

1. Vymysleme společně, jak rozložit matici  $A$  na součin  $A = U^T U$ , kde  $U$  je horní trojúhelníková matice (čtvercová). Vyzkoušejte na příkladech:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Musí to vždy jít? Musí takové matice být pozitivně definitní, to jest  $x^T A x > 0$  pro všechny nenulové vektory  $x$ ?

Pro matice z příkladu 1 vyzkoušejte i ostatní testy pozitivní definitnosti.

2. Ukažte, že pro pozitivně definitní matice  $A, B$ :

- (a)  $A + B$  je pozitivně definitní,
- (b)  $A^{-1}$  je pozitivně definitní.

Poznámka pod čarou: Součin pozitivně definitních matic (symetrických) nemusí být symetrický (kdyby byl, tak už je i pozitivně definitní).

3. Rozhodněte, zda  $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 5x_3^2 > 0$  pro všechna  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ .
4. Určete signaturu následující kvadratické formy:  $g(x, y, z) = -2xy + 2xz + y^2 - z^2$ .