1. Rozhodněte, zdali jsou následující posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ monotónní, pokud ano, určete typ monotonie (rostoucí, klesající, nerostoucí, neklesající, konstantní).

   (a) $a_n = 2n + (-1)^n$

   (b) $\frac{1}{1+n^2}$

   (c) $\frac{n+1}{n+2}$

   (d) $\frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n-2}}$

2. Podle definice určete limitu následujících posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

   (a) $a_n = 1/n$

   (b) $a_n = 1/\sqrt{n}$

   (c) $a_n = \log n$

   (d) $a_n = \frac{1}{1+n^2}$

   (e) $a_n = \frac{n+1}{n+2}$

   (f) $a_n = \sin(1/n)$

3. Určete limitu následujících posloupností $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo dokažte, že neexistují:

   (a) $a_n = (-1)^n$

   (b) $a_n = \cos((-1)^n)$

   (c) $a_n = (-1)^{n!}$

   (d) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

   (e) $a_n = \cos(\frac{n\pi}{4})$

   (f) $a_n = \frac{2^n}{n^n}$

4. Nechť $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, definujeme že $f \in \mathcal{O}(g)$ jestliže

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \leq cg(n).$$

   Rozhodněte, zda platí:

   (a) $2^{3n} \in \mathcal{O}(2^n)$

   (b) $\sqrt{n} \in \mathcal{O}(n)$

   (c) $n^3 \in \mathcal{O}(2^n)$

   (d) $n \log n \in \mathcal{O}(n^{1.1})$

   (e) Co je třída funkcí $\mathcal{O}\left(2^{\mathcal{O}(\log n)}\right)$?

   Pro úplnost dodejme, že k velkému O existuje ještě malé, malá a velká omega (asymptotický horní odhad) a velká theta (asymptotickou rovnost). My zatím definujeme jen ty velké varianty:

   Nechť $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou dvě funkce, definujeme že $f \in \Omega(g)$ jestliže

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq n_0 \Rightarrow f(n) \geq cg(n).$$

   Řekneme, že f patří do třídy $\Theta(g)$, jestliže $f \in \mathcal{O}(g)$ a zároveň $f \in \Omega(g)$.

   Jaký je význam těchto notací? Definice byly převzaty z *Průvodce labirintem algoritmů* Martin Mareš, Tomáš Valla (pdf dostupné na: `http://pruvodce.ucw.cz/static/pruvodce.pdf`).

První sadu domácích úkolů odevzdejte do 12.3.2020. Vymýšlet můžete společně, ale ujistěte se, že každý bude sepisovat sám! Pouhé vyzrazení řešení není spolupráce na vymýšlení, každý musí přispět! Napište s kým jste spolupracovali.

[**Úkol 1.1**] **2 body** Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost. Dokažte, že $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *nemá* limitu právě tehdy, když existují aspoň dvě její podposloupnosti, které mají různou limitu.

[**Úkol 1.2**] **2 body** Nechť L značí množinu všech lidí, nechť $M \subseteq L$ značí množinu všech mužů a $Z \subseteq L$ množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy: $P(x, y)$ "x je rodič y". Tedy výrok "existuje něčí dědeček" můžeme psát: $\exists d \in M\ \exists r \in L\ \exists v \in L\colon P(d, r) \wedge P(r, v)$. Zapište pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem následující výroky a jejich negace:

1. Každý člověk je buď muž nebo žena.
2. Neexistuje žena, která by byla vlastní babičkou.
3. Existuje člověk, který má sestru.

[**Úkol 1.3**] **2 body** Najděte příklady následujících posloupností, určete které mohou a které musí mít vlastní limitu:

1. rostoucí a omezená
2. rostoucí a neomezená
3. neklesající, omezená, ale není rostoucí
4. neklesající, neomezená, ale není rostoucí
5. omezená, ale není monotónní
6. zdola omezená, ale není omezená
7. shora omezená, ale není omezená
8. není zdola ani shora omezená

Tahák:

Negace výroků:

1. $\neg(\neg A) \equiv A$
2. $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$
3. $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$
4. $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge (\neg B)$
5. $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv A \Leftrightarrow (\neg B)$
6. $\neg\left(\forall x\colon \varphi(x)\right) \equiv \exists x\colon \neg\varphi(x)$
7. $\neg\left(\exists x\colon \varphi(x)\right) \equiv \forall x\colon \neg\varphi(x)$

Pozor na "existuje právě jedno": $\neg\left(\exists! x\colon \varphi(x)\right) \equiv \left(\forall x\colon \neg\varphi(x)\right) \vee \left(\exists x \exists y\colon x \neq y \wedge \varphi(x) \wedge \varphi(y)\right)$

Definice. *Nechť* $(a_a) \subset \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$. *Číslo* a *je limitou posloupnosti* (a_n), *psáno* $\lim a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a$, *když*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0\colon |a_n - a| < \varepsilon.$$

BW Každá posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má podposloupnost $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, která je monotónní.

EDL $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - a) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$ speciálně $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

VOVP Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a (b_n) je posloupnost vybraná z (a_n). Pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.