1. Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, skalární součin je binární operace $\langle \cdot \mid \cdot \rangle \colon V^2 \to \mathbb{R}$, která pro všechny $x, y, z \in V$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ splňuje:

   (a) $\langle x \mid x \rangle \geq 0$ a rovnost nastane jen pro $x = \vec{0}$
   (b) $\langle x + y \mid z \rangle = \langle x \mid z \rangle + \langle y \mid z \rangle$
   (c) $\langle \alpha x \mid y \rangle = \alpha \langle x \mid y \rangle$
   (d) $\langle x \mid y \rangle = \langle y \mid x \rangle$ (respektive $\langle x \mid y \rangle = \overline{\langle y \mid x \rangle}$ pro komplexní čísla).

   Řekneme, že vektory u, v jsou na sebe *kolmé*, pokud $\langle x \mid y \rangle = 0$.

   Norma daná skalárním součinem je $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$. Intuitivně norma určuje délku vektoru. Připomeňme, že norma lze definovat i o něco obecnějším způsobem, ale normy dané skalárním součinem jsou velice užitečné.

   Geometrická interpretace standardního skalárního součinu v $\mathbb{R}^n$ je pak $\langle x \mid y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\varphi)$, kde φ je úhel mezi vektory x, y (porovnejte s definicí kolmosti).

   Navíc víme, že když máme ortonormální vektory, pak jsou lineárně nezávislé.

2. Spočítejte čemu se v reálných (nebo komplexních) vektorových prostorech rovná (V je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$, popřípadě to samé s $\mathbb{C}$):

   - $\langle x \mid y + z \rangle$
   - $\langle x \mid \alpha z \rangle$

3. Ukažte, že následující jsou skalární součiny:

   (a) (Standardní skal. souč.) V $\mathbb{R}^n$ definujeme $\langle x \mid y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
   (b) V prostoru $\mathcal{C}_{[a,b]}$ spojitých reálných funkcí na intervalu $[a, b]$ definujeme $\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$.
   (c) Pro součin daný jako $\langle f \mid g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) g(x) dx$ ukažte že následující funkce jsou kolmé
      - $\langle \sin(x) \mid \cos(x) \rangle$ (jde i bez počítání)
      - $\langle \sin(x) \mid \sin(x) \rangle$
      - $\langle \sin(2x) \mid \sin(x) \rangle$

4. Spočítejte standardní skalární součin vektorů $(1, 2, 3)^T, (0, 0, 1)^T, (1, -2, 1)^T$. Které z nich jsou navzájem kolmé? Jaká je délka prvního vektoru? Jak daleko jsou od sebe první a třetí vektor?

5. Označme řádky matice A jako vektory $v_1, \ldots, v_m$ a sloupce matice B vektory $w_1, \ldots, w_p$. Čím jsou tvořeny jednotlivé prvky matice AB?

   Dokažte, že řádkový prostor a kernel jsou navzájem kolmé.

6. Pro skalární součin definovaný $\langle f | g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) \, dx$ ukažte, že jsou funkce $3x^2 - 1$ a $5x^3 - 3x$ navzájem kolmé.

7. Dokažte, že norma definovaná skalárním součinem ($\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$) splňuje rovnoběžníkové pravidlo, tedy $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

   Může být norma $\|x\|_1 = \sum |x_i|$ nebo norma $\|x\|_\infty = \max |x_i|$ dána skalárním součinem?

Pro zvídavé Dokažte, že v rovině neexistují čtyři body, tak že vzdálenosti mezi nimi jsou celá lichá čísla (mohou a nemusí být všechna stejná).