

- Pro skalární součin definovaný  $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$  ukažte, že jsou funkce  $3x^2 - 1$  a  $5x^3 - 3x$  navzájem kolmé.
- Pro součin daný jako  $\langle f | g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$  ukažte že následující funkce jsou kolmé
  - $\langle \sin(x) | \cos(x) \rangle$  (jde i bez počítání)
  - $\langle \sin(x) | \sin(x) \rangle$
  - $\langle \sin(2x) | \sin(x) \rangle$
- Najděte matici přechodu  ${}_B[id]_K$  (od kanonické báze k bázi  $B$ ), kde  $B$  je ortonormální báze daná sloupci matice

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Spočítejte souřadnice vektoru  $[u]_K = (1, 2, 3)^T$  vůči bázi  $B$  (tj. chceme  $[u]_B$ ).

- Dokažte, že pokud matice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je tvořena  $n$  ortonormálními sloupci, pak  $A^T A = I_n$ .
- Mějme dva vektory  $(2, 4)^T$  a  $(3, 1)^T$ . Jaký násobek druhého musíme odečíst od prvního, aby výsledek byl kolmý na druhý? Jaký násobek prvního musíme odečíst od druhého, aby výsledek byl kolmý na první?
- Určete podle Gramm-Schmidtova předpisu ortonormální bázi řádkových prostorů následujících matic:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- Ukažte, že sloupce Hadamardovy matice  $H_m \in \mathbb{R}^{2^m \times 2^m}$  definované jako

$$H_0 = (1),$$

$$H_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} H_{m-1} & H_{m-1} \\ H_{m-1} & -H_{m-1} \end{pmatrix},$$

jsou ortonormální.

Pro zvědavé Kontrola maticového násobení: máte program, který tvrdí, že umí násobit matice rychle. Stačí skontrolovat  $Cx = A(Bx)$  kde  $C$  je výstup programu po násobení  $AB$  a  $x$  je náhodný  $\{0, 1\}$  vektor správné délky. Dokažte, že pak pokud je  $C$  špatně, pak s pravděpodobností aspoň polovina rovnost  $Cx = ABx$  neplatí.