Věta 1. Buďte $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé binární náhodné proměnné s $\Pr[X_i = 1] = p_i$. Označme $X = \sum_{i=1}^n X_i$ a $\mu = \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$. Potom platí, že

- $\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/2}$ pro všechna $0 < \delta < 1$ a
- $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{\frac{\delta^2\mu}{2+\delta}}$ pro všechna $\delta > 0$.

Definice

- Třída RP obsahuje všechny jazyky L, pro které existuje pravděpodobnostní Turingův stroj A, který
  - pracuje v polynomiálním čase,
  - pokud $x \notin L$, pak A vždy odmítne a
  - pokud $x \in L$, pak A přijme s pravděpodobností alespoň 1/2.
- Jazyk L je v třídě ZPP, pokud existuje pravděpodobnostní Turingův stroj A, který rozpoznává L a střední doba výpočtu A nad slovem x je polynomiální v $|x|$.
- Jazyk L je v třídě BPP, pokud existuje pravděpodobnostní Turingův stroj A, který
  - pracuje v polynomiálním čase,
  - pokud $x \in L$, pak A přijme s pravděpodobností alespoň 3/4 a
  - pokud $x \notin L$, pak A odmítne s pravděpodobností alespoň 3/4.

Příklady

1. Ukažte, že $\mathsf{ZPP} = \mathsf{RP} \cap \mathsf{co\text{-}RP}$.
2. Ukažte, že platí $\mathsf{RP} \subseteq \mathsf{NP}$ a $\mathsf{co\text{-}RP} \subseteq \mathsf{co\text{-}NP}$.
3. Rozhodněte, zda platí $\mathsf{BPP} = \mathsf{co\text{-}BPP}$.
4. Ukažte, že pokud $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{BPP}$, tak potom $\mathsf{NP} = \mathsf{RP}$.
5. Mějme dvě mince. Na první padne hlava s pravděpodobností $p_1 = 1/2$ a na druhé s pravděpodobností $p_2 = 1/4$. Jak určíme, která je která? Použijme následující algoritmus: Hodíme libovolnou mincí n-krát a určíme pravděpodobnost $\hat{p}$ s jakou během našeho algoritmu padala hlava. Pokud $\hat{p} \geq 3/8$ řekneme, že mince se kterou jsme házeli je první mince, jinak řekneme, že je to mince druhá.
   - Ukažte, že pro $n \geq 32\ln(2/\delta)$ náš algoritmus odpoví správně s pravděpodobností alespoň $1-\delta$.
   - Co by se stalo, pokud bychom neznali pravděpodobnost p_2?
6. Ukažte, že pro randomizovaný algoritmus QuickSort a jeho čas běhu platí $\Pr[\text{runtime} > 8n\log n] < 1/n^2$. V jaké třídě takový algoritmus je?
7. Buď A matice s vlastními čísly $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Potom matice $A+dI$ má vlastní čísla $d+\lambda_1, \ldots, d+\lambda_n$.
8. Ukažte, že d-regulární graf je bipartitní právě když nejmenší vlastní číslo jeho matice sousednosti je $-d$.
9. Určete vlastní čísla následujících grafů:
   - K_n úplného grafu na n vrcholech,
   - $K_{n,n}$ úplného bipartitního grafu s velikostí partit n,
   - C_n cyklu na n vrcholech.