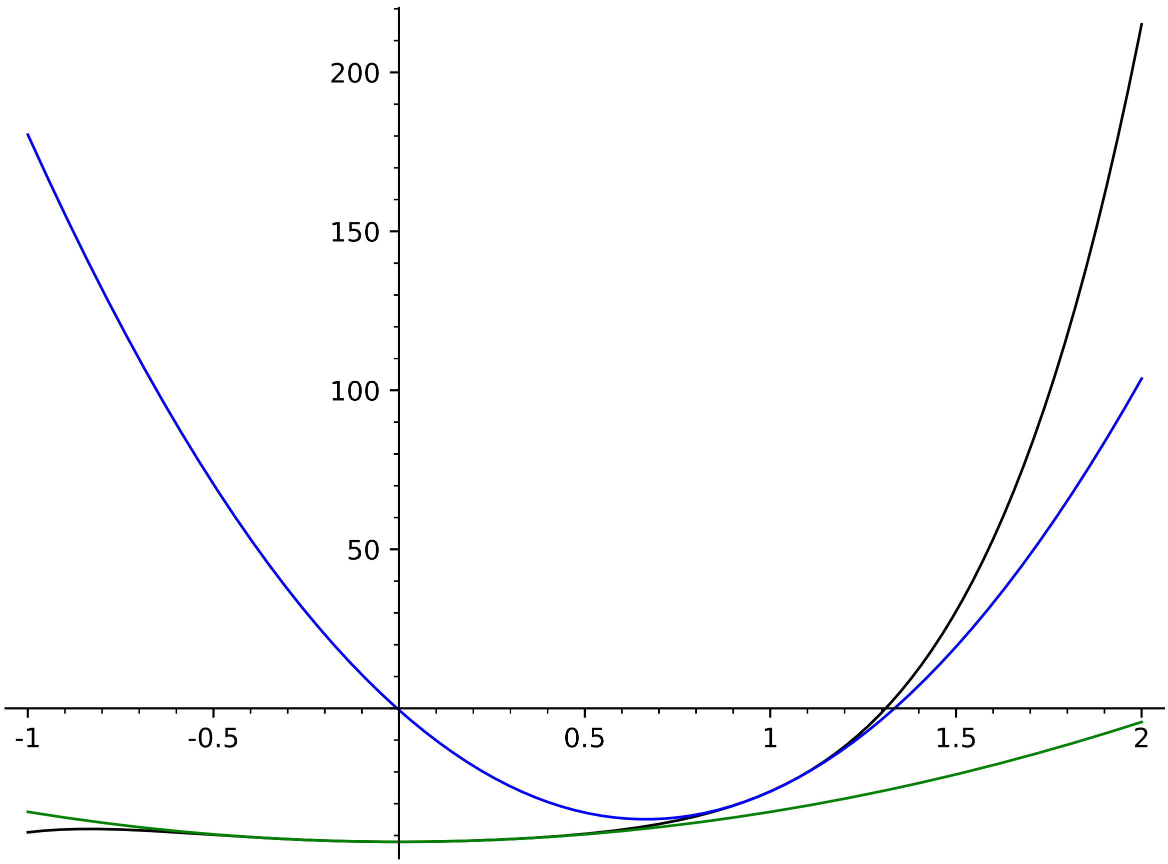
- Stupně 5: Obrázek 3.16.



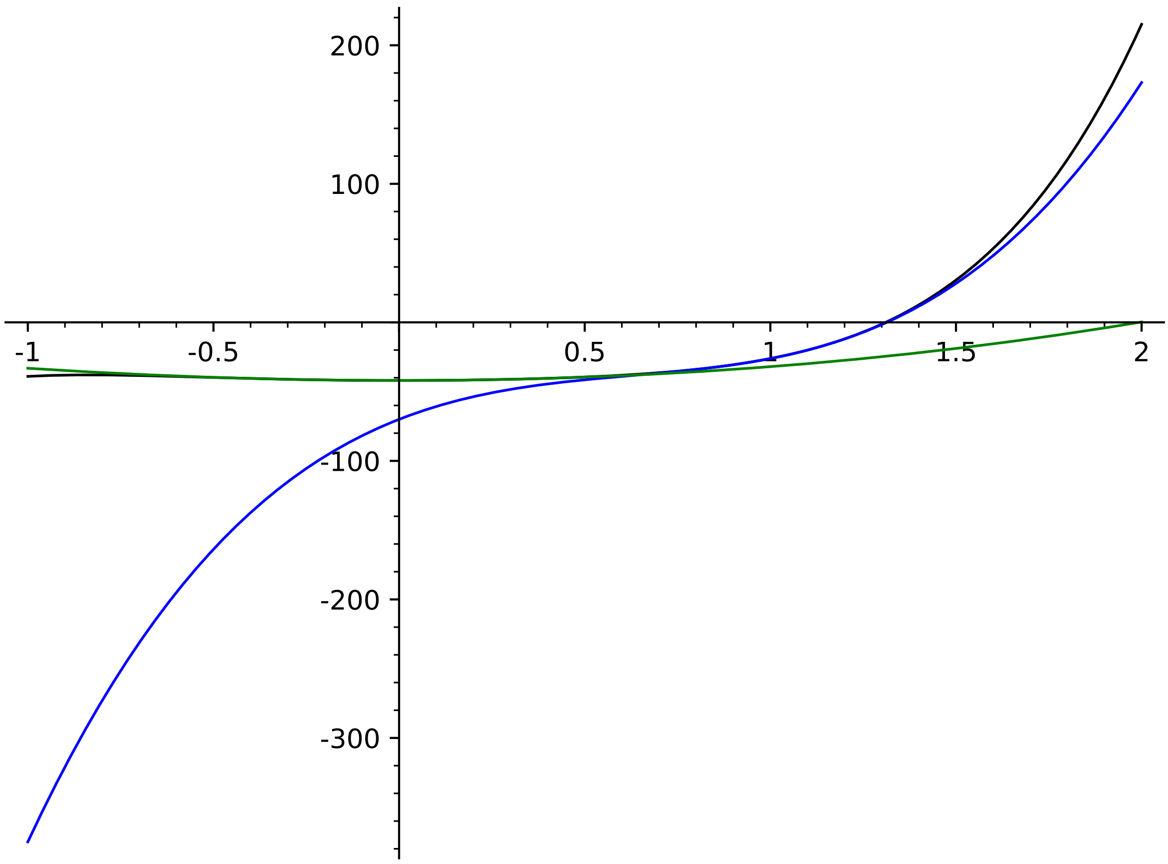
Obrázek 3.11: $p(x) = 7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$ černě, $T_0^{p,0}$ zeleně, $T_0^{p,1}$ modře.



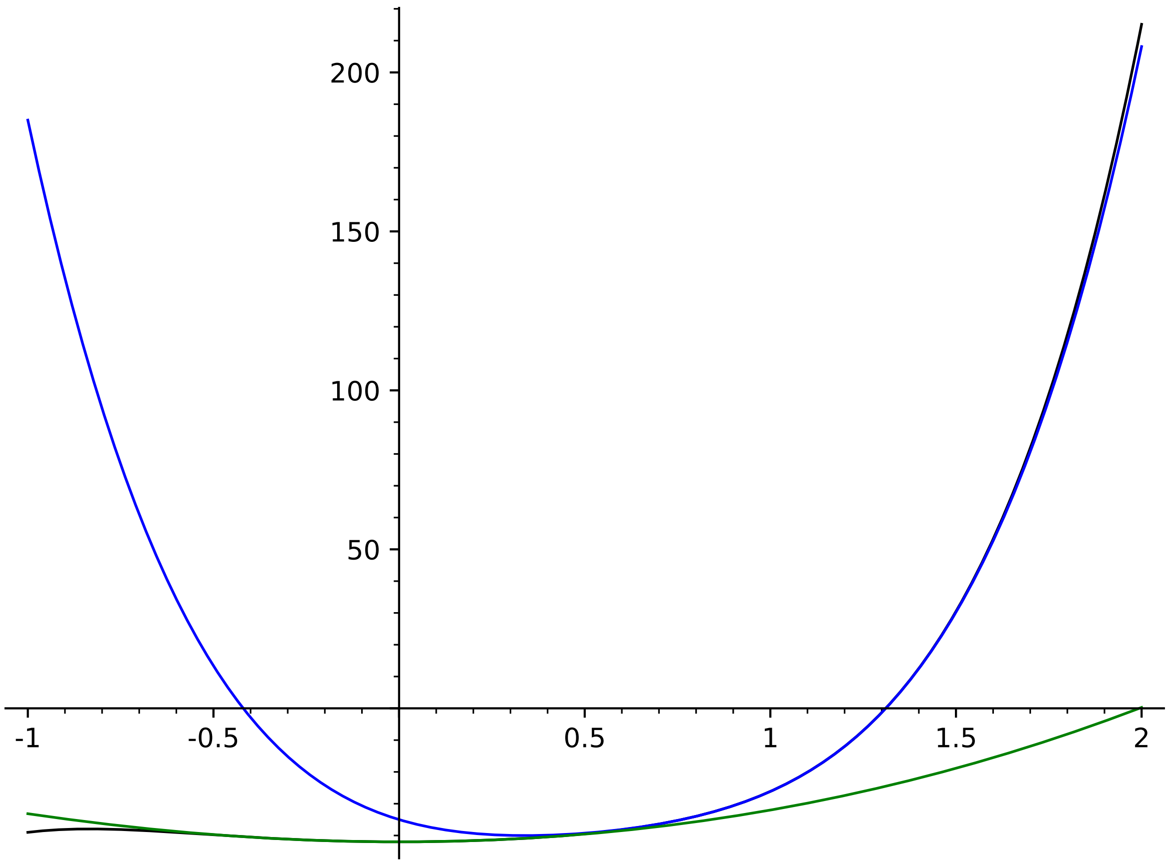
Obrázek 3.12: $p(x) = 7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$ černě, $T_1^{p,0}$ zeleně, $T_1^{p,1}$ modře.



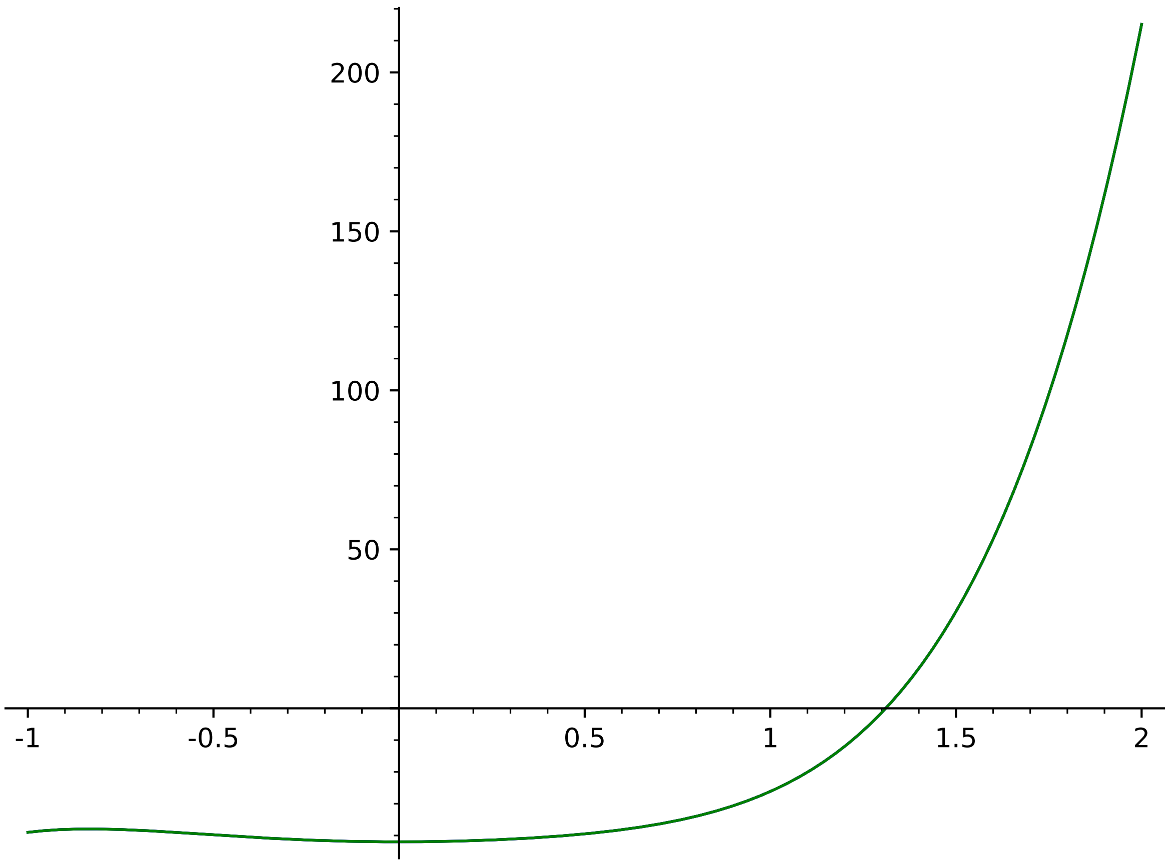
Obrázek 3.13: $p(x) = 7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$ černě, $T_2^{p,0}$ zeleně, $T_2^{p,1}$ modře.



Obrázek 3.14: $p(x) = 7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$ černě, $T_3^{p,0}$ zeleně, $T_3^{p,1}$ modře.



Obrázek 3.15: $p(x) = 7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$ černě, $T_4^{p,0}$ zeleně, $T_4^{p,1}$ modře.



Obrázek 3.16: $p(x) = 7x^5 - \frac{4}{7}x^3 + 3\pi x^2 - 42$ černě, $T_5^{p,0}$ zeleně, $T_5^{p,1}$ modře.

(c) Taylorovu řadu v nule ($a = 0$) **funkce** $\ln(1 + x)$

Řešení: Znova spočítáme prvních pár derivací a zkusíme vykoukat, jak budou vypadat další.

$$\begin{aligned} \ln(1+x)' &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \\ \ln(1+x)'' &= (-1) \cdot (1+x)^{-2} \\ \ln(1+x)''' &= (-2) \cdot (-1) \cdot (1+x)^{-3} \\ \ln(1+x)'''' &= (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (1+x)^{-4} \\ \ln(1+x)''''' &= (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) \cdot (1+x)^{-5} \end{aligned}$$

Matematickou indukcí dokážeme, že n-tá derivace má následující tvar:

$$(\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

Taylorova řada v nule tedy má tvar:

$$T^{\ln(1+x),0}(x) = \ln(1+0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(1+x))^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

$$
\begin{aligned}
&= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln(1+x))^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots
\end{aligned}
$$

(d) **Pomocí Taylorova polynomu v nule odhadněte** $\sin(0.1)$ **s přesností** 10^{-6} **(dostanete hodnotu, která je zaručeně v intervalu plus minus** 10^{-6} **od té skutečné).**

Řešení: Z minula známe Taylorovu řadu funkce sinus:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{1+2k}}{(1+2k)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots$$

Chceme vzít Taylorův polynom stupně n takový že 10^{-6} bude větší rovna absolutní hodnotě zbytku:

$$R_n^{\sin,0}(x) = \sin(x) - T_n^{\sin,0}(x)$$

Použijeme Lagrangeův odhad zbytku. Sinus je definován a má všechny derivace na intervalu $(a, b) = (0, 0.1)$. Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že:

$$R_n^{\sin,a}(b) = \frac{\sin^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Víme, že $n+1$ tá derivace $\sin x$ je $\pm \sin x$ nebo $\pm cosx$, speciálně pro každé reálné číslo platí $|\pm \sin(x)| \leq 1$ a také $|\pm \cos(x)| \leq 1$. Absolutní hodnotu zbytku tedy můžeme odhadnout jako:

$$|R_n^{\sin,a}(b)| \leq \frac{1}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Konkrétně:

$$|R_n^{\sin,0}(0.1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}(0.1)^{n+1}$$

Pro jednotlivá n snadno spočítáme chybu:

$$
\begin{aligned}
&|R_1^{\sin,0}(0.1)| \leq 0.005 \\
&|R_2^{\sin,0}(0.1)| \leq 0.0001666666666 \\
&|R_3^{\sin,0}(0.1)| \leq 4.16666666 \cdot 10^{-6} \\
&|R_4^{\sin,0}(0.1)| \leq 8.33333333 \cdot 10^{-8} < 10^{-6}
\end{aligned}
$$

Rozmyslete si, že pro n-té derivace, kde n je sudé jsme mohli použít lepší odhad

$$\forall x \in (0, b) \colon |\pm \sin(x)| \leq b.$$

Ale pro lichá n nám tohle moc nepomůže.

Rozmyslete si, že speciálně pro sinus stačí vzít první tři členy (protože člen x^4 je nulový). Tedy $T_3^{\sin,0}(0.1) \in (\sin(0.1) - 10^{-6}, \sin(0.1) + 10^{-6})$.

(e) Jak byste odhadovali přesnost Taylorova polynomu v nule pro aproximaci $\ln(1+x)$?

Řešení: Potřebujeme odhadnout

$$|(-1)^{n+1}(n-1)!(1+x)^{-n}| \leq \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \leq (n-1)!$$

Pomocí Stirlingovy formule si rozmyslete, jestli jsme v poslední nerovnosti nezahodili příliš mnoho.

Získáváme tedy o poznání horší tvar zbytku.

$$|R_n^{\ln(1+x),0}| \leq \frac{1}{n}$$

(f) Spočítejte Taylorovu řadu pro $\sqrt{1+x}$.

Řešení: Zavedeme si užitečné značení (zobecnění binomického čísla) pro $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ značíme:

$$\binom{a}{n} = \prod_{j=1}^{n} \frac{a-j+1}{j} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2) \cdot \ldots \cdot (a-(n-1))}{n!}$$

Bez tohoto zápisu by to šlo taky, ale tohle bude elegantnější zápis.

Pak spočítáme derivace:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\sqrt{1+x}\right)^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} \\
f''(x) &= \left(\sqrt{1+x}\right)^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)(1+x)^{-3/2} \\
f'''(x) &= \left(\sqrt{1+x}\right)^{(3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)(1+x)^{-5/2}
\end{aligned}$$

A dopočítáme že

$$\sqrt{1+x} = 1 + \binom{1/2}{1}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + \ldots$$

2. **Pomocí l'Hospitalova pravidla vypočítejte následující limity**

   (a) **Pro $m, n \in \mathbb{N}$ spočítejte $\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$.**

   Řešení: Máme limitu, kde je rozdíl nekonečno minus nekonečno, tedy nemůžeme rovnou použít l'Hospitalovo pravidlo (Věta 14). Převedeme proto na společný jmenovatel (to můžeme udělat, neboť v limitě se zajímáme o prstencová okolí, kde $x \neq 1$ a tedy jmenovatele jsou nenulové):

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{m - mx^n - n + nx^m}{1 - x^m - x^n + x^{m+n}}$$

   Což po dosazení $x = 1$ dává podíl nula děleno nulou. Můžeme tedy doufat, že budeme moct použít l'Hospitalovo pravidlo (potřebujeme ověřit, že limita podílů derivací skutečně existuje a navíc, že derivace jmenovatele je na nějakém *prstencovém* okolí jedničky všude nenulová).

   - **Derivace jmenovatele je na nějakém prstencovém okolí limitního bodu nenulová:** Derivace jmenovatele je

$$\left(1 - x^m - x^n + x^{m+n}\right)' = -mx^{m-1} - nx^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}$$

     V jedničce je toto sice nula, ale to nám moc nevadí. Chceme ukázat, že derivace jmenovatele je na nějakém *prstencovém* okolí jedničky nenulová! Nejjednodušší bude říct něco o monotonii a z definice derivace dostat, že na nějakém okolí jedničky je tato funkce rostoucí nebo klesající (tedy nulu může protnout jen jednou).

$$\left(1 - x^m - x^n + x^{m+n}\right)'' = -m(m-1)x^{m-2} - n(n-1)x^{n-2} + (m+n)(m+n-1)x^{m+n-2}$$

     V jedničce je hodnota

$$-m(m-1) - n(n-1) + (m+n)(m+n-1) = -m^2 + m - n^2 + n + m^2 + 2mn + n^2 - m - n = 2mn$$

     Tedy druhá derivace jmenovatele je kladná v jedničce. Tedy první derivace jmenovatele je na nějakém malém okolí jedničky rostoucí (a nulu proběhne jen v jedničce), tedy na nějakém malém prstencovém okolí jedničky je derivace jmenovatele nenulová.

   - **Limita podílu derivací existuje:** Limita podílu derivací je:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{(m - mx^n - n + nx^m)'}{(1 - x^m - x^n + x^{m+n})'} &= \lim_{x\to 1}\frac{-mnx^{n-1} + mnx^{m-1}}{-mx^{m-1} - nx^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}} \\ &= \lim_{x\to 1}\frac{mn\left(x^{m-1} - x^{n-1}\right)}{(m+n)x^{m+n-1} - mx^{m-1} - nx^{n-1}}\end{aligned}$$

     Což je opět nula děleno nulou. Neztratíme naději a zkusíme ještě jednou l'Hospitalovat (a znovu ověřit podmínky).

     – **Derivace jmenovatele je na nějakém prstencovém okolí limitního bodu nenulová (druhý l'Hospital):**

       Derivace jmenovatele je:

$$\begin{aligned}&\left((m+n)x^{m+n-1} - mx^{m-1} - nx^{n-1}\right)' = \\ &= -m(m-1)x^{m-2} - n(n-1)x^{n-2} + (m+n)(m+n-1)x^{m+n-2}\end{aligned}$$

       Zde máme jednodušší práci, protože vyšla spojitá funkce, která má navíc v jedničce hodnotu $2mn > 0$, tedy z definice spojitosti existuje prstencové okolí jedničky, na kterém je tato derivace jmenovatele vždy nenulová.

– **Limita podílu derivací existuje (druhý l'Hospital):**

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1} \frac{mn\left(x^{m-1}-x^{n-1}\right)}{(m+n)x^{m+n-1}-mx^{m-1}-nx^{n-1}} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{mn\left((m-1)x^{m-2}-(n-1)x^{n-2}\right)}{-m(m-1)x^{m-2}-n(n-1)x^{n-2}+(m+n)(m+n-1)x^{m+n-2}} \\
&= \frac{mn((m-1)-(n-1))}{2mn} \\
&= \frac{m-n}{2}
\end{aligned}$$

Tedy v druhém případě jsme skutečně mohli použít l'Hospitalovo pravidlo. To ale znamená, že i v prvním případě limita existovala a mohli jsme l'Hospitalovo pravidlo použít poprvé. Dohromady dostáváme:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right) &= \lim_{x\to 1}\frac{m-mx^n-n+nx^m}{1-x^m-x^n+x^{m+n}} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(m-mx^n-n+nx^m)'}{(1-x^m-x^n+x^{m+n})'} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{(m-mx^n-n+nx^m)''}{(1-x^m-x^n+x^{m+n})''} \\
&= \frac{m-n}{2}
\end{aligned}$$

3. **Vyšetřete průběh následujících funkcí:**

(a) $f(x) = \ln(|x| - x^2)$

Řešení: Funkce f je sudá, tedy $f(x) = f(-x)$ pro každé x z definičního oboru (ta rovnost znamená že jedna strana je definovaná právě když je ta druhá strana definovaná).

- **Definiční obor:** Logaritmus je definován jen pro kladná čísla, tedy

$$
\begin{aligned}
|x| - x^2 &> 0 \\
x &\in (-1, 0) \cup (0, 1)
\end{aligned}
$$

- **Spojitost:** Na obou intervalech je f spojitá (věta o složení spojitých funkcí a o aritmetice spojitých funkcí).

- **Limity v krajních bodech:**

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \ln(|x| - x^2) &= \lim_{x \to 0^+} \ln(x(1-x)) \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x \to 1^-} \ln(|x| - x^2) &= \lim_{x \to 1^-} \ln(x(1-x)) \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$

- **Derivace:** Pro $x > 0$

$$\left(\ln(x - x^2)\right)' = \frac{1 - 2x}{x - x^2}$$

  Derivace je definovaná na celém definičním oboru f.

- **Kde je derivace nulová:** $f'(x) = 0$ právě pro $x = 1/2$.

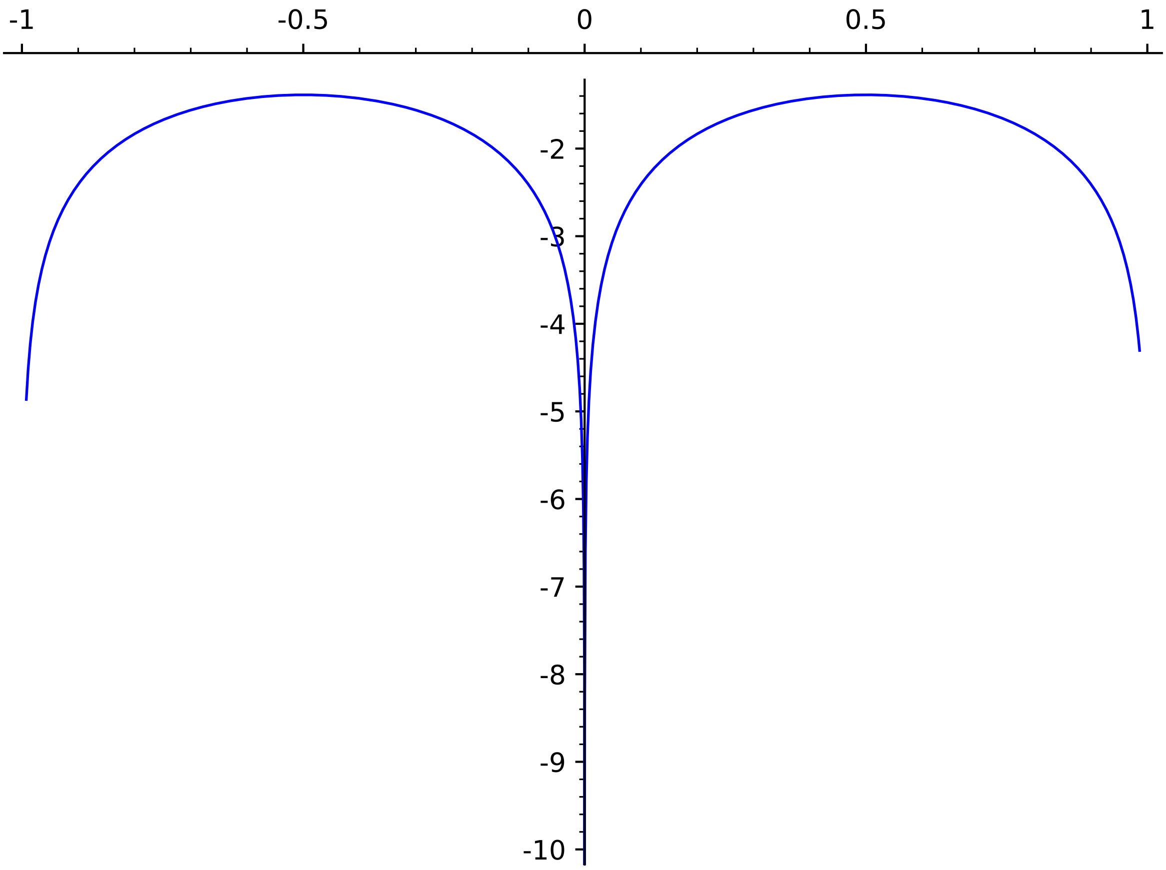
- **Extrémy:** Pro $x \in (0, 1/2)$ platí $f'(x) > 0$, tedy f je tam rostoucí.

  Pro $x \in (1/2, 1)$ platí $f'(x) < 0$, tedy f je tam klesající.

  Tedy v $x = 1/2$ je lokální maximum (které je i globálním maximem).

- **Konvexita, konkavita:** Kde je druhá derivace záporná, tam je funkce konkávní. $f''(x) = \frac{-2x^2+2x-1}{(x-1)^2x^2} = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0$

- **Graf:** Obrázek 3.17.



Obrázek 3.17: Graf funkce $\ln(|x| - x^2)$

(b) $\sin(\sin(x))$

Řešení: `https://kam.mff.cuni.cz/~sbirka/show_exercise.php?c=93&e=579`

(c) **Spoustu dalších příkladů a jejich řešení na průběh funkce najdete na stránkách Jardy Hančla:**

`https://kam.mff.cuni.cz/~jaroslav/vyuka%2019-20/Cviceni%20MA1.html`

4. **Dokažte následující užitečné odhady:**

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\colon e^x \geq 1 + x$

Řešení: Mohli bychom se kouknout na Taylorovu řadu a něco z ní zkusit vykoukat. Ale pro záporná x to spolu s lichými mocninami není tak zřejmé. Pravděpodobně bychom chtěli použít (například) Lagrangeův tvar zbytku na to, že zbytek je kladný.

Nebo můžeme zkusit jinak. Pro $x = 0$ platí rovnost $1 = e^0 = 1 + 0$.

Zkusme dokázat ekvivalentní tvrzení a to že $e^x - (1 + x) \geq 0$.

- Můžeme se kouknout na derivaci: $(e^x - (1 + x))' = e^x - 1$.
- Derivace všude existuje a je nulová jen v $x = 0$.
- Druhá derivace v nule je $(e^x - (1 + x))'' = e^x = 1$, tedy funkce je v nule konvexní.
- V nule je tedy globální minimum $e^x - (1 + x)$, tudíž všude jinde je aspoň tolik.
- Ekvivalentně jsme mohli říct, že první derivace $(e^x - (1+x))' = e^x - 1$ na intervalu $(-\infty, 0]$ je záporná a na intervalu $[0, \infty)$ je kladná. Tedy původní funkce $e^x - (1+x)$ napřed klesá a pak roste a v nule má minimum.

Spoustu dalších hezkých důkazů najdete tady: `https://math.stackexchange.com/questions/504663/simplest-or-nicest-proof-that-1x-le-ex`

(b) $\forall x \in (-1, \infty)\colon \ln(x + 1) \leq x$

(c) $\forall x \in (-1, \infty)\colon 1 + x \geq e^{\frac{x}{1+x}}$ **nebo ekvivalentně** $\forall x \in (-1, \infty)\colon \ln(1 + x) \geq \frac{x}{x+1}$

(d) $\forall x \geq 0\colon \sin(x) \leq x$

3.11 cvičení

1. **Víte, že plechovka má tvar válce a má mít objem jeden litr. Chcete použít co nejméně plechu. Jaký nejmenší povrch může taková plechovka mít?**

   Řešení:

   - **Zavedeme značení:**
     - v je výška
     - r je poloměr podstavy
     - P je plocha – dvě podstavy a plášť: $P = 2\pi r^2 + 2\pi rv$
     - $V = 1$ je objem, který máme zadaný, ze střední víme, že $V = \pi r^2 v$.
   - **Vyjádříme výšku jako funkci poloměru** (nebo naopak).

     $$v = \frac{1}{\pi r^2}$$

     kde $v, r \in [0, \infty)$.
   - **Minimalizujeme plochu jako funkci poloměru**

     $$P(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1}{\pi r^2}$$

     Derivujeme a najdeme nulové body derivace:

     $$P'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0$$

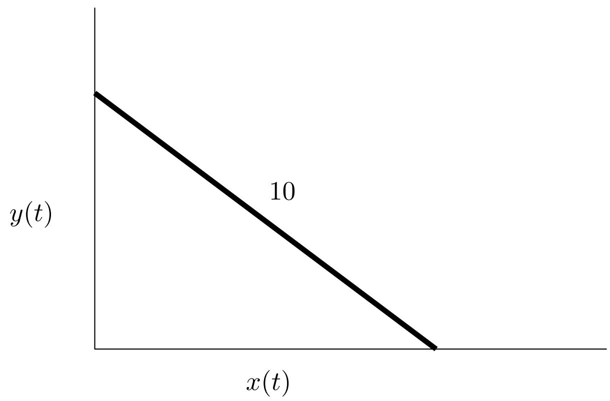
     $$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

   - **Vyšetříme krajní body a nulové body derivace** Pokud se poloměr blíží nule nebo nekonečnu, pak se plocha také blíží nekonečnu. Minimum tedy nastává pro $v = 2r$ (takových plechovek moc není).

2. **Máte žebřík dlouhý 10 metrů, který se opírá o zeď. Vršek žebříku je 6 metrů vysoko a vršek padá rychlostí 2 metry za sekundu. Jak rychle se v tomto okamžiku pohybuje spodek žebříku?**

   Řešení:

   (a) **Napřed nakreslíme situaci** – Obrázek 3.18.



Obrázek 3.18: Obrázek žebříku, $y(t)$ je vzdálenost vršku žebříku od země v čase t, $x(t)$ je vzdálenost spodku žebříku od zdi v čase t.

   (b) **Co chceme určit?** Rychlost je derivace vzdálenosti podle času, fyzikálně zapsáno dx/dt. Tedy pokud $x(t)$ je naše vzdálenost od zdi v čase t, pak chceme první derivaci funkce x.

   (c) **Co známe?**

   - Známe derivaci výšky vršku žebříku $y'(t) = -2$ (žebřík padá, tedy $y(t)$ se zmenšuje).
   - Známe Pythagorovu větu: pro každý okamžik t platí $x(t)^2 + y(t)^2 = 10^2$.
   - Tedy v tomto okamžiku platí $x(t)^2 + 6^2 = 10^2$, tedy $x(t) = 8$.

   (d) **Zderivujeme obě strany Pythagorovy věty abychom dostali derivaci $x(t)$:** Obě strany jsou funkce času t (pravá strana je konstantní funkce). Pokud jsou dvě funkce rovné, pak i jejich derivace by měly být rovné.

$$\begin{aligned}
\left(x(t)^2 + y(t)^2\right)' &= \left(100^2\right)' \\
2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) &= 0 \\
x'(t) &= \frac{-2y(t)y'(t)}{2x(t)} \\
x'(t) &= \frac{-2 \cdot 6 \cdot (-2)}{2 \cdot 8} \\
x'(t) &= \frac{3}{2}\frac{m}{s}
\end{aligned}$$

   (e) **Odpovím:** Spodek žebříku se pohybuje rychlostí 3/2 metru za sekundu směrem od zdi.

3. **Nechť funkce $f\colon I \to \mathbb{R}$ je spojitá na otevřeném intervalu I a má prvních n derivací spojitých. Navíc předpokládejme, že pro nějaké $a \in I$ platí:**

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$$

a navíc

$$f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Dokažte, že f má v a lokální extrém právě tehdy když n je sudé. Navíc

- **Pokud n je sudé a $f^{(n)}(a) > 0$, pak a je lokální minimum f.**
- **Pokud n je sudé a $f^{(n)}(a) < 0$, pak a je lokální maximum f.**

Řešení: Použijeme Taylorův polynom a Lagrangeův odhad zbytku. Jak vypadá Taylorův polynom stupně n? Prvních $n-1$ derivací je nulových, takže

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Předpokládejme, že $f^{(n)}(a) > 0$ (druhý bod je podobný) n-tá derivace je spojitá, takže víme že na nějakém otevřeném okolí $a \in J \subseteq I$ je pořád $f^{(n)}(b) > 0$ pro každé $b \in J$.

Lagrangeův odhad zbytku dává že pro libovolné $x \in J$ existuje c ostře mezi x a a (buď $x < c < a$ nebo $a < c < x$) takové, že

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$$

$$f(x) - f(a) = \frac{> 0}{n!}(x-a)^n > 0$$

Jelikož $\operatorname{sgn}(f^{(n)}(a)) = \operatorname{sgn}(f^{(n)}(c))$, tak vidíme, že právě když n je sudé, tak $f(x) > f(a)$.

4. **Najdete k následujícím funkcím jejich primitivní funkce (pro danou $f(x)$ najděte $F(x)$ takovou, že $F'(x) = f(x)$).**

   (a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

   Řešení: Uhodneme, že $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + c$ (kde $c \in \mathbb{R}$).

   (b) $f(x) = e^x - e^{-x}$

   Řešení: $F(x) = e^x + e^{-x} + c$

   (c) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$

   Řešení: $F(x) = -\cos(x) + \sin(x) + c$

   (d) $f(x) = xe^{-x^2}$

   Řešení: Vzpomeneme si na derivaci složené funkce $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$. Pokud obě strany integrujeme, dostáváme:

   $$f(g(x)) = \int (f(g(x)))'\, dx = \int f'(g(x))g'(x)dx$$

   Chceme tedy chytře uhodnout vnitřní a vnější funkci. Nechť $f'(x) = e^x$ a $g(x) = -x^2$. Pak primitivní funkce k $f'(g(x))g'(x) = e^{-x^2}(-2x)$ je funkce $f(g(x)) = e^{-x^2}$.

   Snadno tedy dopočítáme, že

   $$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

   (e) $f(x) = x\sin(x)$

   Řešení: Vzpomeneme si na pravidlo o derivaci součinu:

   $$(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

   Zintegrováním obou stran a převedením dostaneme:

   $$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

   Tomuhle se říká integrace per-partes (po částech).

   $$\int x\sin(x)dx = x(-\cos(x)) - \int -\cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

   (f) $f(x) = xe^x$

   Řešení:

   $$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c = (x-1)e^x + c$$

   (g) $f(x) = \ln(x)$

   Řešení:

   $$\int \ln(x) \cdot 1 dx = x\ln(x) - \int 1 dx = x\ln(x) - x + c$$

3.12 cvičení

1. **Najděte primitivní funkci:**

(a) $\int \frac{1}{x+\alpha}\ dx$

Řešení: Jak dobře víme, funkce $\frac{1}{x}$ má primitivní funkci $\ln|x|$ (jinak řečeno derivace logaritmu absolutní hodnoty je hledaný zlomek

$$(\ln(|x|))' = \frac{1}{x}$$

na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Použijeme větu o substituci (Věta 16), kde vnější funkce je logaritmus a vnitřní funkce $x + \alpha$. Položme

$$\begin{aligned} t &= x + \alpha \\ dt &= \ dx \end{aligned}$$

Kde $x \neq -\alpha$, tedy v původním $t \neq 0$ (protože $\ln(|t|)$ není v nule definován).

Což můžeme brát jako zkrácený zápis faktu, že

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = F(\varphi(x)) + c$$

kde nahradíme

$$\begin{aligned} t &= \varphi(x) \\ dt &= \varphi'(x)\ dx \end{aligned}$$

v předchozím výrazu tedy dostaneme:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = \int f(t)\ dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c$$

Předchozí zápis se často používá. Formálně jsme si však tuto změnu nedefinovali, formálně bychom chtěli říct, že používáme větu o substituci. Na druhou stranu je to často používaná „pomůcka.“ Speciálně v našem případě jsme použili:

$$\begin{aligned} t &= x + \alpha \\ dt &= t'\ dx = (x+\alpha)'\ dx = \ dx \end{aligned}$$

Tak jako tak dostáváme:

$$\int \frac{1}{x+\alpha}\ dx = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| = \ln|x+\alpha| + C$$

na intervalu $(-\infty, -\alpha)$ a dokonce i na intervalu $(-\alpha, \infty)$.

(b) $\int \frac{1}{(x+\alpha)^2}\ dx$

Řešení: Použijeme stejnou substituci

$$\begin{aligned} t &= x + \alpha \\ dt &= \ dx \end{aligned}$$

a dostáváme:

$$\int \frac{1}{(x+\alpha)^2}\ dx = \int \frac{1}{t^2}\ dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x+\alpha} + C$$

Na intervalu $(-\infty, -\alpha)$ i na $(-\alpha, \infty)$.

Pro připomenutí, obecně (pro $k > 1$)

$$\int \frac{1}{x^k}\, dx = -\frac{1}{(k-1)x^{k-1}} + C$$

na intervalu $(-\infty, 0)$ i na $(0, \infty)$.

(c) $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx$

Řešení: Podíváme se do obsáhlejších tabulek derivací a zjistíme, že

$$(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$$

Poznamenejme, že tento integrál se velmi často hodí, když rozkládáme na parciální zlomky (viz cvičení na parciální zlomky).

2. **Najděte primitivní funkci:**

   (a) $\int \frac{1}{1-x^2}\,dx$

   Řešení: Myšlenkou je rozložit podíl dvou polynomů na součet „jednoduchých" zlomků. Za „jednoduché" zlomky považujeme ty, které už umíme integrovat:

   - $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(|x|)$$
   - Pro $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$:
     $$\int \frac{1}{x^k}\,dx = -\frac{1}{(k-1)x^{k-1}} + C$$
   - Z přednášky:
     $$I_n(x) = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$$
     pak
     $$\begin{aligned} I_1(x) &= \arctan(x) \\ I_{n+1} &= \frac{1}{2n(1+x^2)^n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right) I_n \end{aligned}$$
   - Poslední případ, který uvedeme:
     $$\int \left(\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}\right)^j = \frac{I_j(y(x))}{\eta^{2j-1}}$$
     kde $\eta = \sqrt{\gamma - \beta^2/4}$ a $y(x) = \frac{x}{\eta} + \frac{\beta}{2\eta}$.
   - Zbytek případů dostáváme pomocí více či méně jednoduchých substitucí.

   Naštěstí se můžeme opřít o následující fakt (všechno podrobněji například ve skriptech doc. Klazara `https://kam.mff.cuni.cz/~klazar/maII.pdf`): každý polynom tvaru

   $$P(x) = x^k + \sum_{j=0}^{k-1} p_j x^j$$

   kde $p_j \in \mathbb{R}$ se dá rozložit:

   $$P(x) = \prod_{j=1}^{\ell} (x-\alpha_j)^{q_j} \prod_{j=1}^{m} (x^2+\beta_j x+\gamma_j)^{r_j}$$

   kde $q_j, r_j \in \mathbb{N}$.

   Pomocí tohoto tvrzení můžeme rozložit jmenovatel na předchozí tvar a pak vyjádřit zlomek jako součet jednoduchých zlomků.

   Zpátky k našemu původnímu příkladu:

   Nejprve rozložíme zlomek na jednodušší části, tzv. parciální zlomky

   $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x}$$

   (všimněte si, že v čitateli máme jen konstanty, to je dáno tím, že čitatel a jmenovatel musí být nesoudělné).

Kde α, β dopočteme zpětným převedením na společného jmenovatele a spočtením čitatele

$$\frac{\alpha}{1-x} + \frac{\beta}{1+x} = \frac{\alpha(1+x)+\beta(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{(\alpha+\beta)+x(\alpha-\beta)}{1-x^2} = \frac{1}{1-x^2}$$

s toho dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} \alpha+\beta &= 1 \\ \alpha-\beta &= 0 \end{aligned}$$

s řešením $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$.

Takže

$$\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} \right) dx = \frac{1}{2}(\ln|x+1| - \ln|x-1|) + C$$

(b) $\int \frac{x-2}{(x-1)^2}\, dx$

Řešení: Opět rozložíme na parciální zlomky

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{(x-1)^2} &= \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{(x-1)^2} \\ &= \frac{\alpha(x-1)+\beta}{(x-1)^2} = \frac{(\beta-\alpha)+\alpha x}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

a porovnáním s původním čitatelem dostáváme $\alpha = 1$, $\beta = -1$

$$\int \frac{x-2}{(x-1)^2} = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = \ln|x-1| - \frac{-1}{x-1} + C$$

(c) $\int \frac{3}{x^2+2x+4}\, dx$

Řešení: Tady rozklad nelze provést, neboť jmenovatel je ireducibilní polynom nad $\mathbb{R}$ (nemá reálné kořeny). Vyzkoušíme si tedy jednodušší verzi posledního „kuchařkového“ zlomku.

Situace je podobná jako u funkce $\frac{1}{1+x^2}$, tak to zkusíme využít.

Nejprve upravíme jmenovatele

$$x^2+2x+4 = x^2+2x+1+3 = (x+1)^2+3 = 3\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right)$$

takže

$$\int \frac{3}{x^2+2x+4}\, dx = \int \frac{3}{3((\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1)}\, dx$$

a substituce

$$\begin{aligned} t &= \frac{x+1}{\sqrt{3}} \\ dt &= \frac{1}{\sqrt{3}}\, dx \end{aligned}$$

dává

$$\int \frac{3}{3((\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1)}\, dx = \int \frac{1}{t^2+1}\sqrt{3}\, dt = \sqrt{3}\arctan t = \sqrt{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$$

3. **Najděte primitivní funkci:**

(a) $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ dx$

Řešení: Zavedeme substituci:

$$\begin{aligned} t &= e^x + e^{-x} \\ dt &= e^x - e^{-x}\ dx \end{aligned}$$

a dostaneme:

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\ dx = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| = \ln(e^x + e^{-x}) + C$$

(b) $\int \arctan x\ dx$

Řešení: Nejprve per partes

$$\begin{array}{rlrl} f = & \arctan x & g' = & 1 \\ f' = & \frac{1}{1+x^2} & g = & x \end{array}$$

$$\int \arctan x\ dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\ dx = \dots$$

a teď substituce

$$\begin{aligned} t &= 1 + x^2 \\ dt &= 2x\ dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2}\ dx &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2}\ dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t}\ dt \\ &= \frac{1}{2} \ln(t) \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C \end{aligned}$$

Tedy dostáváme:

$$\int \arctan x\ dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C$$

(c) $\int \cos^2(x)\ dx$

Řešení: Nejprve per partes

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) \\ F(x) &= \sin(x) \\ g(x) &= -\sin(x) \\ G(x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

nám dá:

$$\int \cos^2(x)\ dx = \sin(x)\cos(x) - \int \sin(x)(-\sin(x))\ dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \sin(x)\cos(x) + \int (1-\cos^2(x))\ dx \\
&= \sin(x)\cos(x) + x + c - \int \cos^2(x)\ dx
\end{aligned}
$$

To se zdá, že jsme si moc nepomohli. Mohli jsme zkusit znova per partesit, ale dostali bychom to samé.

Ale počkat! Víme, že integrál existuje ($\cos^2(x)$ je spojitá funkce), takže můžeme psát:

$$
\begin{aligned}
2\int \cos^2(x)\ dx &= \sin(x)\cos(x) + x + C \\
\int \cos^2(x)\ dx &= \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x) + C
\end{aligned}
$$

Poznamenejme, že tohle je možná jeden z nejdůležitějších integrálů (jak uvidíme příště). Navíc tato metoda se v počítání integrálů pomocí per partes hojně využívá (úpravami dostanu stejný integrál, tak ho pak dopočtu).

(d) $\int \sqrt{1-x^2}\ dx$

Řešení: Začneme překvapivou substitucí

$$
\begin{aligned}
x &= \sin t \\
dx &= \cos t\ dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int \cos t\sqrt{1-\sin^2 t}\ dt \\
&= \int \cos t\sqrt{\cos^2 t}\ dt \\
&= \int \cos^2 t\ dt \\
&= \frac{1}{2}\,(t + \sin t\cos t) \\
&= \frac{1}{2}\left(t + \sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + C
\end{aligned}
$$

V posledním kroce jsme vyjádřili t pomocí x, respektive $\sin(t)$ pomocí $\arcsin(x)$.

Tohle byl příklad „zpětného“ použití věty o substituci.

(e) $\int \tan^2 x\ dx$

Řešení: Překvapivě nezačneme žádnou substitucí

$$
\begin{aligned}
\int \tan^2 x\ dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ dx \\
&= \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ dx \\
&= \int \frac{1}{\cos^2 x}\ dx - \int 1\ dx \\
&= \tan x - x + C
\end{aligned}
$$

4. **Integrujte $\int \frac{1}{\sin x}\ dx$.**

Řešení: Vyzkoušíme hned tři způsoby (každý ukazuje užitečnou techniku).

- **Spousta substitucí:** Začneme jednoduchou substitucí

$$\begin{aligned} x &= 2t \\ dx &= 2\ dt \end{aligned}$$

Ta nám převede integrál na trochu jiný:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x}\ dx &= \int \frac{1}{\sin(2t)} \cdot 2\ dt \\ &= \int \frac{1}{2\sin t \cos t} \cdot 2\ dt \\ &= \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin t \cos t}\ dt \\ &= \int \frac{\sin^2 t}{\sin t \cos t}\ dt + \int \frac{\cos^2 t}{\sin t \cos t}\ dt \end{aligned}$$

A zase dvě zpětné substituce. Napřed:

$$\begin{aligned} u &= \cos t \\ du &= -\sin t\ dt \end{aligned}$$

dává

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^2(t)}{\sin(t)\cos(t)}\ dt &= -\int \frac{-\sin(t)}{\cos(t)}\ dt \\ &= -\int \frac{1}{u}\ du \\ &= -\ln(|u|) + c \end{aligned}$$

A pak:

$$\begin{aligned} v &= \sin t \\ dv &= \cos t\ dt \end{aligned}$$

dává

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 t}{\sin t \cos t}\ dt &= \int \frac{\cos(t)}{\sin(t)}\ dt \\ &= \int \frac{1}{v}\ dv \\ &= \ln(|v|) \end{aligned}$$

Dohromady dostáváme po zpětné substituci:

$$\int \frac{1}{\sin x}\ dx = -\ln|u| + \ln|v| = \ln\left|\frac{v}{u}\right| = \ln\left|\frac{\sin t}{\cos t}\right| = \ln|\tan t| = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

Schválně zkuste zderivovat výsledek (pro zkoušku).

- **Superdivná substituce:** Tato varianta je založena na velmi podivné substituci (a související úpravě)

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\ dt &= \left(\frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \right) \, dx = -\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \, dx \end{aligned}$$

Která nám dá:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin x} \, dx &= \int \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} \, dx \\ &= \int \frac{\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} \, dx \\ &= -\int \frac{1}{t} \, dt \\ &= -\ln |t| + c \\ &= -\ln \left| \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right| + c \\ &= \ln \left| \frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right|^{-1} + c \end{aligned}$$

V porovnání s předchozím výsledkem vypadá řešení jinak, ale to je jen jiný zápis téhož

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^{-1} &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} \\ &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{1 + \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} \\ &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin^2(x/2) + \cos^2(x/2) + \cos^2(x/2) - \sin^2(x/2)} \\ &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{2 \cos^2(x/2)} \\ &= \frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \\ &= \tan(x/2) \end{aligned}$$

- **Weierstrassova substituce:** Velmi silný nástroj, který funguje, když vše ostatní selže

$$\begin{aligned} t &= \tan \left(\frac{x}{2} \right) \\ dt &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(x/2)} \, dx \end{aligned}$$

Vyjádříme

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \sin(x/2) \cos(x/2) \\ &= 2 \frac{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{\frac{1}{\cos^2(x/2)}} \\ &= 2 \frac{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{\frac{\cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\frac{\frac{\sin(x/2)}{\cos(x/2)}}{1+\frac{\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}} \\
&= 2\frac{\tan(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} \\
&= \frac{2t}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

Podobně vyjádříme

$$\cos x = \ldots = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Konečně dostáváme

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\ dt$$

Nyní se vrátíme k původnímu příkladu

$$\int \frac{1}{\sin x}\ dx = \int \frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}\ dt = \int \frac{1}{t}\ dt = \ln|t| = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

3.13 cvičení

1. **Spočítejte**

   (a) primitivní funkci $\int \sin(x)\ dx$,

   Řešení: Primitivní funkce k $\sin(x)$ je $-\cos(x) + C$.

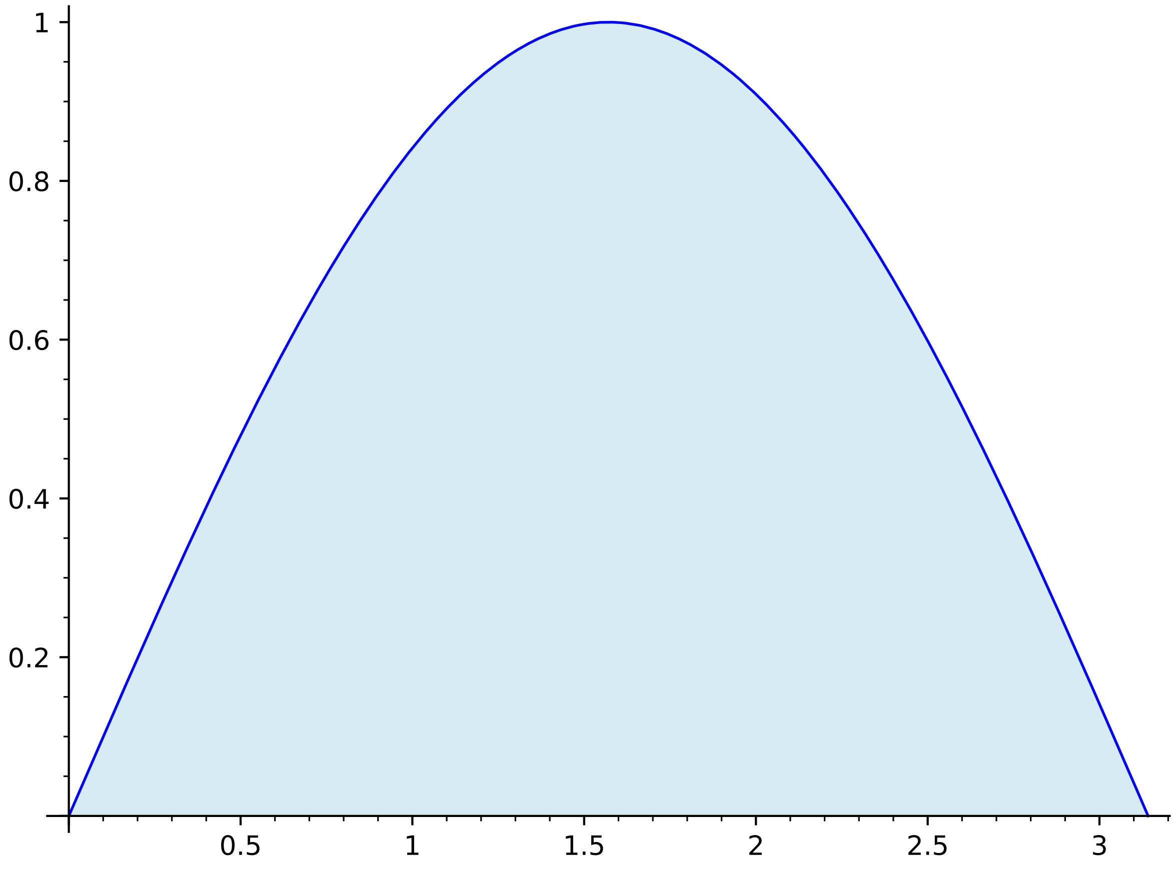
   (b) určitý integrál $\int_0^\pi \sin(x)\ dx$,

   Řešení: Využijeme definice Newtonova integrálu, která říká, že pokud F je na $[a, b]$ primitivní funkce k f, pak

$$\int_a^b f(x)\ dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(x)\ dx &= [-\cos(x) + C]_0^\pi \\ &= ((-\cos(\pi) + C) - (-\cos(0) + C)) \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) \\ &= 2\end{aligned}$$

   Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.19.



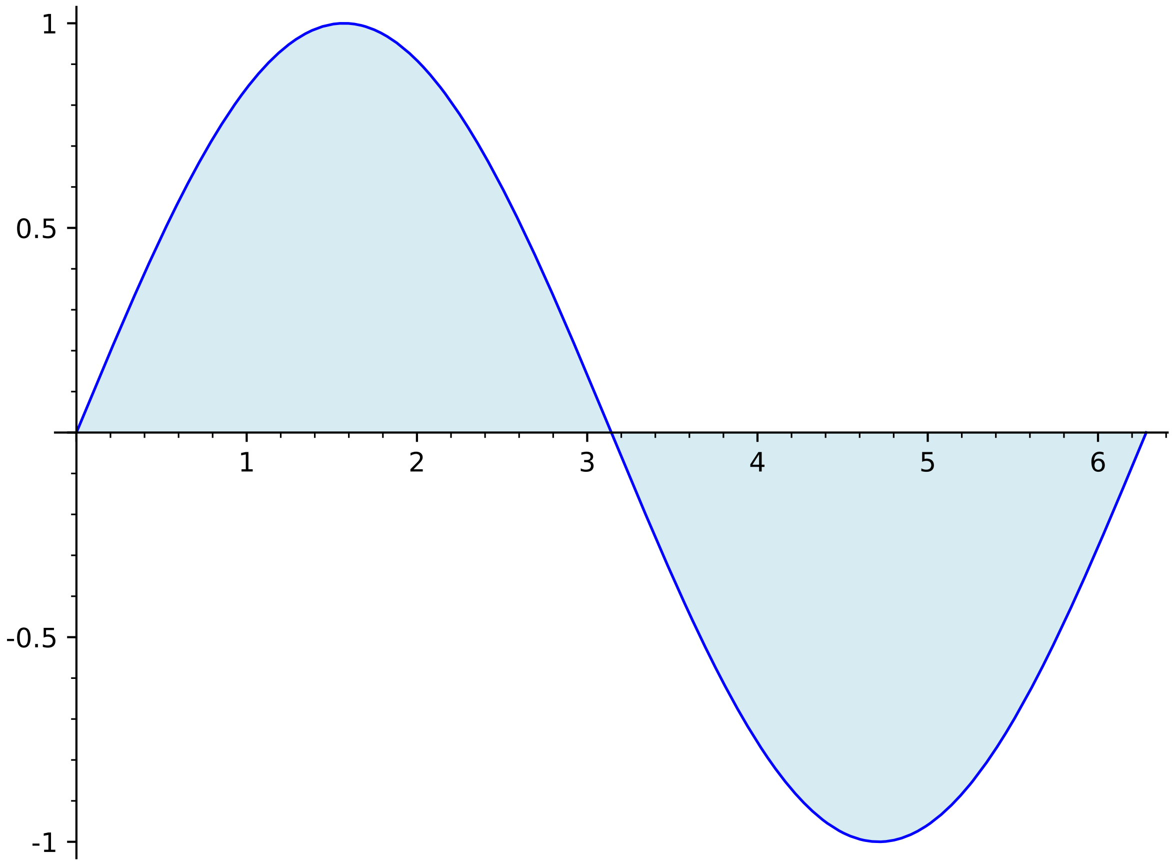
Obrázek 3.19: $\int_0^\pi \sin(x)\ dx = 2$

(c) určitý integrál $\int_0^{2\pi} \sin x \ dx$.

Řešení: Obdobně:

$$\int_0^{2\pi} \sin x \ dx = -[\cos x]_0^{2\pi} = -(\cos(2\pi) - \cos 0) = -(1-1) = 0$$

Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.20.



Obrázek 3.20: $\int_0^{2\pi} \sin(x) \ dx = 2 - 2 = 0$

2. **Spočtěte určitý integrál**

(a) $\int_0^1 (x^2+x+3)\ dx$,

Řešení:

$$\int_0^1 (x^2+x+3)\ dx = \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^1 = \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+3 = \frac{23}{6}$$

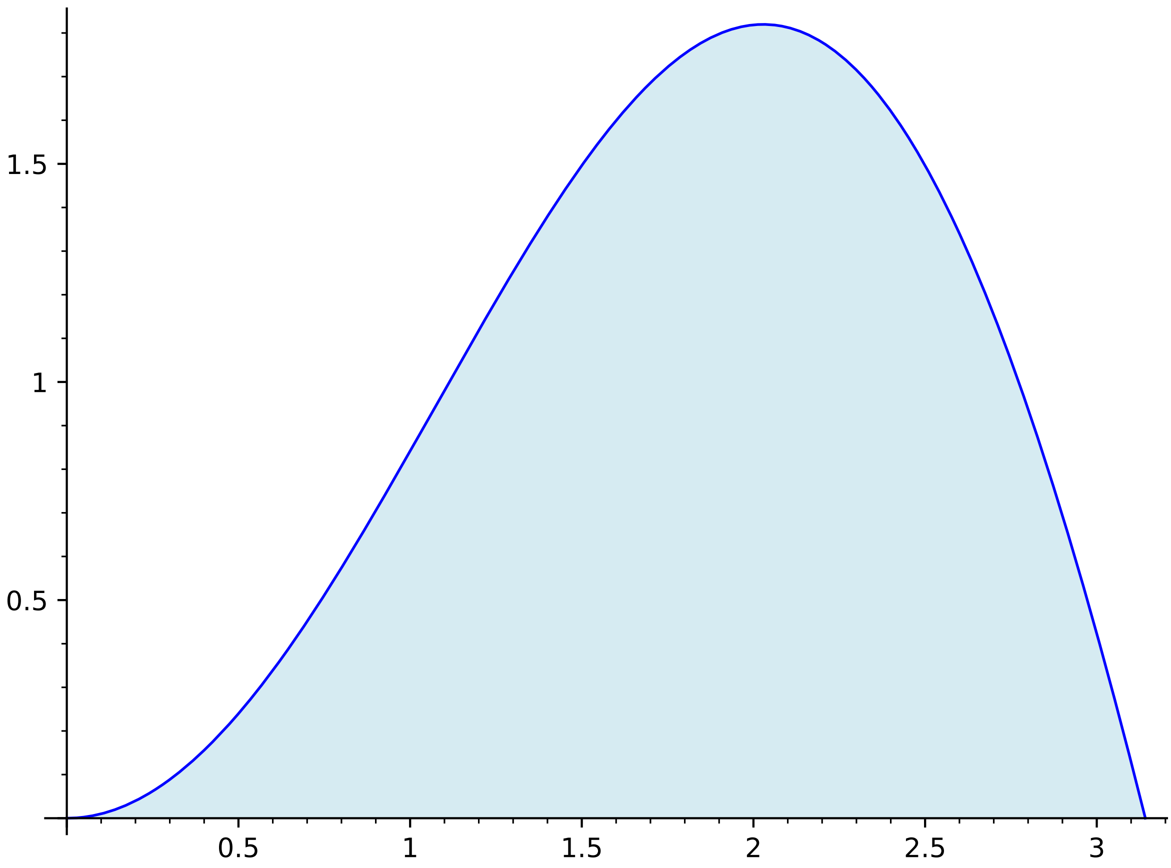
(b) $\int_0^\pi x\sin x\ dx$,

Řešení: Pomocí integrace per partes určíme primitivní funkci

$$\int x\sin x\ dx = -x\cos x - \int(-\cos x)\ dx = -x\cos x + \int \cos x\ dx = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\int_0^\pi x\sin x\ dx = [-x\cos x+\sin x]_0^\pi = -\pi\cdot(-1)+0-(0\cdot 1+0) = \pi$$

Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.21.



Obrázek 3.21: $\int_0^\pi x\sin x\ dx = \pi$

(c) $\int_1^2 xe^{x^2}\ dx$,

Řešení: Opět můžeme určit primitivní funkci a dosadit meze, ukážeme si ale počítání rovnou s mezemi (rozdíl se projeví kvůli substituci).

Volíme substituci:

$$t = x^2$$
$$dt = 2x\ dx$$

$$\begin{aligned}\int_1^2 xe^{x^2}\ dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 e^{x^2}2x\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_1^4 e^t\ dt \\ &= \frac{1}{2}[e^t]_1^4 \\ &= \frac{e^4 - e}{2}\end{aligned}$$

Obecně pokud volíme substituci:

$$t = \varphi(x)$$
$$dx = \varphi'(x)\ dx$$

pak máme:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\ dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\ dt$$

(d) $\int_0^{\pi/4} \tan x\ dx$**.**

Řešení: Volíme substituci:

$$t = \cos(x)$$
$$dt = -\sin(x)\ dx$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \tan x\ dx &= -\int_0^{\pi/4} \frac{-\sin x}{\cos x}\ dx \\ &= -\int_{\cos(0)}^{\cos(\pi/4)} \frac{1}{t}\ dt \\ &= -\int_1^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{t}\ dt \\ &= \int_{1/\sqrt{2}}^1 \frac{1}{t}\ dt \\ &= [\ln|t|]_{1/\sqrt{2}}^1 \\ &= \ln(1) - \ln(1/\sqrt{2}) \\ &= -\ln(1/\sqrt{2}) \\ &= \ln(\sqrt{2}) \\ &= \frac{\ln 2}{2}\end{aligned}$$

3. **Spočtěte určitý integrál**

(a) $\int_{-1}^{1} |x|\ dx$,

Řešení: Absolutní hodnota se nedá pěkně integrovat, tak si integrál rozdělíme na dva následující větou: pro libovolná $a < b < c \in \mathbb{R}$ platí následující rovnost (pokud obě strany dávají smysl)

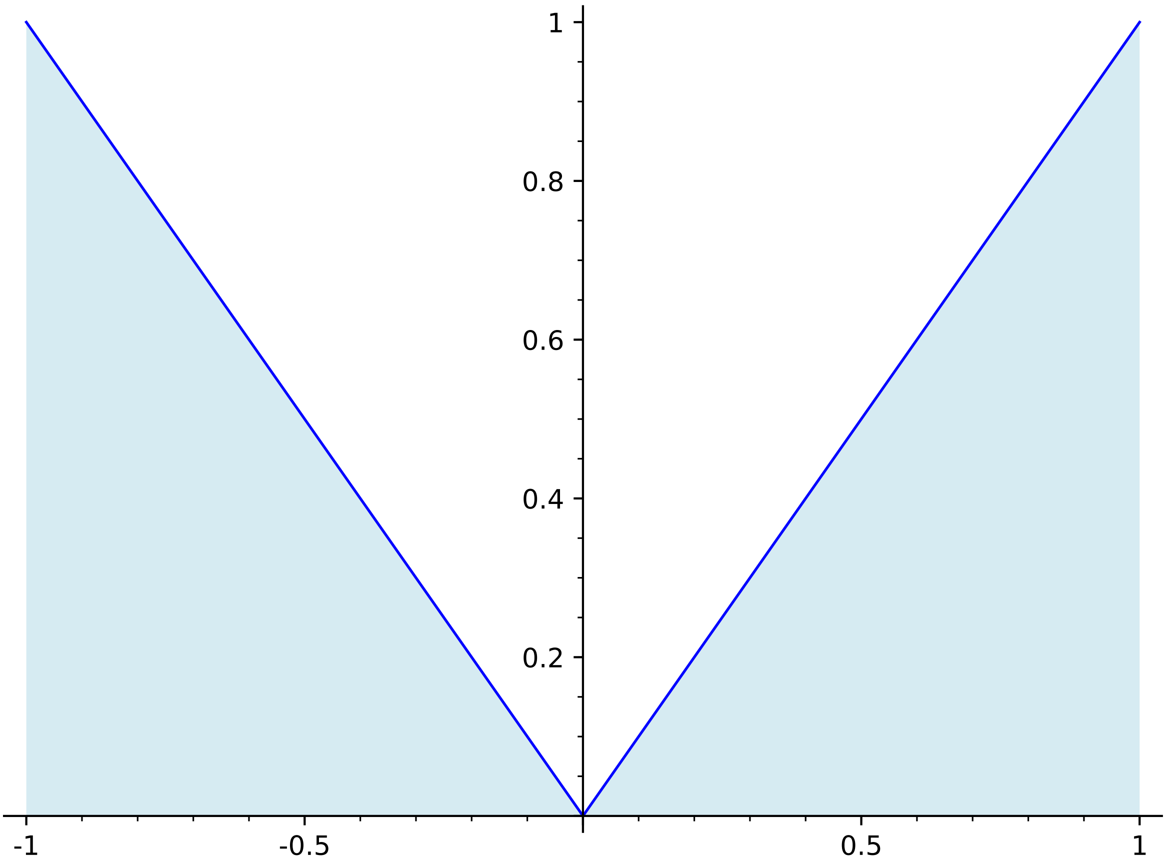
$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$$

Použití je následovné: absolutní hodnota je spojitá funkce, tedy daný integrál existuje, obdobně $\pm x$:

$$\int_{-1}^{1} |x|\ dx = \int_{-1}^{0} (-x)\ dx + \int_{0}^{1} x\ dx = -\int_{-1}^{0} x\ dx + \int_{0}^{1} x\ dx =$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = -(0 - 1/2) + (1/2 - 0) = 1$$

Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.22.



Obrázek 3.22: $\int_{-1}^{1} |x|\ dx = 1$

(b) $\int_{1/e}^{e} |\ln x|\ dx$,

Řešení: Primitivní funkce k funkci $\ln(x)$ (bez absolutní hodnoty) je

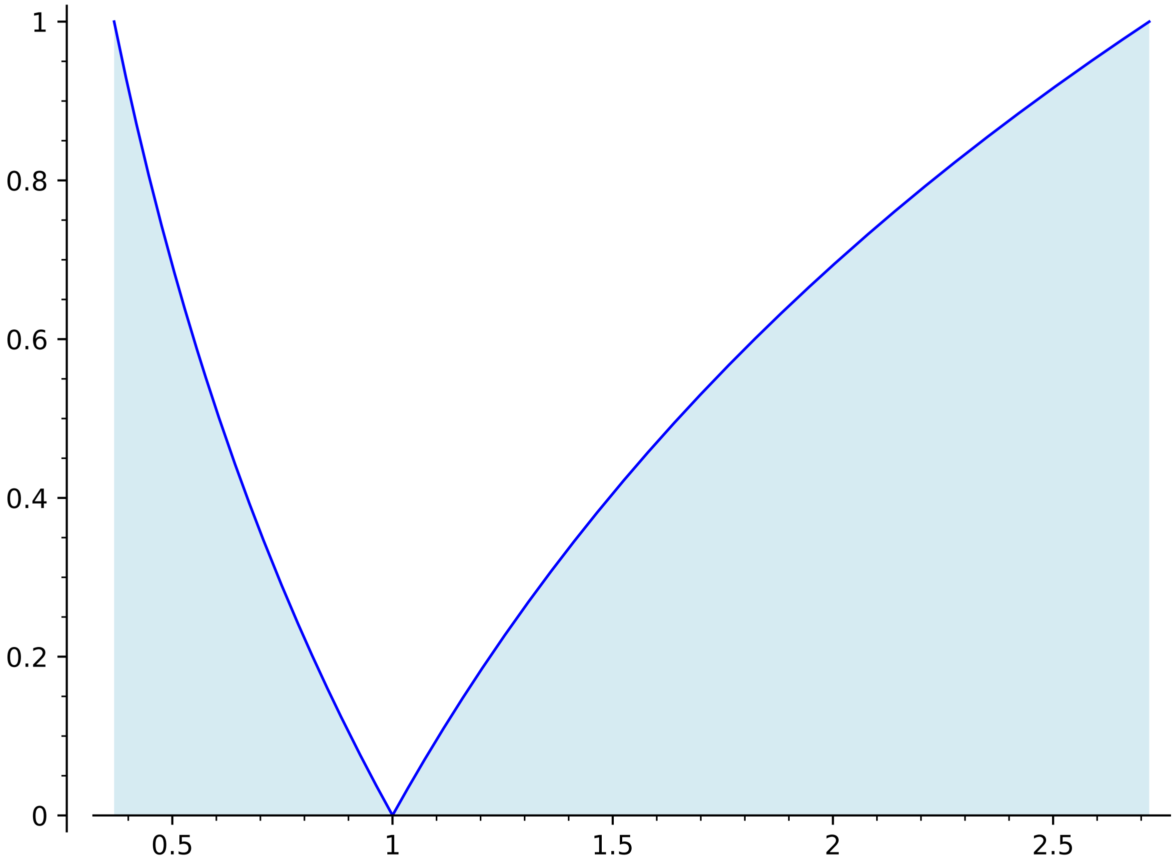
$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C$$

pak

$$\int_{1/e}^{e} |\ln x| \, dx = -\int_{1/e}^{1} \ln x \, dx + \int_{1}^{e} \ln x \, dx = -\left[x(\ln x - 1)\right]_{1/e}^{1} + \left[x(\ln x - 1)\right]_{1}^{e} =$$

$$= -(1(0-1) - \frac{1}{e}(-1-1)) + (e(1-1) - 1(0-1)) = -(-1 + \frac{2}{e}) + (0+1) = 2 - \frac{2}{e}$$

Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.23.



Obrázek 3.23: $\int_{1/e}^{e} |\ln x| \, dx = 2 - \frac{2}{e}$

4. **Spočítejte následující plochy:**

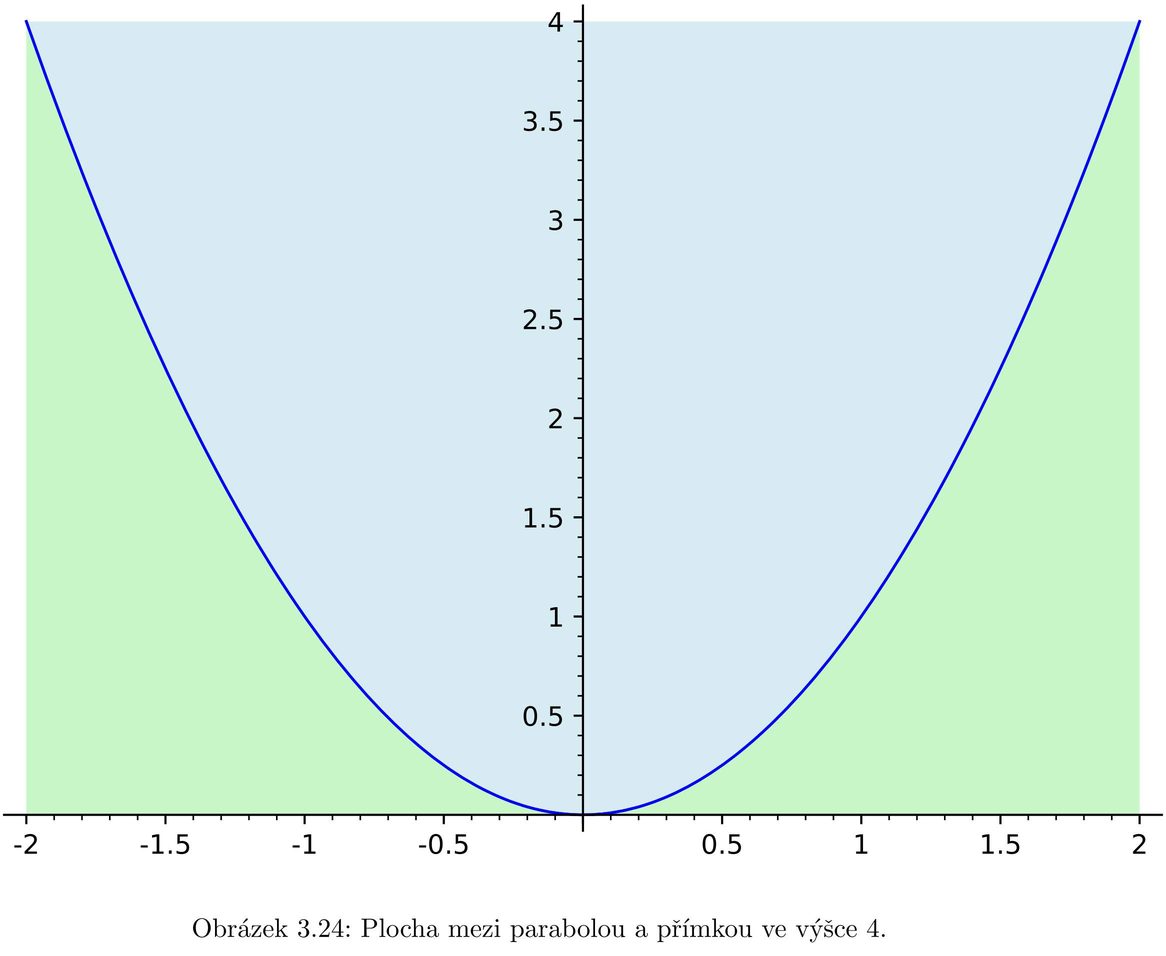
   (a) **Spočtěte plochu ohraničenou parabolou a přímkou ve výšce h nad vrcholem paraboly.**

   Řešení: Omezující přímka protíná parabolu $y = x^2$ v bodech $(-\sqrt{h}, h)$ a $(\sqrt{h}, h)$ hledaná plocha tedy je

$$2h\sqrt{h} - \int_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} x^2 \, dx = 2h\sqrt{h} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{h}}^{\sqrt{h}} = 2h\sqrt{h} - \left(\frac{h\sqrt{h}}{3} - \frac{-h\sqrt{h}}{3}\right) =$$

$$= 2h\sqrt{h} - \frac{2h\sqrt{h}}{3} = \frac{4}{3}h\sqrt{h}$$

   Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.24. Hledaná plocha (zobrazena modře) je rozdíl obdélníku ji obsahující (obdélník $[-2, 2] \times [0, 4]$ – vyplněn modrou nebo zelenou barvou) a integrálu pod parabolou (zobrazen zeleně).



Obrázek 3.24: Plocha mezi parabolou a přímkou ve výšce 4.

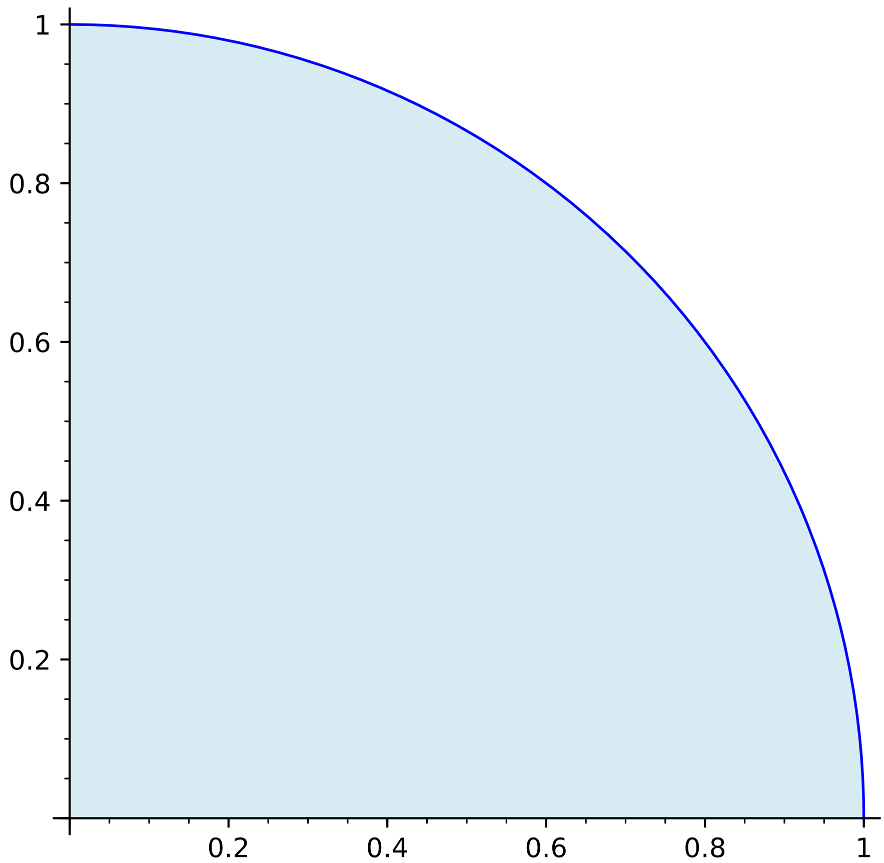
   (b) **Spočtěte plochu kruhu o poloměru r.**

   Řešení: Spočteme plochu čtvrtiny kruhu (a pak vynásobíme čtyřmi), přičemž čtvrtkruh je vlastně ohraničen křivkou $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx &= \int_0^r \sqrt{r^2 (1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2)}\, dx \\
&= r \int_0^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\, dx \\
&\text{zvolíme substituci: } \begin{pmatrix} t & = & x/r \\ dt & = & 1/r\ dx \end{pmatrix} \\
&= r^2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dt \\
&= r^2 \left[\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right)\right]_0^1 \\
&= r^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
&= \frac{\pi r^2}{4}
\end{aligned}
$$

Z toho dopočteme, že plocha kruhu o poloměru r je πr^2

Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.25.



Obrázek 3.25: Čtvrtkruh o poloměru 1.

(c) **Spočtěte plochu mezi křivkami funkcí $f(x) = x^2 - 2x + 1$ a $g(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ (s průsečíky 0 a 1).**

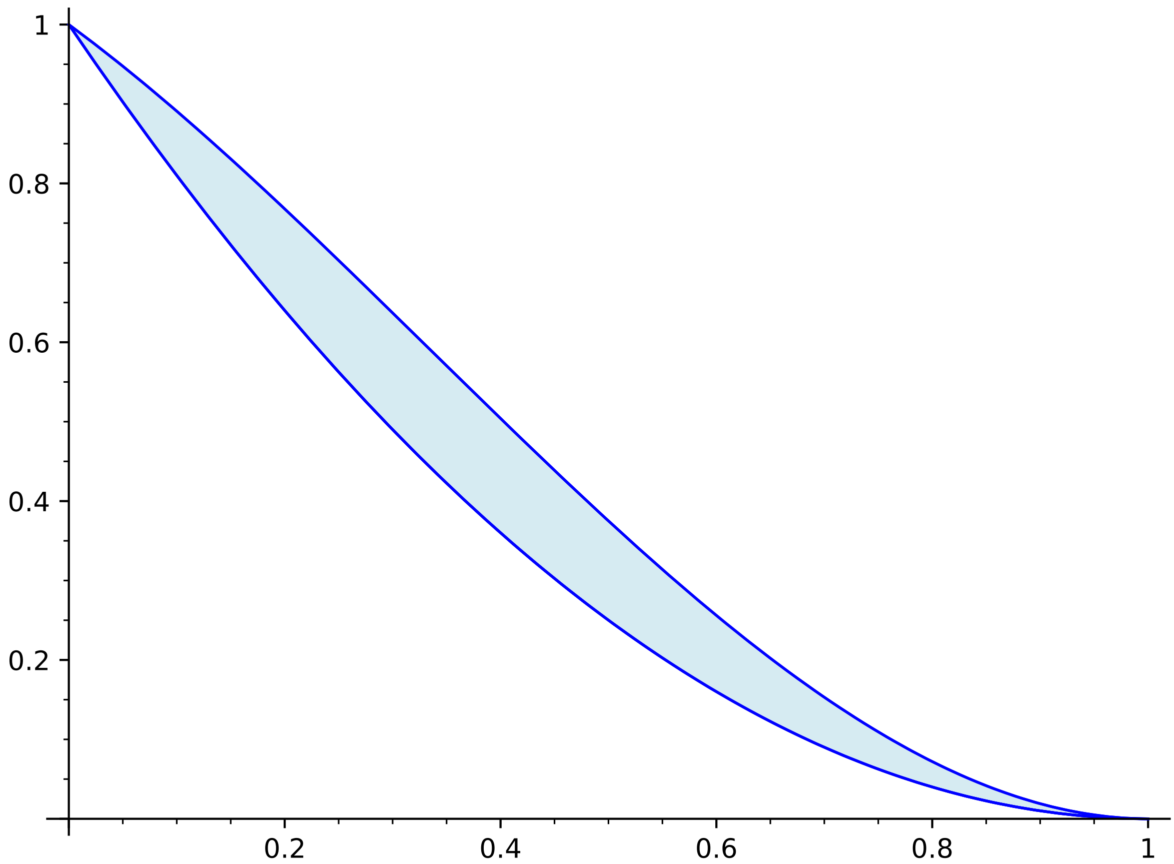
Řešení:

$$\int_0^1 g(x)\ dx - \int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 (g(x) - f(x))\ dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 - x^2 - x + 1) - (x^2 - 2x + 1)\ dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\ dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.26.



Obrázek 3.26: Plocha mezi dvěma polynomy (modře).

(d) **Vezměme funkci $\sin x$ na intervalu $(0, \pi)$ a její "převrácený obraz ukotvený v bodě $(0, 1)$" (funkce $1 - \sin x$). Spočtěte plochu útvaru který leží mezi těmito křivkami (taková čočka).**

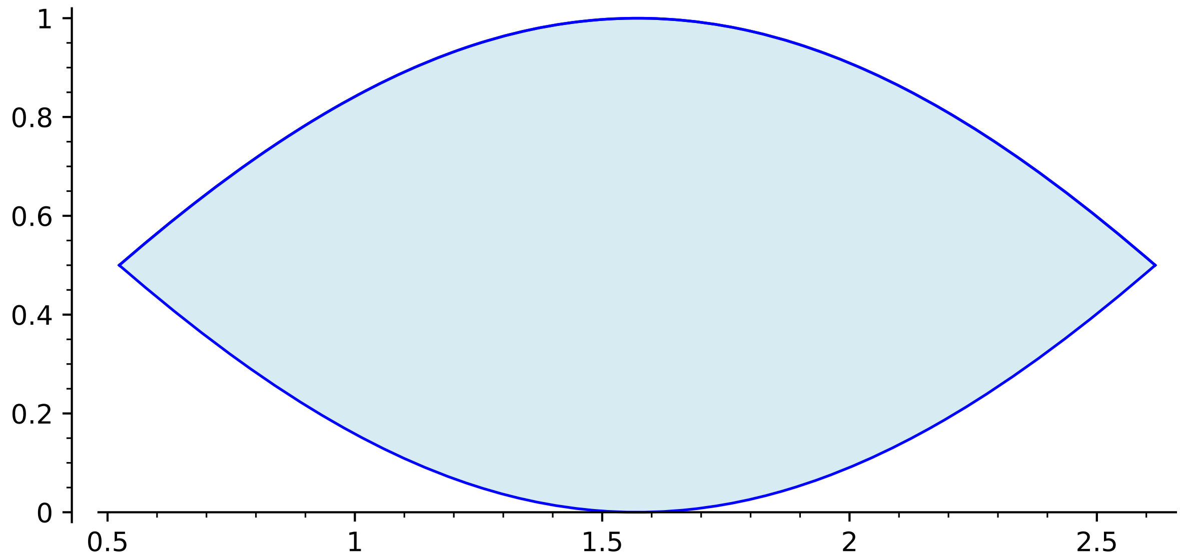
Řešení: Průsečíky funkcí jsou body $(a, \frac{1}{2})$, $(\pi - a, \frac{1}{2})$, kde $a = \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6}$

$$\int_a^{\pi - a} \sin x - (1 - \sin x)\ dx = \int_a^{\pi - a} (2 \sin x - 1)\ dx = 2 \int_a^{\pi - a} \sin x\ dx - \int_a^{\pi - a} 1\ dx =$$

$$= 2[-\cos x]_a^{\pi-a} - [x]_a^{\pi-a} = -2\cos(\pi - a) + 2\cos(a) - ((\pi - a) - a) =$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{6} - 2\cos\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} \cong 1.37$$

Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.27.



Obrázek 3.27: Čočka mezi dvěma sinusoidami (modře).

5. **Na vektorovém prostoru funkcí, které jsou spojité na $[-\pi, \pi]$, můžeme definovat skalární součin:**

$$\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\ dx$$

My nebudeme dokazovat, že toto je skalární součin (ani nic o Fourierových řadách, které vznikly kvůli řešení rovnic tepla a dnes jsou používány nejen při zpracování zvuku a obrazu, ale i pro analýzu časových řad, ani o cool aplikacích jako pohybový mikroskop: `https://www.youtube.com/watch?v=fHfhorJnAEI`**). My toto použijeme jako zajímavý typ integrálů na procvičování.**

Spočítejte:

(a) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(mx)\ dx$ **pro** $m \in \mathbb{N}$

Řešení: Na minulém cvičení už jsme určili, že

$$\int \cos^2(x)\ dx = \frac{1}{2}\left(x + \sin(x)\cos(x)\right) + c$$

Tedy jednoduchou substitucí dostaneme:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\ dx = 1$$

(b) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(mx)\ dx$ **pro** $m \in \mathbb{N}$

Řešení: Už víme, že

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\ dx = 1$$

Navíc víme, že

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx) + \cos^2(mx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\ dx = 2$$

Tedy odvodíme:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\ dx = 1$$

(c) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\ dx$ **pro** $m \neq n \in \mathbb{N}$

Řešení: Použijeme vzorec, který si pamatujeme ze střední:

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\cos(A-B) + \cos(A+B)\right)$$

Napřed spočítáme primitivní funkci (mohli jsme rovnou použít pravidlo pro substituci v určitém integrálu a počítat s novými mezemi).

Budeme volit substituci:

$$u = (m-n)x$$
$$du = (m-n)\ dx$$

respektive

$$t = (m+n)x$$

$$dt = (m+n)\ dx$$

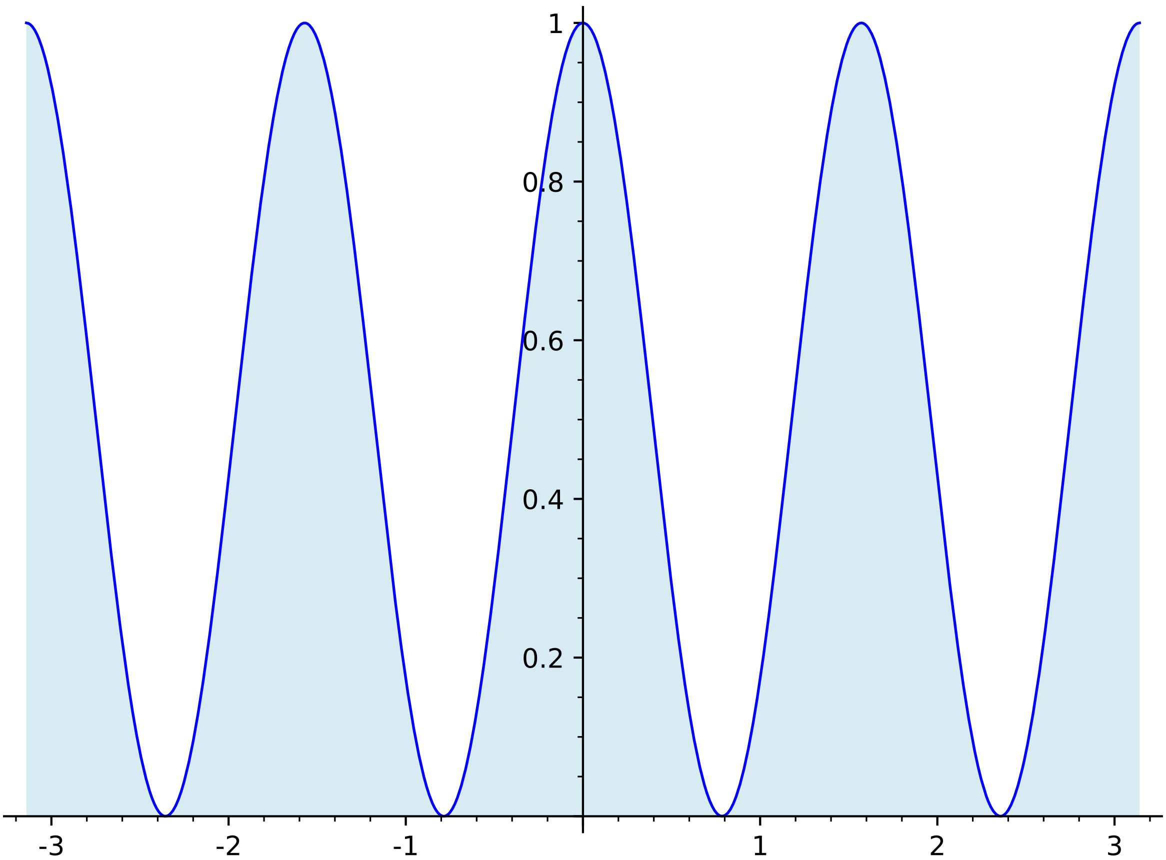
a dostaneme:

$$\begin{aligned}\int \cos(mx)\cos(nx)\ dx &= \frac{1}{2}\int \cos((m-n)x) + \cos((m+n)x)\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int \cos((m-n)x)\ dx + \frac{1}{2}\int \cos((m+n)x)\ dx \\ &= \frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)} + \frac{\sin((m+n)x)}{2(m+n)} + c\end{aligned}$$

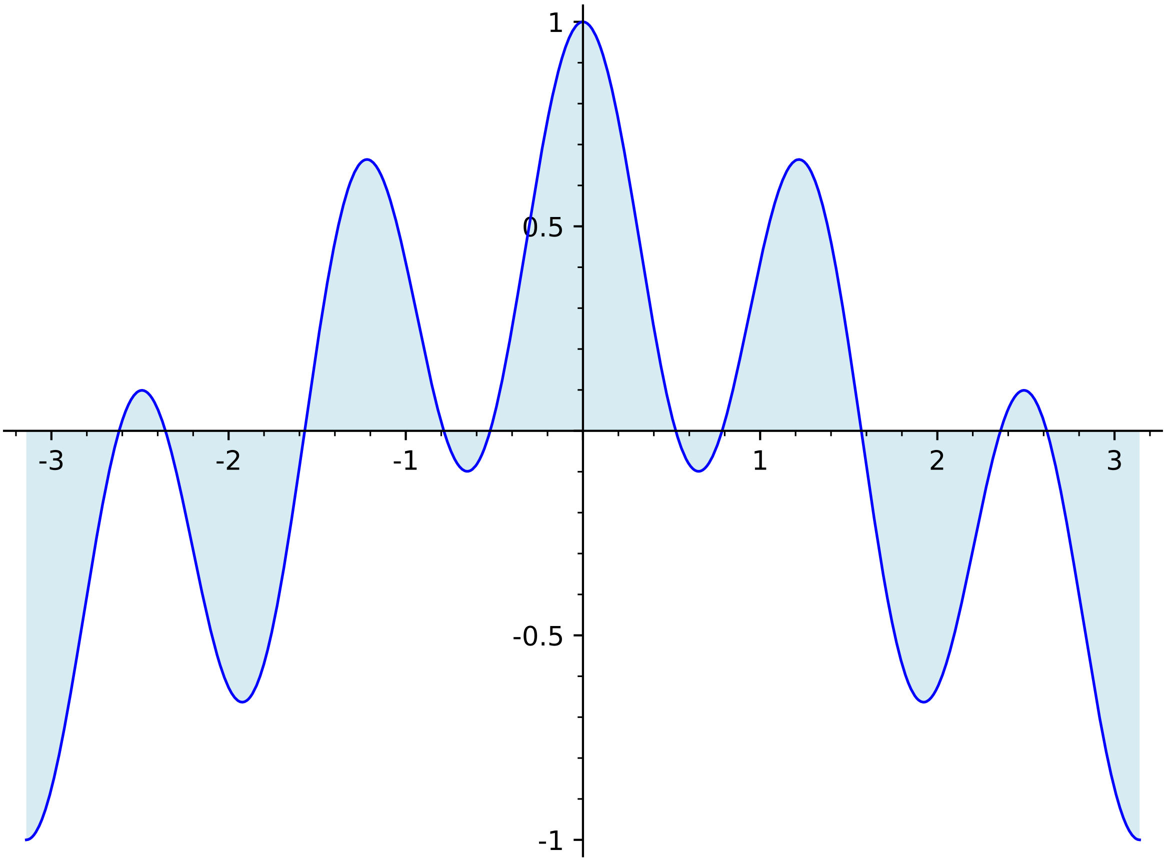
Jelikož $\sin(ax) = -\sin(-ax)$, dostáváme že

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\ dx = 0$$

Geometrický význam vidíme na Obrázku 3.28 pro případ $m = n = 2$ a Obrázku 3.29 pro případ $m = 2, n = 3$.



Obrázek 3.28: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2x)\cos(2x)\ dx$ tedy $m = n = 2$.



Obrázek 3.29: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2x)\cos(3x)\ dx = 0$ tedy $m = 2, n = 3$.

Poznamenejme, že stejný výsledek dostanete i pro součin dvou sinů $\langle\sin(mx) \mid \sin(nx)\rangle$ – vyzkoušejte.

(d) $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\ dx$ **pro** $m, n \in \mathbb{N}$

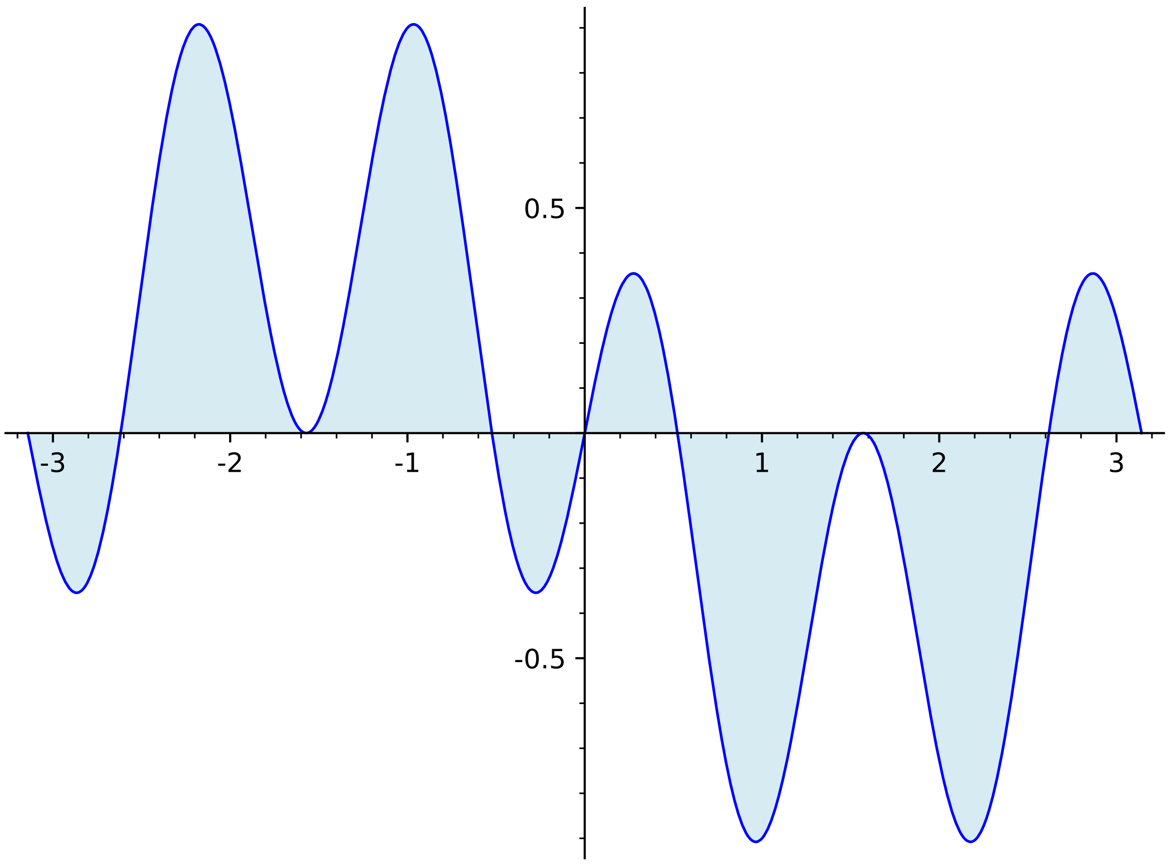
Řešení: Použijeme podobný trik jako minule:

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}\left(\sin(A+B) + \sin(A-B)\right)$$

a dostaneme (jako cvičení si dopočítejte mezikroky):

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(mx)\ dx = 0$$

Obrázek 3.30 ukazuje situaci pro případ $m = 3, n = 2$.



Obrázek 3.30: $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(2x)\cos(3x)\ dx = 0.$

(e) **Pro funkci** $s(x) = x/\pi$ **na** $[-\pi, \pi]$ **která je navíc periodická s periodou** 2π **(tzn.** $\forall x \in \mathbb{R}\colon s(x) = s(x + 2\pi)$**) spočítejte:**

i. $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} s(x)\cos(nx)\ dx$ **pro** $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Řešení: Funkce je lichá a integrujeme na intervalu symetrickém okolo nuly, tedy

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} s(x)\cos(nx)\ dx = 0$$

ii. $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} s(x)\sin(nx)\ dx$ **pro** $n \in \mathbb{N}$

Řešení: Na intervalu $[-\pi, \pi]$ je $s(x) = x/\pi$. Naštěstí už jsme v minulých cvičeních spočítali, že

$$\int x\sin(x)\ dx = -x\cos(x) + \sin(x) + c$$

teď už stačí použít jednoduchou substituci (dopočítejte).

Tedy dostáváme, že

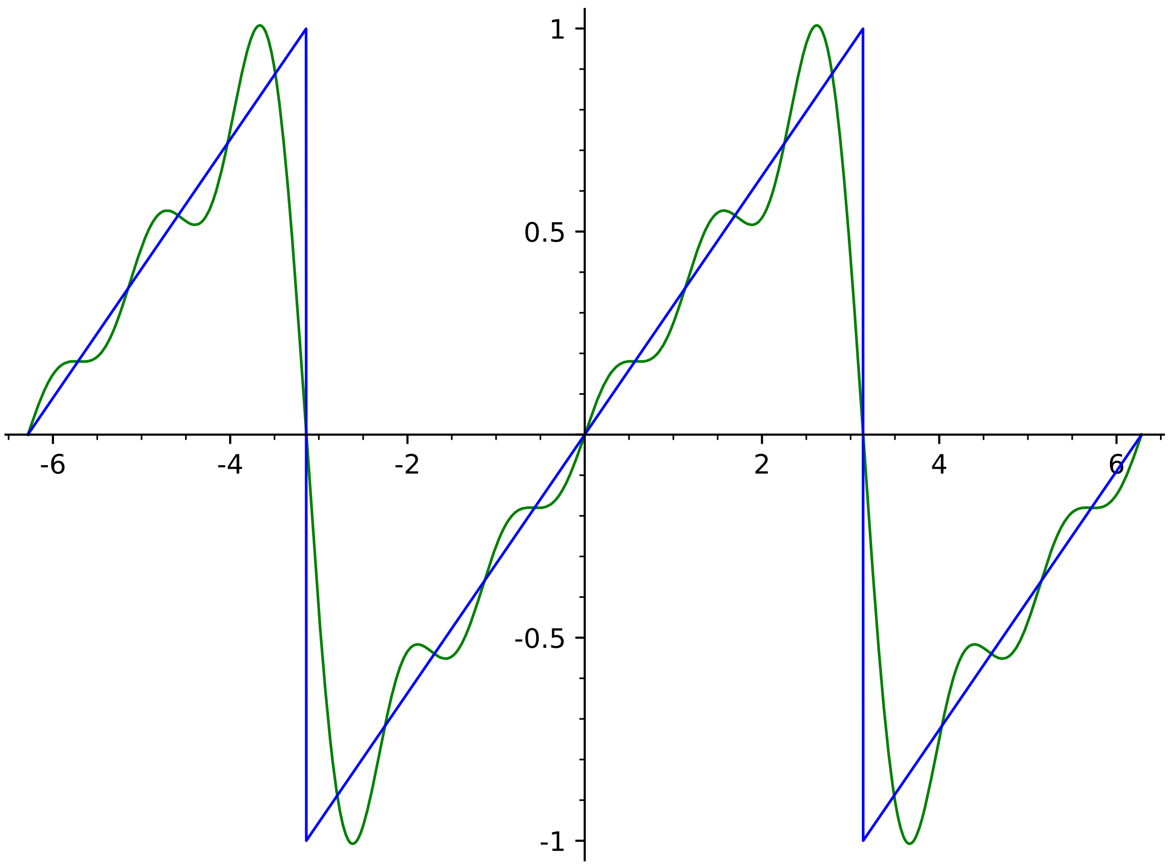
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\pi} s(x)\cos(nx)\ dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}$$

pro $n \geq 1$.

iii. Co se stane, když sečteme prvních několik členů následující řady:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Řešení: Dostaneme „aproximaci“ původní funkce pomocí součtu sinů a cosinů. Příklad pro $n = 5$ je na Obrázku 3.31.



Obrázek 3.31: Součet prvních pár členů Fourierovy řady pro $s(x)$.

3.14 cvičení

1. **Určete hodnoty gama funkce pro přirozená čísla, tj.**

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ dt$$

pro $z \in \mathbb{N}$.

Řešení: Určitý integrál, který má jednu (nebo více) mezí nekonečných jsme sice definovali, ale nepočítali. Teď je tedy nejvyšší čas. Pro $a \in \mathbb{R}$ a reálnou funkci $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definujeme

$$\int_a^\infty f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\ dx$$

Tedy se vlastně neliší oproti naší běžné definici Newtonova integrálu (Definice 11.1 v lecturenotes). Obdobně pokud by obě meze byly nekonečné.

Použijeme per-partes pro určitý integrál:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\ dt &= \left[-t^{z-1}e^{-t}\right]_0^\infty + (z-1)\int_0^\infty t^{z-2}e^{-t}\ dt\\ &= 0 + (z-1)\int_0^\infty t^{z-2}e^{-t}\ dt\\ &= (z-1)(z-2)\int_0^\infty t^{z-3}e^{-t}\ dt\\ &= (z-1)!\end{aligned}$$

Překvapivě jsme tedy pro $z \in \mathbb{N}$ dostali faktoriál. Jen poznamenejme, že tato Gamma funkce je důležitým rozšířením faktoriálu na komplexní čísla (i když není definovaná pro záporná celá čísla). Uplatnění nachází v pravděpodobnosti, statistice i kombinatorice.

2. **Spočítejte objem a povrch koule.**

Řešení: Koule vznikne rotací funkce

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

na intervalu $[-r, r]$.

Dle Věty 19 a Věty 20 spočítáme objem respektive povrch koule:

$$\begin{aligned} \text{objem koule} &= \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \, dx \\ &= \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx \\ &= \pi \left[xr^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$

Pro povrch spočítáme první derivaci

$$\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

a nyní už můžeme dopočítat podle vzorce:

$$\begin{aligned} \text{povrch koule} &= 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \, dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^{r} r \, dx \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

3. **Spočítejte délku křivky funkce** $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln(x)}{4}$ **na intervalu** $[2, 4]$**.**

Řešení: Dle Věty 18 napřed jako mezivýpočet zderivujeme

$$f'(x) = x - \frac{1}{4x}$$

a pak už jen spočítáme délku křivky:

$$\begin{aligned} l &= \int_2^4 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2}\ dx \\ &= \int_2^4 \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2}\ dx \\ &= \int_2^4 \left(x + \frac{1}{4x}\right)\ dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\ln(x)}{4}\right]_2^4 \\ &= 6 + \frac{\ln(2)}{4} \end{aligned}$$

4. **Spočítejte objem nekonečného „trychtýře" vzniklého rotací $f(x) = 1/x$ na intervalu $x \in [1, \infty]$ okolo osy x.**

Řešení: Dle Věty 19 spočítáme

$$
\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^\infty (1/x)^2 \; dx \\
&= \pi \left[-1/x\right]_1^\infty \\
&= \pi
\end{aligned}
$$

5. **Vyšetřete konvergenci nebo divergenci řad (pokud konvergují, tak co možno nejpřesněji odhadněte):**

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Řešení: Napřed pomocí per partes spočítáme neurčitý integrál:

$$\begin{aligned}
\int \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\, dx &= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \int x\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\, dx \\
&= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \int \frac{1}{x+1}\, dx \\
&= x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \ln(x+1) + c
\end{aligned}$$

Vidíme tedy, že podle integrálního kritéria konvergence (Věta 22) řada nekonverguje, protože

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\, dx = +\infty$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Řešení: Dle tvrzení z přednášky řada konverguje (triviální použití integrálního kritéria konvergence – Věta 22).

Zkusme spočítat nějaký odhad, na co se daná řada sečte. Funkce je nerostoucí (tedy prohazujeme nerovnosti ve Větě 21).

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\, dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Tedy odhadujeme n-tý částečný součet odhadujeme jako

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\right) - 1 \le \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = S_n$$

$$S_n - 1 \le \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx \le S_n$$

(všimněte si, že čím menší je první člen, tím přesnější je náš odhad).

Dostáváme tedy

$$S_n - 1 \le \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n \le S_n$$

$$S_n - 1 \le 1 - \frac{1}{n} \le S_n$$

V limitě dostáváme, že $S_n \in [1,2]$.

Poznamenejme, že skutečný součet této řady je roven $\frac{\pi^2}{6} \doteq 1.6449$.

Kapitola 4

Řešení vybraných domácích úkolů

1. **Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost. Dokažte, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *nemá* limitu právě tehdy, když existují aspoň dvě její podposloupnosti, které mají různou limitu.**

   Řešení:

   (a) víme, že aspoň nějaká podposloupnost má limitu a. pokud celá (a_n) nemá limitu a, pak $\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 \colon |a_n - a| \geq \varepsilon$. tedy existuje nekonečně mnoho prvků (a_n), které jsou mimo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ a to je omezená podposloupnost, která má podposloupnost, která má limitu.

   (b) pokud existují dvě podposloupnosti, které mají různou limitu, pak (a_n) nemá limitu (lehká modifikace https://iuuk.mff.cuni.cz/ tereza/teaching-files-19/analyza/lecture2.pdf věta 2.7).

   Jde to dokázat pomocí věty z přednášky o hromadných bodech a limitě. Případně jste přišli i na různé kombinace předchozího a následujícího postupu nebo i na další jiné postupy, které sem psát nebudu. Zajímavějším typem důkazu byl ten následující:

   Podle Bolzano-Weierstrassovy věty existuje konvergentní podposloupnost. Značme nějakou takovou (b_n), nechť $b = \lim b_n$.

   Z předpokladu (a_n) nemá limitu, speciálně b není její limitou. tedy:

   $$\exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n' \geq n_0 \colon |a_{n'} - b| \geq \varepsilon$$

   vytvoříme posloupnost (c_n) následovně: $c_1 = a_1$ nechť $c_n = a_m$ pro nějaké m, n přirozené. použijeme výrok o neexistenci limity (a_n), za n_0 dosadíme $m+1$, pak existuje $n' \geq m+1$, že $|a_{n'} - b| \geq \varepsilon$, položíme $c_{n+1} = n'$ (tedy vybíráme podposloupnost – indexy které z (a_n) vybereme rostou).

   (c_n) je také omezená posloupnost, dle Bolzano-Weierstrassovy věty má konvergentní podposloupnost, (d_n) a ta je i podposloupností (a_n) a navíc má limitu různou od b (není v intervalu $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ pro naše pevné epsilon z předchozího odstavce).

   Tedy máme dvě podposloupnosti s různou limitou.

   Na co si dát pozor:

   - Potřebujete vybrat podposloupnost (tedy nekonečně mnoho prvků (a) a tak aby jejich indexy byly rostoucí).

- Pokud bychom neodrazili zbylé prvky od b, může nám vyjít stejná limita jako předtím. Uvažme posloupnost $1, 1/1, 0, 1, 1/2, 0, 1, 1/3, 0, 1, 1/4, 0, 1, 1/5, 0, \ldots$.
  - První aplikace Bolzano-Weierstrassovy věty nám může dát podposloupnost samých nul (limita 0).
  - Druhá aplikace Bolzano-Weierstrassovy věty na to, co zbyde, nám může dát podposloupnost
  $$1/2, 1/4, 1/8, 1/16, \ldots$$
  (limita 0).
  - Třetí aplikace Bolzano-Weierstrassovy věty na to, co zbyde, nám může dát podposloupnost
  $$1/3, 1/9, 1/27, 1/81, \ldots$$
  (limita 0).
  - A tak až do nekonečna.

2. **Spočtěte limitu posloupnosti zadané $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n^2}{4} + 1$.**

Řešení: Je velice důležité ukázat, že ta posloupnost skutečně má limitu. Viz následující „odstrašující" příklad:

Mějme posloupnost zadanou: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 3 - a_n$. Tedy se jedná o posloupnost

$$1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots,$$

která zjevně nemá limitu.

Co se stane, když předpokládáme, že limitu má? Pak odvodíme, že:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= \lim_{n\to\infty} a_{n+1} && \text{(limita podposloupnosti je ta samá)} \\ &= \lim_{n\to\infty} 3 - a_n && \text{(VOAL 4)} \\ &= 3 - \lim_{n\to\infty} a_n \\ &= 3 - A \end{aligned}$$

tedy $A = \frac{3}{2}$, což vypadá jako dobrý výsledek, ale jen do té doby, než si uvědomíme, že ta limita nemá existovat.

3. **Dokažte dle definice, že $\sqrt{x}$ je spojitá v každém $a \in (0, \infty)$. Bez důkazu můžete používat, že odmocnina je na $(0, \infty)$ kladná a rostoucí.**

   (Motivace tohoto příkladu: spolu s větou o limitě složené funkce získáváte silný nástroj, jak počítat s limitami, kde jsou odmocniny. Tohle rozepisovat nemusíte.)

   Řešení: Je celkem jedno, jak jsem vyčetl δ (i kdyby to bylo ze starých aztéckých spisů), ale měl bych vyzkoušet, že co tvrdím je pravdivé. Pokud zvolíme $\delta = \varepsilon^2$, pak $x \in P(a, \delta)$, tedy $x \neq a$ a zároveň $|x - a| < \delta = \varepsilon^2$.

$$
\begin{aligned}
0 &< 2\varepsilon\sqrt{a} && (\ \varepsilon > 0,\ \sqrt{a} > 0) \\
a + \varepsilon^2 &< \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{a} + a \\
&\text{(obě strany jsou kladné, můžu odmocnit a nezměnit znaménko nerovnosti)} \\
\sqrt{a + \varepsilon^2} &< \varepsilon + \sqrt{a} \\
\sqrt{a + \varepsilon^2} - \sqrt{a} &< \varepsilon \\
\sqrt{x} - \sqrt{a} < \sqrt{a + \varepsilon^2} - \sqrt{a} &< \varepsilon
\end{aligned}
$$

   Poslední řádek jsme dostali z toho, že $|x - a| < \delta$ a toho, že odmocnina je rostoucí funkce.

   Ještě bychom ale měli zajistit, aby $x \geq 0$ (jinak odmocnina není definovaná). Tím, že jsme si vyzkoušeli, že naše tvrzení je pravdivé jsme dostali správnou volbu δ:

$$\delta = \min(\varepsilon^2, a)$$

4. **Vyřešte následující limity (poctivě rozepište a vždy napište, kterou větu z přednášky používáte):**

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-5}\right)$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-5}\right)\sqrt{n}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \sin(n)}{n}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

   Řešení: Dolní odhad je jasný, posloupnost je nezáporná. Tedy můžeme použít větu o dvou policajtech.

   Pro horní odhad $0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \ldots \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{n}$ a posloupnost konverguje k 0.

   Dalo by se také napsat:

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\frac{n!}{n^{n-1}}\right) = 0$$

   První rovnost je jen vytknutí, druhá rovnost je pomocí VOSON věty o součinu omezené a funkce jdoucí k nule. Můžeme to použít, protože $0 \leq \frac{n!}{n^{n-1}} = \frac{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot \ldots \cdot n} \leq 1$.

   (e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n}$

   Řešení: Posloupnost je nezáporná tedy můžeme použít větu o dvou policajtech.

   Například pomocí matematické indukce můžeme dokázat, že pro $n \geq 10$ platí $n^3 \leq 2^n$.

   Pak můžeme psát:

   $$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

   Ekvivalentně bychom mohli použít podílové kritérium pro $q = 2/3$ (Věta 7).

5.

(a) **Rozhodněte, zda existuje otevřený interval $I \subset \mathbb{R}$ a funkce f která má Darbouxovu vlastnost (viz věta 10.6) tak, že interval $f(I)$ je:**

- **Otevřený**
- **Uzavřený**
- **Zleva otevřený, zprava uzavřený**
- **Zleva uzavřený, zprava otevřený**

(Rozhodněte znamená najděte I, f nebo zdůvodněte proč neexistují. Pokud najdete I, f, pak zdůvodněte, proč f má Darbouxovu vlastnost.)

(b) **Funguje věta 10.6 i pokud $I = [a, b]$ pro nějaká $a, b \in \mathbb{R}$ (tedy je uzavřený)?**

(c) **Původní, příliš těžké zadání: Změní se nějaká vaše odpověď pro $I = [a, b]$?**

(d) **Náhradní: Umíte sestrojit funkci f, která má na intervalu $[0, 1]$ Darbouxovu vlastnost, ale zobrazí ho na otevřený interval ($f([0, 1]) = (a, b)$ pro $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)?**

Řešení: Prvně pořádně definujme Darbuoxovu vlastnost:
Definice (Darbouxova vlastnost)**.** *Nechť $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a nechť $f: I \to \mathbb{R}$ je funkce. Řekneme, že f má* Darbouxovu vlastnost*, pokud:*

$$\forall x, y \in I \forall \alpha \in (\min(f(x), f(y)), \max(f(x), f(y)))\, \exists z \in (\min(x, y), \max(x, y)) : f(z) = \alpha$$

V přednášce jsme viděli, že spojitost implikuje Darbouxovu vlastnost. Naopak to neplatí (jak jste taky viděli na přednášce). Dokonce platí, že každá funkce (jakkoliv nespojitá) jde zapsat jako součet dvou funkcí s Darbouxovou vlastností!

Více na `https://encyclopediaofmath.org/wiki/Darboux_property`

Speciálně několik z vás mělo pravdu, že pokud f je spojitá, tak obraz uzavřeného intervalu je uzavřený interval. Rozmyslete si, že to můžete odvodit z dvou vět z přednášky – principu maxima pro spojité funkce (Věta 6.8 z přednášky) a Darbouxovy věty (Věta 6.3 z přednášky).

První pokus: Pokus, který jsem myslel že funguje (předtím než jsem se pořádně podíval na definici): $f: [0, 1] \to (0, 1)$

$$f(x) = \begin{cases} 0.5 & x \in \{0, 1\} \\ x & x \in (0, 1) \end{cases}$$

Laskavý čtenář ověří, že tento pokus nefunguje při následující volbě:

$$x = 0.9$$
$$y = 1$$
$$\alpha = 0.7$$

Pokus, který konečně funguje: $f: [0, 1] \to (-1, 1)$ definovaná jako:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ (1 - x) \sin(1/x) & x \in (0, 1] \end{cases}$$

i. **Obraz je otevřený interval:** tedy chci ukázat, že pro každé $x \in [0,1]$ bude $f(x) \in (-1,1)$ a navíc, že $\sup\{f(x) \mid x \in [0,1]\} = 1$ (infimum se ukáže obdobně).

A. Chci ukázat, že $\forall x \in [0,1]\colon f(x) \in (-1,1)$:

- Pro krajní body to platí
- $\forall x \in (0,1)\colon |\sin(1/x)| \le 1$
- $\forall x \in (0,1)\colon |1-x| < 1$
- Tedy $\forall x \in (0,1)\colon |(1-x)\sin(1/x)| < 1$

B. Chci ukázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $z \in (0,1)$ takové, že $f(z) \ge 1-\varepsilon$ (tedy, že supremum $f(x)$ je rovné jedné, infimum se ukáže obdobně). Vím, že $\sin(2k\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$. Pro pohodlí zvolím dost malé z tvaru $z = \frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ (tedy volím dostatečně velké $k \in \mathbb{N}$). Pro dané $\varepsilon > 0$ volím $k = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \in \mathbb{N}$ takže $z \le \varepsilon$. Dostáváme tedy $\sin(z) = 1$ a tudíž $f(z) = (1-z)\sin(z) = 1 - z \ge 1 - \varepsilon$.

Poznamenejme, že jsme teď našli posloupnost $a_n = \frac{2}{n\pi}$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a navíc $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 1$. Tím jsme dokázali, že supremum f na intervalu $[0,1]$ je rovné jedné. Nic jsme tím neřekli o limitě $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ (porovnejte s Heineho definicí limity, která chce aby $\lim f(a_n)$ byla stejná pro libovolnou takovou a_n).

ii. **Funkce má Darbouxovu vlastnost:**

A. Na $(0,1]$ je f spojitá, tedy dle Darbouxovy věty o nabývání mezihodnot (Věta 6.3) z přednášky má také Darbouxovu vlastnost.

B. Pro $x = 0, y \in (0,1]$ převedeme na předchozí případ. Volíme $n = \left\lceil \frac{1}{\pi y} \right\rceil \in \mathbb{N}$ tedy $\sin(n\pi) = 0$. A tedy $t = \frac{1}{\pi n} > 0$ ale pořád $t < y$ nám dá $(1-t)\sin(1/t) = 0$. Použijeme předchozí případ pro t a y, tedy $0 = f(0) = f(t)$ a $f(y)$.

6.

Dokažte následující tvrzení: Nechť $(a_n) \subset (0, \infty)$ je posloupnost kladných reálných čísel a nechť $N \in \mathbb{N}$ je takové, že $\exists q \in [0, 1)$ že pro každé přirozené $n \geq N$ platí:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1.$$

Dokažte, že:

(a) **Pro každé přirozené $n \geq N$ platí $a_n \leq a_N q^{n-N}$ (matematickou indukcí)**

(b) **v důsledku čehož: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.**

Nalezněte posloupnost kladných reálných čísel (b_n) takovou, že:

- $b_n > 0$ **pro všechna přirozená** n
- $\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n > 0$

Řešení:

$$b_n = 1 - \frac{1}{n}$$

Platí všechny tři body najednou. Ale tady není možné najít ono q (tedy nemůžeme použít podílové kritérium a to je dobře, protože její limita není nulová). Limita $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$.

Proč jsme potřebovali to q? Protože díky němu jsme mohli říct, že další člen je nejvýš q-násobek předchozího, tedy to q nám „stlačuje“ každý další člen blíž k nule.

7. **Vypracujte teoretické kvízy z Moodle:**
`https://dl1.cuni.cz/enrol/index.php?id=9345`
   - **Jsou to spíše teoretické otázky od vyučujících. Je ve vašem zájmu je projít a naučit se z nic co nejvíc.**
   - **Budu hodnotit vypracování kvízů. Nebudu hodnotit jestli jste odpověděli správně nebo nesprávně. Pokud už jste kvíz řešili uvažte, jestli si ho chcete zopakovat nebo ne (nemusíte).**
   - **Rád budu odpovídat na případné dotazy ohledně odpovědí.**
   - **Pokud budete mít technické problémy, tak se neváhejte zeptat.**
   - **Pošlete mi v mailu poznámku (řešil jsem kvízy).**

Řešení: Kvíz.příklad:

5.2

5.4

8.3

9.posledni Spočítejte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\ln(1+2x)\ln(1+3x)\ln(1+4x)\ln(1+5x)}{\ln(1+x^5)}$$

Řešení: **První řešení:** Tento příklad vypadá hodně strukturovaně a na první pohled těžce. Je to ideální kandidát na to, abychom zkusili vyřešit napřed lehčí variantu.

- Lehčí varianta číslo 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^1)} = 1$$

- Lehčí varianta číslo 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)(\ln(1+2x)}{\ln(1+x^2)}$$

Derivace čitatele je $\left(\ln(1+x^2)\right)' = \frac{2x}{1+x^2}$, tedy je nenulová na prstencovém okolí nuly. Limita čitatele i jmenovatele jsou rovny nule. Pokud tedy existuje limita podílu derivace čitatele a derivace jmenovatele, pak původní limita má stejnou hodnotu (l'Hospitalovo pravidlo Věta 14).

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\ln(1+x)}{1+2x} + \frac{\ln(1+2x)}{1+x}}{\frac{2x}{1+x^2}} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2(1+x)\ln(1+x)+(1+2x)\ln(1+2x)}{(1+2x)(1+x)}}{\frac{2x}{1+x^2}} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2(1+x)\ln(1+x)+(1+2x)\ln(1+2x)\right)\left(1+x^2\right)}{2x\left((1+2x)(1+x)\right)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2(1+x)\ln(1+x)+(1+2x)\ln(1+2x)\right)\left(1+x^2\right)}{2x+6x^2+4x^3}
\end{aligned}$$

Znovu máme limitu čitatele i jmenovatele rovny nule a nenulovou derivaci čitatele na prstencovém okolí nuly.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(2(1+x)\ln(1+x)+(1+2x)\ln(1+2x)\right)\left(1+x^2\right)}{2x+6x^2+4x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4(1+x^2) + (6x^2+4x+2)\ln(1+x) + 2(3x^2+x+1)\ln(1+2x)}{2+12x+12x^2}$$
$$= 2$$

- Laskavý čtenář dopočítá zbylé varianty a původní zadání.

Druhé řešení: Vzpomeneme si na Talorovu řadu $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$

Rozepíšeme si obdobně i zbylé členy:

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots$
- $\ln(1+2x) = (2x) - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + \frac{(2x)^5}{5} - \cdots$
- $\ln(1+3x) = (3x) - \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3} - \frac{(3x)^4}{4} + \frac{(3x)^5}{5} - \cdots$
- $\ldots$
- $\ln(1+x^5) = (x^5) - \frac{(x^5)^2}{2} + \frac{(x^5)^3}{3} - \frac{(x^5)^4}{4} + \frac{(x^5)^5}{5} - \cdots$

Takže řešíme následující limitu:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \cdots\right)\left((2x) - \frac{(2x)^2}{2} + \cdots\right)\left((3x) - \frac{(3x)^2}{2} + \cdots\right)\left((4x) - \frac{(4x)^2}{2} + \cdots\right)\left((5x) - \frac{(5x)^2}{2} + \cdots\right)}{(x^5) - \frac{(x^5)^2}{2} + \frac{(x^5)^3}{3} - \frac{(x^5)^4}{4} + \frac{(x^5)^5}{5} - \cdots}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{120x^5 + x^6(\ldots)}{(x^5) - \frac{(x^5)^2}{2} + \frac{(x^5)^3}{3} - \frac{(x^5)^4}{4} + \frac{(x^5)^5}{5} - \cdots}$$
$$= 120$$

10.2

11.3

12.6

12.8

(a) Proč u podílového kritéria u limit nestačí, že poměr je vždy menší než 1 – proč je tam to q?

Řešení: Řešený domácí úkol.

(b) Taylorův polynom:

- Jaká byla motivace?

  Řešení: Co nejlépe aproximovat hodnotu funkce.

  Trochu hlouběji: často se hodí reprezentovat funkci jako součet „jednodušších“ funkcí (obdobně jako v lineární algebře si často vektor reprezentujeme vůči nějaké bázi, se kterou se nám lépe pracuje).

- Taky nevím, proč se to vlastně dělí tím $(x-a)^n$. Proč zrovna tím? Jakej je důvod?

  Řešení: Tímhle členem se nedělí, ale násobí. Intuice: jak daleko jsem od a (tzn. bodu, kde hodnotu té funkce znám dobře).

Kapitola 5

Bonus

5.1 Optimalizace – gradient descend

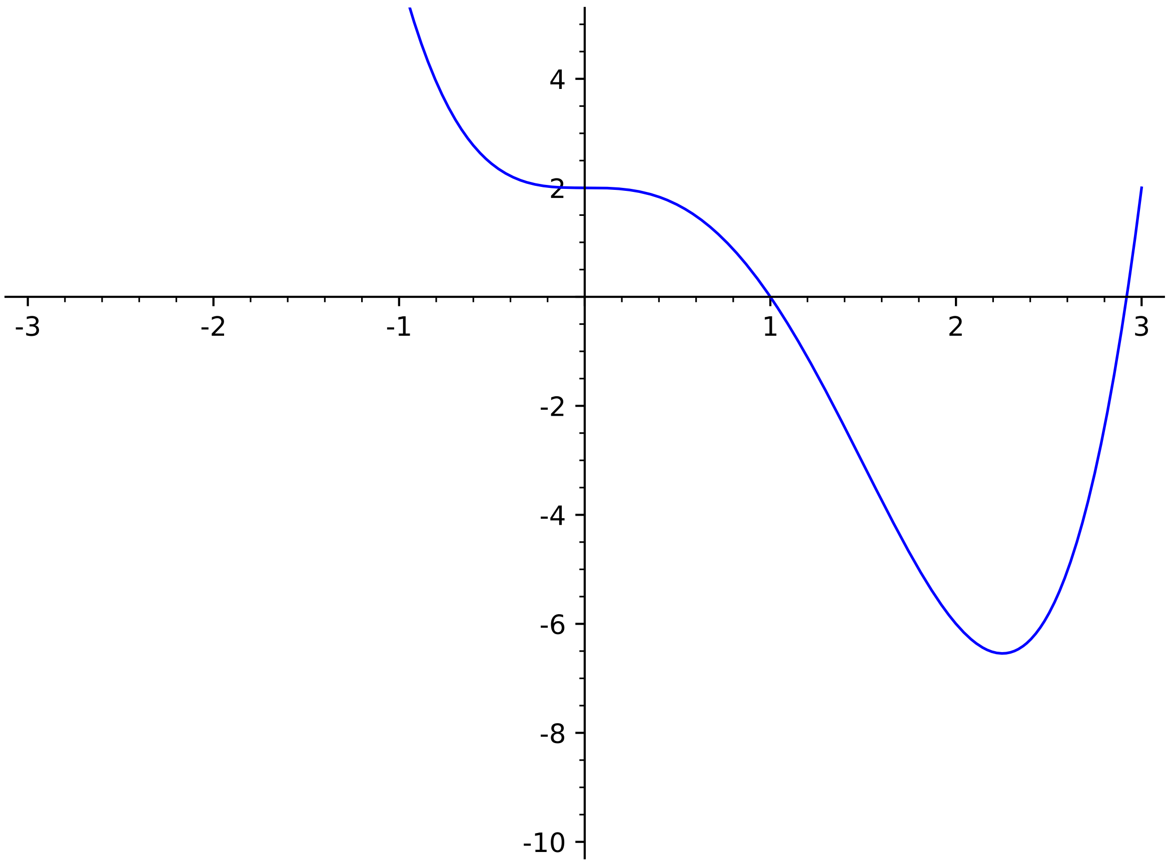
Už jsme viděli, jak použít Darbouxovu vlastnost a „půlení intervalů“ na optimalizaci. Ale to nemusí být vždy praktické:

- Rychlost konvergence...
- Jak ten postup zobecníte na funkce více proměnných?

Zkusme se podívat na následující funkci a najít její minimum fyzikální úvahou:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$$

Analytickými metodami umíme snadno najít minimum (vyšetříme první a druhé derivace, vzpomeneme si na věty z přednášky a jsme hotovi). (Obrázek 5.1).



Obrázek 5.1: $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$

Myšlenka: co by se stalo, kdybychom po grafu pustili kuličku?

Pozorování: skutálí se dolů do minima!

Otázka: ale kudy je dolů?

Derivaci téhle funkce umíme vyhodnotit snadno: $f'(x) = 4x^3 - 9x^2$.

- Pokud je derivace záporná, funkce klesá.
- Pokud je derivace kladná, funkce roste.

Dokonce platí něco lepšího:

- Pokud je derivace *hodně* záporná, funkce *hodně* klesá.
- Pokud je derivace *hodně* kladná, funkce *hodně* roste.

Takže když chceme minimalizovat, děláme tohle:

- Pokud je derivace (hodně) kladná, jdeme (hodně) vlevo.
- Pokud je derivace (hodně) záporná, jdeme (hodně) vpravo.

To zní dobře, protože v extrému je derivace nulová (nebo neexistuje, ale to teď zanedbáme), takže se nepohneme nikam.

Jednodušeji řečeno: odečteme derivaci.

Jednoduchý Python kód:

```
# derivative of x**4 - 3*x**3 + 2
def df(x):
    return 4*x**3 - 9*x**2

current = 4.0
iterations = 20
alpha = 0.01

for _ in range(iterations):
    print(f'current = {current}')
    current = current - alpha * df(current)

print(f'Minimum at: {current}')
```

Výstup:

```
current = 4.0
current = 2.88
current = 2.67098112
current = 2.55084758768784
current = 2.4725451025639247
current = 2.4181241075908217
current = 2.3788010610759907
current = 2.349647226900712
current = 2.3276417627201864
current = 2.3108155002345616
current = 2.297825629818595
current = 2.2877248517791187
current = 2.279827252147626
current = 2.2736260324425532
current = 2.2687407592672773
current = 2.2648822733430056
current = 2.2618286143740107
current = 2.2594080688614797
current = 2.2574869694912945
current = 2.2559607515339213
Minimum at: 2.254747295376156
```

Připomeňme, že skutečné minimum je 2.25.

Zkuste si pohrát s tím kódem. Problémy, které mohou nastat:

- Zasekneme se v inflexním bodě. Tohle se snad nestane („vratká pozice“).
- Příliš velké alpha můžeme ulítnout (poskakujeme zleva doprava čím dál tím větší skoky). Tohle bývá problém, proto se občas postupně snižuje alpha, ke kroku se přičte i nějaký malý násobek předchozího kroku. . . Spousta heuristik, které běží lépe. Nad rámec tohoto povídání.
- Málo iterací – no tak poběžíme více iterací (tzn. déle).

5.2 Nikdo neočekává, že tohle budete číst (a na cvičení se tomu taky nebudeme věnovat): Jednoduchá neuronka

5.2.1 Problém, který budeme řešit

Naše neuronka bude řešit klasický problém, z daného obrázku (28 krát 28 pixelů, 256 odstínů šedé) budeme chtít určit, která ručně psaná číslice je na něm napsaná.

Data si můžeme stáhnout z `http://yann.lecun.com/exdb/mnist/` kde máme popis formátu dat a některé známé metody strojového učení a jejich výsledky. My se nebudeme snažit dosáhnout co nejlepšího výsledku (ale dostaneme celkem dobrý výsledek).

Data jsou rozdělena do 60000 obrázků a příslušných 60000 labelů (správných číslic) na trénování a 10000 obrázků a labelů na testování. To je důležité, nakonec chceme zjistit, jak dobře naše neuronka odpovídá na datech, která ještě před tím nikdy neviděla (nechceme memorizovat, ale generalizovat naučené).

5.2.2 Struktura neuronové sítě

Vstup Vstupem bude obrázek 28×28 pixelů. Pro lepší manipulaci si ho přeuspořádáme do vektoru $x \in \mathbb{R}^{784}$ (například po jednotlivých řádcích).

Výstup Výstupem by intuitivně měla být ta číslice, která je na obrázku na vstupu. Ale co když nebude jasné, jestli na vstupu je jednička nebo sedmička (ručně psané se mohou plést). Asi bychom nechtěli, aby síť vystoupila „něco mezi“, tedy třeba čtyřku. Proto bude síť vystupovat pravděpodobnostní distribuci $y \in \mathbb{R}^{10}$ (kde $0 \leq y_i \leq 1$ a navíc $\sum_{i=0}^{9} y_i = 1$). Interpretujeme to tak, že na obrázku je nula s pravděpodobností y_0, na obrázku je jednička s pravděpodobností y_1, ..., devítka s pravděpodobností y_9. Pokud chceme výsledek jedno číslo, tak zvolíme ten index, který má největší pravděpodobnost (argmax).

Často se nám hodí „zmenšit“ velká čísla na malá (nebudeme mít chyby způsobené tím, že některé číslo bude příliš velké). Dále pak potřebujeme nějakou nelinearitu (afinní zobrazení nejsou dostatečně obecná). Na to se hodí následující funkce, které se říká sigmoid:

$$\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

obrázek sigmoid

Vstup ještě můžeme „zmáčknout“ jednoduše tím, že vydělíme 255.

Jak tedy vypadá naše síť?

- Reprezentace vstupního obrázku:
$$x \in \mathbb{R}^{784}$$
- První afinní funkce:
$$z^{(1)} = W^{(1)}x + b^{(1)} \in \mathbb{R}^{100}$$
kde indexujeme nahoře, protože dolní indexy se nám budou hodit, tedy $W^{(1)} \in \mathbb{R}^{100 \times 784}$ je jen obyčejná matice a $b^{(1)} \in \mathbb{R}^{100}$ je vektor.
- Jedna skrytá vrstva neuronů:
$$a^{(1)} = \sigma(z^{(1)}) \in \mathbb{R}^{100}$$
kde jen aplikujeme sigmoid na každé číslo vektoru $z^{(1)}$.
- Druhá afinní funkce:
$$z^{(2)} = W^{(2)}x + b^{(2)} \in \mathbb{R}^{10}$$
kde $W^{(2)} \in \mathbb{R}^{10 \times 100}$ a $b^{(2)} \in \mathbb{R}^{10}$.

- Z výsledku druhé afinní funkce uděláme pravděpodobnostní distribuci pomocí softmax:
$$(\hat{y})_i = \frac{e^{z_i^{(2)}}}{\sum_{i=1}^{10} e^{z_i^{(2)}}}$$
Tedy $\hat{y} \in \mathbb{R}^{10}$ je pravděpodobnostní distribuce (e^x je nezáporná, podělíme to součtem).

Známe obrázek x, známe příslušný 1-hot vektor, který měl vyjít jako $\hat{y}$ (pokud číslice byla tři, mělo vyjít $\hat{y} = (0,0,0,1,0,0,0,0,0,0)^T$). Jak ale určíme parametry $W^{(1)}, b^{(1)}, W^{(2)}, b^{(2)}$? Můžeme je zvolit náhodně a pak zkusit minimalizovat vzdálenost $\hat{y}$ od skutečného y.

Budeme minimalizovat něco, čemu se říká cross-entropy (protože to je zajímavá vzdálenost dvou pravděpodobnostních distribucí a máme rádi teorii informace a Claude Shannon to nevymyslel zbytečně).
$$L(y, \hat{y}) = -\sum_{i=1}^{10} y_i \log(\hat{y_i})$$
Výhodou je, že $L(y, \hat{y})$ je jedno reálné číslo, které můžeme minimalizovat.

5.2.3 Učení

Pokud číslo $L(y, \hat{y})$ bereme jako funkci například $W_{1,1}^{(1)}$ (tj. číslo $W_{1,1}^{(1)}$ je proměnná, zbytek parametrů jsou konstanty). Teď se můžeme ptát, jak moc se změní L, když o trošku změníme $W_{1,1}^{(1)}$. Tedy nás zajímá derivace L podle $W_{1,1}^{(1)}$ tu budeme zapisovat Leibnitzovou notací jako $\frac{dL}{dW_{1,1}^{(1)}}$.

Protože máme spoustu složených funkcí, budeme využívat poučku o derivaci složené funkce. Tvar, na který jsme zvyklí je:
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$
v Leibnitzově notaci to bude pak:
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$
kde x je proměnná, podle které derivujeme, $y = g(x)$, $z = f(y)$.

No a tohle chceme spočítat pro každý parametr a pak udělat gradient descend.

5.2.4 Učení, když bychom měli jen pár parametrů

Mohli bychom rovnou zkusit odvodit pro každý parametr zvlášť jak ho změnit, ale jednodušší to bude, když budeme vše držet ve vektorech a maticích.

Představme si, že vstupní obrázek má jen dva pixely, výstup jsou jen dvě třídy (tedy pravděpodobnost $p, 1-p$) a vnitřní vrstva je taky dva neurony. Postupně odvodíme derivace.

- Reprezentace vstupního obrázku:
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
- První afinní funkce:
$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = W^{(1)}x + b^{(1)} = \begin{pmatrix} W_{1,1}^{(1)} & W_{1,2}^{(1)} \\ W_{2,1}^{(1)} & W_{2,2}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \end{pmatrix}$$
- Jedna skrytá vrstva neuronů:
$$a^{(1)} = \sigma(z^{(1)}) = \begin{pmatrix} \sigma(z_1^{(1)}) \\ \sigma(z_2^{(1)}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- Druhá afinní funkce:

$$z^{(2)} = W^{(2)}x + b^{(2)} = \begin{pmatrix} W^{(2)}_{1,1} & W^{(2)}_{1,2} \\ W^{(2)}_{2,1} & W^{(2)}_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{(1)}_1 \\ a^{(1)}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b^{(2)}_1 \\ b^{(2)}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- Z výsledku druhé afinní funkce uděláme pravděpodobnostní distribuci pomocí softmax:

$$(\hat{y})_i = \begin{pmatrix} \frac{e^{z^{(2)}_1}}{\sum_{i=1}^2 e^{z^{(2)}_i}} \\ \frac{e^{z^{(2)}_2}}{\sum_{i=1}^2 e^{z^{(2)}_i}} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

- Chceme minimalizovat ztrátu:

$$L(\hat{y}, y) = -y_1 \log(\hat{y_1}) - y_2 \log(\hat{y_2}) \in \mathbb{R}$$

Připomeňme, že x, y je obrázek a daný label, tedy čísla, která známe.

Derivování a skládání do matic a vektorů

Vektorový kalkulus sice ještě neznáme, ale nebude tak těžké ho odvodit. Pro řetízkové pravidlo bychom chtěli vědět, jak moc máme pohnout vektor $\begin{pmatrix} z^{(2)}_1 \\ z^{(2)}_2 \end{pmatrix}$ abychom zmenšili ztrátu L.

- Pro řetízkové pravidlo chceme „derivaci L podle $z^{(2)}$“. Tedy chceme spočítat $\begin{pmatrix} \frac{dL}{dz^{(2)}_1} \\ \frac{dL}{z^{(2)}_2} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{dL}{dz^{(2)}_1} \\ \frac{dL}{z^{(2)}_2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{dL}{d\hat{y_1}} \frac{d\hat{y_1}}{dz^{(2)}_1} + \frac{dL}{d\hat{y_2}} \frac{d\hat{y_2}}{dz^{(2)}_1} \\ \frac{dL}{d\hat{y_1}} \frac{d\hat{y_1}}{z^{(2)}_2} + \frac{dL}{d\hat{y_2}} \frac{d\hat{y_2}}{z^{(2)}_2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{y_1}{\hat{y_1}} (\hat{y_1}(1-\hat{y_1})) + \frac{y_2}{\hat{y_2}} (-\hat{y_1}\hat{y_2}) \\ -\frac{y_1}{\hat{y_1}} (-\hat{y_1}\hat{y_2}) + \frac{y_2}{\hat{y_2}} (\hat{y_2}(1-\hat{y_2})) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{y_1}(y_1+y_2) - y_1 \\ \hat{y_2}(y_1+y_2) - y_2 \end{pmatrix} && (y_1 + y_2 = 1 \text{ prst. distrib.}) \\
&= \begin{pmatrix} \hat{y_1} - y_1 \\ \hat{y_2} - y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Ale $z^{(2)}$ není parametr, ten nemůžu změnit, ale $W^{(2)}$ můžu změnit pomocí gradient descend, tedy chci „derivaci L podle $W^{(2)}$“. Pomocí řetízkového pravidla tedy spočítám gradient. V následujícím píšu $w_{i,j}$ místo $w^{(2)}_{i,j}$ a z_i místo $z^{(2)}_i$ a a_i místo $a^{(1)}_i$, abych tam neměl tolik indexů.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{dL}{dw_{1,1}} & \frac{dL}{dw_{1,2}} \\ \frac{dL}{dw_{2,1}} & \frac{dL}{dw_{2,2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{dL}{dz_1} \frac{dz_1}{dw_{1,1}} & \frac{dL}{dz_1} \frac{dz_1}{dw_{1,2}} \\ \frac{dL}{dz_2} \frac{dz_2}{dw_{2,1}} & \frac{dL}{dz_2} \frac{dz_2}{dw_{2,2}} \end{pmatrix} && (z_2 \text{ není funkcí } w_{1,2}) \\
&= \begin{pmatrix} (\hat{y_1} - y_1)a_1 & (\hat{y_1} - y_1)a_2 \\ (\hat{y_2} - y_2)a_1 & (\hat{y_2} - y_2)a_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \hat{y_1} - y_1 \\ \hat{y_2} - y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

- Další parametr, který můžeme měnit dle gradient descend je $b^{(2)}$ opět vynechávám horní indexy.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{dL}{db_1}\\\frac{dL}{db_2}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{dL}{dz_1}\frac{dz_1}{db_1}\\\frac{dL}{dz_2}\frac{dz_2}{db_2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\hat{y_1}-y_1\\\hat{y_2}-y_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Opět výpočet čistě pro řetízkové pravidlo „derivace L podle $a^{(1)}$“. Pozor na to, že L závisí na $z_1^{(2)}$ i $z_2^{(2)}$ a oboje závisí na $a_1^{(1)}$, tedy použijeme linearitu

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{dL}{da_1}\\\frac{dL}{da_2}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{dL}{dz1}\frac{dz_1}{da_1}+\frac{dL}{dz_2}\frac{dz_2}{da_1}\\\frac{dL}{dz1}\frac{dz_1}{da_2}+\frac{dL}{dz_2}\frac{dz_2}{da_2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}(\hat{y_1}-y_1)w_{1,1}+(\hat{y_2}-y_2)w_{2,1}\\(\hat{y_1}-y_1)w_{1,2}+(\hat{y_2}-y_2)w_{2,2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}w_{1,1} & w_{2,1}\\w_{1,2} & w_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{y_1}-y_1\\\hat{y_2}-y_2\end{pmatrix}\\ &= (W^{(1)})^T\begin{pmatrix}\hat{y_1}-y_1\\\hat{y_2}-y_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- Teď spočítáme podle $z^{(1)}$, na to napřed potřebujeme zderivovat sigmoid:

$$\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)' = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} = \sigma(x)(1-\sigma(x))$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\frac{dL}{dz_1}\\\frac{dL}{dz_2}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\frac{dL}{da_1}\frac{da_1}{dz_1}\\\frac{dL}{da_2}\frac{da_2}{dz_2}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{dL}{da_1}\sigma(z_1)(1-\sigma(z_1))\\\frac{dL}{da_2}\sigma(z_2)(1-\sigma(z_2))\end{pmatrix}\end{aligned}$$

  Ten poslední výraz by se dal zapsat pomocí Hadamardova násobení matic (tam násobíme jen příslušné prvky).

- Analogicky spočítáme gradient pro $W^{(1)}$:

$$\begin{pmatrix}\frac{dL}{dw_{1,1}} & \frac{dL}{dw_{1,2}}\\\frac{dL}{dw_{2,1}} & \frac{dL}{dw_{2,2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{dL}{dz_1}\\\frac{dL}{dz_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}$$

- Analogicky spočítáme gradient pro $b^{(1)}$:

$$\begin{pmatrix}\frac{dL}{db_1}\\\frac{dL}{db_2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{dL}{dz_1}\\\frac{dL}{dz_2}\end{pmatrix}$$

Příslušné gradienty můžeme odčítat v gradient descend.

5.2.5 Kód

Jednoduchý python kód. Používáme jen numpy, vynechali jsme čtení vstupu a vyhodnocování přesnosti.

```
def sigmoid(z):
    return 1 / (1 + np.exp(-z))


def loss(target, Y_hat):
    # cross-entropy https://en.wikipedia.org/wiki/Cross_entropy
    L_sum = np.sum(np.multiply(target, np.log(Y_hat)))
    return -L_sum / target.shape[1]


X = X_train
Y = Y_train

# n_epochs 20..1000 should be ok
n_epochs = 50
for i in range(n_epochs):
    # Forward pass
    z1 = np.matmul(W1, X) + b1
    a1 = sigmoid(z1)
    z2 = np.matmul(W2, a1) + b2
    # softmax https://en.wikipedia.org/wiki/Softmax_function
    a2 = np.exp(z2) / np.sum(np.exp(z2), axis=0)

    m = 60000

    # Backward pass
    dz2 = a2 - Y
    dW2 = np.matmul(dz2, a1.T) / m
    db2 = np.sum(dz2, axis=1, keepdims=True) / m

    da1 = np.matmul(W2.T, dz2)
    dz1 = da1 * sigmoid(z1) * (1 - sigmoid(z1))
    dW1 = np.matmul(dz1, X.T) / m
    db1 = np.sum(dz1, axis=1, keepdims=True) / m

    # Update network parameters
    W2 = W2 - alpha * dW2
    b2 = b2 - alpha * db2
    W1 = W1 - alpha * dW1
    b1 = b1 - alpha * db1

    # do not overshoot with many epochs
    alpha = alpha * (1 - 0.1 / n_epochs)

    print("Epoch", i, "loss: ", loss(Y, a2))
```